This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

PER
5716

So. 885.80

JAN 23 1900

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

30 Jan.—18 Nov. 1899.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Sci 885.80

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR CULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. G. v. ESCHERICH und Prof. L. GEGENBAUER

IN WIEN.

X. JAHRGANG.

(Index 1-10)

WIEN, 1899.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Digitized by Google

Sci. 885.80

177/46

1899, Jan. 30 – Nov. 18
Haven fund

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Biermann, Otto, Bemerkung über die einer algebraischen Curve adjungierten Curven 373

Bobek, Karl, Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen 122

— — Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen. II. Abhandlung 307

Dintzl, Erwin, Über den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitätssatzes 88

— — Der zweite Ergänzungssatz des cubischen Reciprocitätsgesetzes . . 303

Gegenbauer, Leopold, Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art . 189

— — Bemerkung über einen die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Satz des Herrn J. J. Sylvester 370

Igel, B., Zur Theorie der Formen vierter Ordnung 102

— — Einiges aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen . 229

Internationaler Mathematiker-Congress 101

Internationaler Verein zur Beförderung des Studiums der Quaternionen und verwandter Systeme der Mathematik 376

Janisch, Eduard, Neue Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für Kegelschnitte 182

— — Über die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien 223

Kantor, S., Neue Äquivalenztheorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene 18

— — Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren 54

Klekler, Paula, Note über die Polynomialcoefficienten 218

Klug, L., Die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n-dimensionalen Raum 84

— — Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschließende Bemerkungen 198

Klingatsch, A., Eine Abbildung der Kugel auf den Rotationskegel . . . 75

Kohl, Emil, Dr., Über die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes 343

Schwarz, A., Über die Krümmung der cyklichen Curven nebst einem Beitrage zur neuern Dreiecksgeometrie 250

Sobotka, J., Zur Perspective des Kreises 289

Digitized by Google

Studnička, F. J., Beiträge zur Determinanten-Theorie 1
— — Beitrag zur Theorie der cyklischen Determinanten 193
— — Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten 338
Wendt, Cäcilie, Note über die Kreisfunctionen 97

Literatur-Berichte.

André, Ch., Traité d'astronomie stellaire 13
Alexandroff, Ivan, Problèmes de géométrie élémentaire 28
Appell, M., Elements d'analyse mathématique 32
Annuaire pour l'an 1899 publié par le bureau des Longitudes 20
Annuaire de l'observatoire municipal de Paris 22
Arnal, L. und *Gauthier, G.*, Encyclopédie théorique. Tome IV 34
Arnoux, V., 2500 Problèmes d'arithmetique et de géométrie pratique . . 30
Astronomischer Kalender für 1899 26
Braunmühl, A. v., Nassîr Êddin Tûsi und Regiomontan 16
— — Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie 18
Cappeli Alfredo, Lezioni di Algebra complementare 6
Cantor, Moritz, Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens 13
Czuber, E., Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung. Zwei Bände 36
Darboux, Gaston, Dr., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonées curvilignes. Tome I. 44
Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897 26
Dreher, Eugen, und *Jordan, K., T.*, Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus 39
Engel, Friedrich, und *Stäckel, Paul*, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Erster und zweiter Theil 31
Föppl, Aug., Dr., Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band . 7
Frolov, Michel, La théorie des paralleles 27
Geisler, Curt, Mathematische Geographie 14
Goursat, E., Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre à deux variables indépendantes 39
Graf, J. H., Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen. Erstes Heft 6
Gross, G., Die mechanische Wärmetheorie 39
— *Th., Dr.*, R. Mayer u. H. v. Helmholtz. Eine kritische Studie . . . 46
Günther, Ludwig, Kepplers Traum vom Mond. 9
Haussner, Robert, Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz 17
Helmert, F. R., Beiträge zur Theorie des Reversionspendels 4
Heusch., F. Cours d'analyse 39
Herrmann, Richard, Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen 23
Heydenreich, Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln 11
Junker, Friedrich, Dr., Höhere Analysis. Erster Theil 15
Kober, Georg, Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Erster Theil . . 22
Krüger, L., Dr., Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen . 3
Kutta, W., M., Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung 19
Leiss, C., Die optischen Instrumente der Firma Fuess 33
Longchamps, G., Cours de problèmes de géométrie analytique 38

Digitized by Google

Loria, Gino, Bolletino di bibliografia e storia. Anno I. 28
Löwy, Alfred, Dr., Über bilineare Formen mit conjugiert-imaginären Variablen 11
Murani, Oreste, Luce e raggi Röntgen 35
Nédélec, G., Le calcul vectoriel 35
Neumann, Anton, Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien 27
— — Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 15
— *Karl*, Die elektrischen Kräfte. Zweiter Theil 19
Oltramare, G., Calcul de Généralisation. 31
Petersen, Julius, Vorlesungen über Functionstheorie 25
Pfaundler, Leop., Dr., Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Zweiter Band. Erste Abtheilung 1
Picard, Emile, M., Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois 16
— — Traité d'Analyse. T. II et III. 42
Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome III . 29
— — Cours de physique mathématique. Théorie du potentiel Newtonien . 33
Pscheidl, W., Grundriss der Naturlehre 25
Reye, Theodor, Die Geometrie der Lage. Erste Abtheilung 30
Ritter, August, Dr., Lehrbuch der höheren Mechanik. Zweiter Theil . . 24
Rudio, Ferdinand, Dr., Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses 2
Routh, Edward John, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Zweiter Band 8
Salmon, George, Analytische Geometrie des Raumes. Erster Theil . . . 21
Schubert, Hermann, Dr.. Vierstellige Tafeln mit Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen 5
Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Erser Band 10
Simon, Max, Dr., Analytische Geometrie des Raumes 14
Spielmann, Johann, Močniks Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien 27
Sturm, Ch. Lehrbuch der Mechanik. Erster Band 23
Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome III 41
Tierz, Ed., Les recettes du distillateur 22
Tisserand, F., Leçons sur la détermination des orbites professées à la Faculte 37
Tyndall, John, In den Alpen 24
Vivanti, Giulio, Prof., Corso di calcolo infinitesimale 12
Walther, Alois, Dr., Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung . . 4
Wiedemann, G. Die Lehre von der Elektricität. Vierter Band 38

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis der Jahrgänge 1—10.

	Band	Seite
† Adler Gottlieb.		
Über die mechanische Kraftwirkung an der Conductoroberfläche	2	155—156
Über die Capacität von Condensatoren	2	413—420
† Ameseder Adolf.		
Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Collineationen und Reciprocitäten	1	371—416
Biermann Otto in Brünn.		
Über die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte	1	49— 70
Über die Resultante ganzer Functionen	2	143—146
Beitrag zur Lehre von den Abel'schen Integralen	3	21— 30
Über die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte (Fortsetzung)	3	143—168
Über die Bildung eines Systems algebraischer Gleichungen . .	5	17— 32
Ableitung einer analytischen Darstellung der Epiellipside . . .	8	87— 94
Über unendliche Reihen und unendliche Doppelproducte . . .	8	115—137
Bemerkungen über die einer algebraischen Curve adjungierten Curven	10	373—375
Birkeland Kr. in Christiania.		
Ein Satz über algebraische Curven	1	417—424
Bobek Karl in Prag.		
Brennpunktscurve des Kegelschnittsbüschels	3	309—317
Über die Invarianten der Flächen dritter Ordnung	8	145—169
Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen	10	122—181
Über Flächen dritter Ordnung, welche etc. (Fortsetzung) . . .	10	307—337
Carda Karl in Brünn.		
Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen	5	185—192
Zur Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen durch bestimmte Integrale	5	321—324
Über eine Beziehung zwischen bestimmten Integralen	6	121—126
Zur Quadratur des Ellipsoids	7	129—132
Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen	8	170—174
Carvallo E. in Paris.		
Sur les systèmes linéaires, le calcul des symbols différentiels et leur application à la physique mathématique	2	177—216
Sur les systèmes linéaires, le calcul des symbols etc. (Continuation)	2	225—266
Sur les systèmes linéaires, le calcul des symbols etc. (Fin) . .	2	311—330
Curtze Maximilian in Thorn.		
Practica geometriae	8	193—224
Nachtrag zu dem Aufsatze „Practica geometriae“	9	266—268
Czuber Emanuel in Wien.		
Zur Theorie der Beobachtungsfehler	1	457—464
Zur Theorie zweier vielfachen Integrale	2	119—124

Digitized by Google

	Band	Seite
Zur Kritik einer Gauß'schen Formel	2	459—464
Über einen geometrischen Ort	3	217—233
Über die Einhüllenden der Tangenten einer Plancurve, der Schmiegungsebenen einer Raumcurve und der Tangentialebenen einer krummen Fläche	3	337—347
Anton Winckler	3	403—406
Zur Anwendung eines Kronecker'schen Satzes	4	364—366
Über Discriminantenmannigfaltigkeiten algebraischer Gleichungen	5	62— 66
Die ein-eindeutigen Punkttransformationen der Ebene	5	267—286

Dantscher von Kollesberg Victor in Graz.

Bemerkung zur Integralrechnung	1	92— 94
Bemerkung zur logarithmischen Reihe	6	390—392

Daublebski von Sterneck Robert in Wien.

Bemerkung zur Theorie der zahlentheoretischen Ableitungen	4	53— 56
Ableitung zahlentheoretischer Relationen mit Hilfe eines mehrdimensionalen Systems von Gitterpunkten	5	255—266
Die Configurationen 11_3	5	325—330
Beweis eines Satzes über Determinanten	6	205—207
Die Configurationen 12_3	6	223—255
Über einige specielle zahlentheoretische Functionen	7	37— 48
Über den Wilson'schen Satz	7	145—148
Zur Vervollständigung der Ausgaben der Schrift des Jordanus Nemorarius: „Tractatus de numeris datis“	7	165—179
Bemerkung über die von Dirichlet in seiner Habilitationsschrift behandelten Functionen	7	342—346
Bemerkung über die Summierung einiger zahlentheoretischer Functionen	9	43— 45

Dintzl Erwin in Wien.

Über den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes	10	88— 96
Der zweite Ergänzungssatz des cubischen Reciprocitätsgesetzes	10	303—306

Drasch Heinrich in Linz.

Über einige Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt	4	81— 84
Bemerkungen zum Aufsatze des Herrn Rulf „Über die Entfernung einer Unstetigkeit in der Geometrie“	4	376—378

v. Escherich Gustav in Wien.

Bestimmung einer Determinante	3	19— 20
Über einige Determinanten	3	68— 80
Zur Bessel'schen Differentialgleichung	3	142
Über zwei simultane Functionalgleichungen	3	178
Bemerkung zu den Kugelfunctionen	3	198
Über eine Näherungsformel	3	234
Zur Zerlegung in Partialbrüche	3	348

Fano Gino in Rom.

Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen	7	297—320
Über Gruppen, insbesondere continuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes	9	17— 29

Fiedler Wilhelm in Zürich.

Über eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie	3	193—197

Digitized by Google

	Band	Seite
Fischer Ernst in Wien. (Siehe auch **Mumelter.**)		
Aufstellung eines vollständigen Systems invarianter Gebilde von drei ternären quadratischen Formen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ . . .	8	97—114
Gegenbauer Leopold in Wien.		
Einige arithmetische Sätze	1	39— 46
Über die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe	2	125—130
Über die aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen . .	2	429—432
Über die Cantor'sche Zerlegung der reellen Zahlen in unendliche Producte	3	87— 91
Über die Tschebychef-de Polygnac'sche Identität	3	319—335
Über eine arithmetische Formel	3	336
Über reelle Primzahlen	4	89— 93
Note über Primzahlen	4	98
Über den sogenannten casus irreducibilis der Cardanischen Formel	4	155—158
Bemerkung über eine Formel des Herrn Pépin	4	184
Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes	4	190—192
Die Anzahl der von einander verschiedenen cyklischen E-Beziehungen auf einem Träger vom Geschlechte Eins, welche n-elementige Cyklen liefern	4	330
Bemerkung zu der von Herrn A. Elsas gegebenen Theorie der elektrischen Schwingungen in cylindrischen Drähten . . .	4	379—380
Über die zum elektromagnetischen Potentiale eines Kreisstromes associierte Function	4	399—401
Bemerkung über Leonardo Pisano's „liber Abaci“	4	402
Eine Integralrelation	5	53— 61
Über Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodul . . .	5	230—232
Über die Exponentialfunction	5	303—306
Zur Theorie der algebraischen Gleichungen	6	12— 14
Bemerkung über eine Relation des Herrn Bougajef	6	208
Über die Näherungsnenner regulärer Kettenbrüche	6	209—219
Arithmetische Bemerkung	7	26
Notiz über die Kugelfunctionen	7	35— 36
Bemerkung über reelle Primzahlen	7	73— 76
Bemerkung über die Bessel'schen Functionen	8	383—384
Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art	10	189—192
Bemerkung über ein die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Theorem des Herrn J. J. Sylvester .	10	370—373
Glösel Karl in Bielitz.		
Über die Zerlegung der ganzen Zahlen	7	133—141
Notiz über die Zerlegung der ganzen Zahlen	7	290
Gmeiner Josef in Wien.		
Beweis eines arithmetischen Satzes	1	159—162
Die bicubische Reciprocität zwischen einer reellen und einer zweigliedrigen regulären Zahl	3	179—192
Die bicubische Reciprocität zwischen einer reellen etc. (Schluss)	3	199—210
Rein analytische Herleitung der Transformationsgleichung für eigentliche Doppelintegrale mit Hilfe des Green'schen Satzes	4	277—293
Randintegration und Transformation als zwei sich gegenseitig begründende Methoden der Integralrechnung	6	303—371
Die Einheiten im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln	9	184—206
Grünfeld E. in Nikolsburg.		
Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn B. Igel „Zur Theorie der Differentialgleichungen“	9	372
Guldberg Alf in Christiania.		
Über einen Punkt aus der Theorie der Differentialgleichungen .	2	147—154
Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen	7	332—334

Digitized by Google

	Band	Seite
† Haubner J.		
Über Strombrechung in flächenförmigen Leitern	1	247—274
Über Strombrechung in flächenförmigen Leitern (Schluss)	1	357—370
Hočevar Franz in Graz.		
Über die Convergenz bestimmter Integrale mit unendlichen Grenzen	4	177—183
Das Associationsgesetz der unendlichen Reihen und Producte	5	307—312
Huber J. in Bern.		
Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajectorien und die Cissoiden 4. Ordnung	6	157—203
† Igel Benzion.		
Über die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlichen	2	157—176
Zur Theorie der Determinanten	3	55— 67
Versuch, einige Sätze in der Theorie der Modulargleichungen rein algebraisch abzuleiten	3	349—364
Über eine Determinantenbeziehung in der Theorie der Differentialgleichungen	4	381—394
Über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung	5	85— 91
Zur Theorie der adjungierten Differentialgleichungen	5	163—184
Über die Paare von Hauptdreiecken in der Theorie der bilinearen Formen	5	289—302
Zur Theorie der elliptischen Functionen	7	149—164
Über eine Relation von Kronecker	8	354—360
Beweis einiger Determinantentheoreme von Sylvester	9	47— 54
Zur Theorie der Differentialgleichungen	9	124—131
Zur Theorie der Formen vierter Ordnung	10	102—121
Einiges aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen	10	229—249
Jäger Gustav in Wien.		
Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne	2	1— 22
Über die Größe der Molekeln	3	235—264
Janisch Eduard in Brünn.		
Eine Methode zur Construction des Osculationskreises der ebenen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte	7	142—144
Note über einige besondere inverse Flächen des Cayley'schen Cylindroids	8	278—280
Neue Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für Kegelschnitte	10	182—188
Über die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien	10	223—228
Januschke Hans in Teschen.		
Geometrische Erklärung der conischen Refraction	5	129—135
Kalkmann Georg in Straßburg.		
Das Gesetz der collinearen und reciproken Äquivalenz	9	55— 73
Zur Theorie der Elementargebilde II. und III. Ordnung	9	247—265
Kantor Seligmann in Wien.		
Neue Äquivalenztheorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene	10	18— 53
Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren	10	54— 74
Klekler Paula in Wien.		
Note über die Polynomialcoefficienten	10	218—222

Digitized by Google

	Band	Seite
Klingatsch A. in Graz.		
Über die geometrische Lösung eines Systems linearer Gleichungen	3	169—177
Zur Bestimmung des mittleren Halbmessers der Erde als Kugel	7	335—341
Über einige äquivalente Abbildungen des Rotationsellipsoides auf die Kugel	8	175—186
Eine Abbildung der Kugel auf dem Rotationskegel	10	75— 83
Klug Leopold in Klausenburg.		
Einige Sätze über die Parabel und das hyperbolische Paraboloid.	6	107—108
Über die vierten Schnittgeraden der einem Dreikant umschriebenen Rotationskegel	8	54— 56
Über den harmonischen Pol	8	361—376
Einige Sätze über Regelscharen	9	110—116
Die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n-dimensionalen Raum	10	84— 87
Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschließende Bemerkungen	10	198—217
Kobald Engelbert in Leoben.		
Zur graphischen Behandlung der Dioptrik	2	131—140
Notiz, betreffend die Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen	2	331—332
Kohl Emil in Wien.		
Über Strahlencurven und Wellenflächen in einem Medium mit veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Rücksicht auf die Erdbebenerscheinungen	9	151—168
Über die Linienintegrale der Elasticitätsgleichungen	9	215—232
Über die Fortpflanzung von Wellen in absorbierenden Medien	9	358—371
Über die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes	10	343—369
Kohn Gustav in Wien.		
Über die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen	1	71— 91
Über die Relationen, welche zwischen den verschiedenen etc. (Schluss)	1	129—158
Notiz über den Schnitt eines räumlichen vollständigen Fünfecks mit einer Geraden	2	141—142
Über die Sextupel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnittes gesehen werden	2	293—310
Beweis eines Satzes von Cayley	2	343—344
Bemerkung über die Kegelschnitte, welche sechs Wendetangenten einer C^3 berühren	4	398
Emil Weyr	6	1— 4
König Julius in Budapest.		
Über stetige Functionen, welche innerhalb jedes Intervalls extreme Werte beitzen	1	7— 12
Küpper C. in Prag.		
Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complex	1	95—104
Über benachbarte windschiefe Strahlen im linearen Complexe	1	451—456
Bestimmung der Maximalbasis B für eine irreducible μ-fache Mannigfaltigkeit von Curven n^{ter} Ordnung C^n	6	5— 11
Zur Theorie der algebraischen Curven	6	127—156
Über K-gonale Curven $C_p^n n^{ter}$ Ordnung vom Geschlechte $p > 1$	8	57— 78
Kuschniriuk M. in Wien.		
Über eine simultane Transformation elliptischer Integrale	8	281—292

Digitized by Google

	Band	Seite
Lerch Mathias in Freiburg i./S.		
Mittheilungen aus der Integralrechnung	1	105—112
Über eine charakteristische Eigenschaft der Gattungen vom Geschlechte Null	2	465—468
Zur Theorie der Kronecker'schen Doppelreihe $\mathfrak{Ser}.(\xi, \eta, u, v, w)$.	5	367—379
Über eine Formel aus der Theorie der Gammafunction	8	187—192
Über die analytische Natur einer von Paul Du Bois-Reymond betrachteten Function	8	377—382
Zur Theorie der elliptischen Functionen	9	177—183
v. Lichtenfels Oscar in Graz.		
Über den Fundamentalsatz der Theorie der Differentialgleichungen	1	275—282
Zum Beweise des Theorems von Dupin	5	380—382
Locchi E. in Wien.		
Über die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen.	4	85— 88
Loewy Alfred in München.		
Algebraische und gruppentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der Differentialgleichungen	8	225—266
† Machovec Franz.		
Über orthocentrische Poltetraeder der Flächen zweiter Ordnung	2	451—457
Eine Bemerkung zu zwei Sätzen von Lamé und Bertrand.	4	57— 58
Zur linealen Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen	4	95— 97
Maiss Eduard in Wien.		
Eine neue Eigenschaft der Kegelschnitte	3	16— 20
Mandl Julius in Wien.		
Zur Theorie der Kegelschnittslinien	9	117—123
Mandl Max in Prossnitz.		
Über die Verallgemeinerung eines Gauß'schen Algorithmus	1	465—472
Mertens Franz in Wien.		
Die invarianten Gebilde der räumlichen Collineation	1	13— 32
Das Potential einer homogenen Ellipse	1	425—428
Über eine Substitution zur Rationalmachung von Differentialausdrücken, welche eine Quadratwurzel aus einer Function zweiten Grades enthalten	2	217—224
Über die Irreductibilität der Function $x^p - A$	2	291—292
Der Fundamentalsatz der Algebra	3	293—308
Über ganze Functionen von m Systemen von je n Unbekannten	4	193—228
Über ganze Functionen von m Systemen von je n etc. (Schluss)	4	297—329
Meyer Franz in Königsberg i. Pr.		
Über die höheren Ableitungen eines Quotienten zweier Functionen	1	33— 38
Über Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse	4	229—276
Über Discriminanten und Resultanten der Gleichungen etc. (Schluss)	4	331—363
Meusburger Karl in Innsbruck.		
Entwickelung von $\sin x$ und $\cos x$ in eine unendliche Reihe auf elementarem Wege	6	256—260
Müller E. in Königsberg i. Pr.		
Die Liniengeometrie nach den Principien der Graßmann'schen Ausdehnungslehre	2	267—290

Digitized by Google

	Band	Seite
Die Kugelgeometrie nach den Principien der Graßmann'schen Ausdehnungslehre	3	365—402
Die Kugelgeometrie nach den Principien der Graßmann'schen Ausdehnungslehre (Fortsetzung)	4	1— 52
Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Graßmann'schen Principien	7	77— 89
Die Geometrie orientierter Kugeln nach Graßmann'schen Methoden	9	269—315
Müller Fr. in Prag.		
Zur Fehlertheorie. Ein Versuch zur strengeren Begründung derselben	2	61— 71
Mumelter Karl in Wien. (Siehe auch **Fischer.**)		
Aufstellung eines vollständigen Systems invarianter Gebilde von drei ternären quadratischen Formen $f(x), f'(x), f''(x)$	8	97—114
Nager Julius in Wien.		
Über einige merkwürdige Punkte des Kreisvierecks	7	325—331
Nagy Albino in Rom.		
Über Beziehungen zwischen logischen Größen	4	147—153
Über das Jevons-Clifford'sche Problem	5	331—345
Netto Eugen in Gießen.		
Über recurrierende Reihen	6	285—290
Osgood W. F. in Cambridge (Amerika).		
Zur Differentiation des bestimmten Integrales nach einem Parameter	7	90— 92
Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung	9	331—345
Ott Karl in Wien.		
Über die Construction monogener analytischer Functionen mit vorgegebenen Unstetigkeitsstellen auf der Riemann'schen Fläche	4	367—375
Peano G. in Turin.		
Sur les systèmes linéaires	5	136
Schreiben an die Redaction	6	204
Pierpont James in Newhaven (Amerika).		
Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858)	6	15— 68
Pringsheim Alfred in München.		
Erwiderung	9	46
Puchta Anton in Czernowitz.		
Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring	1	443—450
v. Pužina Josef in Lemberg.		
Über den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function	3	1— 15
Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x, y)$ von constanten Werten	5	67— 84
Radaković Michael in Innsbruck.		
Über die Schwingungen von Saiten veränderlicher Dichte	5	193—229
Über die analytische Darstellung des Zwanges eines materiellen Systems in allgemeinen Coordinaten	7	27— 33

Digitized by Google

Rulf Wilhelm in Wien.

	Band	Seite
Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der algebraischen Spiralen	3	211—216
Über die Entfernung einer Unstetigkeit in der Geometrie	3	173—176
Ein Ellipsensatz	7	34
Über die Bestimmung jener gleichseitigen Hyperbeln eines Kegels zweiten Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrieebene haben	7	93— 96
Zum Ovalwerk des Leonardo da Vinci	9	30— 33

Rupp Otto in Brünn.

Über die mit der Parabelschaar zusammenhängenden Steiner'schen Hypocykloiden	4	135—146

Ruth F. in Prag.

Beitrag zur Construction der Kegelschnitte aus imaginären Elementen	3	81— 86

Saalschütz Louis in Königsberg i. Pr.

Zur Zerlegung in Partialbrüche nebst einem Zusatz über Ausdrücke für Sinus- und Cosinus-Potenzen	9	132—150
Berichtigung	9	268

Schmid Theodor in Wien.

Über die Beleuchtungscurven der windschiefen Helikoide	2	333—342
Über das Coincidenzproblem	4	159—166
Über trilinear verwandte Felder als Raumbilder	6	99—106
Über trilinear verwandte Felder als Raumbilder (Fortsetzung)	7	180—184
Über Polar- und Nullsysteme	8	267—272

Schmitt Friedrich in Wien.

Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche vierter Ordnung	5	109—122

† Schober Karl.

Zur Polarentheorie der Kegelschnitte	2	469—478
Über das Kreisbüschel mit imaginären Scheiteln	5	104—108
Über die Construction der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades	7	111—128
Über besondere symmetrische Punktsysteme zweiten Grades und Poncelet'sche Vierecke	9	89—109
Über solche Hyperbelschnitte von Flächen zweiten Grades, deren Projectionen auf eine gegebene Ebene gleichseitig sind	9	233—246

Schwarz A. in Beneschau.

Über eine für alle Kegelschnitte giltige Verallgemeinerung des Satzes, wonach der Peripheriewinkel über dem Halbkreise ein Rechter ist	9	346—357
Über die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie	10	250—288

Schüssler Rudolf in Graz.

Über die Durchdringungscurve von Rotationsflächen zweiter Ordnung mit sich schneidenden Axen	5	241—254

Seipka Edmund in Prag.

Zwei Aufgaben über die Flächen dritten und vierten Grades, welche zum Unterrichte in der darstellenden Geometrie besonders geeignet sind	9	1— 16

Sobotka J. in Brünn.

Über developpable Berührungsflächen an windschiefe Helikoide	4	59— 78

Digitized by Google

	Band	Seite
Construction von hyperosculierenden Kugeln der cubischen Raumcurven	5	349—366
Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung und ihr Zusammenhang mit einigen cyklometrischen Aufgaben	7	347—369
Zur Perspective des Kreises	10	289—302

Spath Friedrich in Linz.

Lineale Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen	1	237—246
Die Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung unveränderlicher Systeme mit besonderer Berücksichtigung der Beschleunigung zweiter Ordnung	2	433—450

† Stefan Josef.

Über die Theorie der Eisbildung	1	1— 6

Steinitz Ernst in Berlin.

Über die Unmöglichkeit, gewisse Configurationen n_3 in einem Zuge zu durchlaufen	8	293—296

Stiner Gottlieb in Frauenfeld.

Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt	4	99—114
Zur Construction der Steiner'schen Hypocykloide	6	372—374

Stolz Otto in Innsbruck.

Zur Theorie der Raumcurven	1	433—442
Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührungswinkel als Systeme von absoluten Größen	5	233—240
Über den von Herrn G. Peano aufgestellten Begriff des bestimmten Integrals	7	291—295
Bemerkung zum Aufsatze: „Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührungswinkel als Systeme von absoluten Größen“	7	296
Über den von Herrn G. Peano aufgestellten Begriff des bestimmten Integrals	8	95— 96
Über die Umformung eines uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral	9	316—330

Studnička Franz in Prag.

Beiträge zur Determinanten-Theorie	10	1— 17
Beitrag zur Theorie der cyklischen Determinanten	10	193—197
Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten	10	338—342

Study E. in Marburg (Hessen).

Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen	1	282—354
Recurrierende Reihen und bilineare Formen	2	23— 54

Sucharda Anton in Prag.

Über die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkte	8	297—329

v. Szüts Nicolaus in Budapest.

Über die Bildung der Resultante und des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzer rationaler Functionen einer Variablen	9	34— 42

Tauber Alfred in Wien.

Über den Zusammenhang des reellen und imaginären Theiles einer Potenzreihe	2	79—118
Über die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels	5	137—150

Digitized by Google

	Band	Seite
Über das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral	6	109—120
Über die Newton'sche Näherungsmethode	6	291—302
Über das specielle Zweitheilungsproblem der hyperelliptischen Functionen	7	97—110
Über das Potential einer Doppelbelegung	8	79— 86
Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen	8	273—277
Über die Weierstrass'sche Function	8	330—340
Über einige Sätze der Potentialtheorie	9	74— 88
Teixeira Gomes in Coimbra.		
Extension d'un théorème de Jacobi	1	481—484
Valyi Julius in Klausenburg.		
Über das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes	4	121—134
Über die polarreciproken Tetraëder	6	220—222
Über die Gruppen von mehrfach perspectiven Dreiecken in der Ebene	9	169—176
Vierkandt Alfred in Braunschweig.		
Über gleitende und rollende Bewegung	3	31— 54
Über gleitende und rollende Bewegung (Schluss)	3	98—134
Vivanti G. in Mantua.		
Über Potenzreihen zweier Veränderlichen	5	99—103
Über gewisse der Ikosaëderirrationalität analoge Irrationalitäten	6	393—404
Über die Ikosaëderirrationalität	7	69— 72
de Vries Jan in Delft.		
Zur Theorie der Involutionen	3	285—292
Über mehrstufige Involutionen in der complexen Ebene	5	1— 16
Über die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in einer festen Ebene	8	138—144
Wälsch Emil in Brünn.		
Ein Satz über die Resultante algebraischer Gleichungen und seine geometrische Anwendung	2	421—428
Über eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie	3	92— 96
Über binäre Formen und die Correlationen mehrdimensionaler Räume	6	261—284
Über binäre Formen und die Correlationen etc. (Schluss)	6	375—389
Über eine geometrische Behandlungsweise der Elemente der Determinantentheorie	9	207—214
Walter Alois in Graz.		
Über die Momentanaxe	5	33— 52
Über das Doppler'sche Princip	5	151—162
Ein Beweis für den Satz von Coriolis	5	313—320
Über einen Satz von Chasles und über dessen Zusammenhang mit der Theorie der Momentanaxe	8	341—353
Wassmuth Anton in Graz.		
Über die Änderung der specifischen Wärme mit der Temperatur	1	473—480
Über lineare Stromverzweigungen	7	49— 68
Weiss Wilhelm in Prag.		
Zum Nöther'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebraischen Functionen	7	321—324
Über die Curven, welche eine algebraische Curve an mehreren Stellen in höherer Ordnung berühren	7	370—376
Wendt Cäcilie in Wien.		
Note über die Kreisfunctionen	10	97—100

Digitized by Google

	Band	Seite
Weyr Eduard in Prag.		
Zur Theorie der bilinearen Formen	1	163—236
Zur Theorie der Flächen, welche eine Schaar von Kegelschnitten enthalten	2	351—412
Notiz, die Serret'schen Formeln betreffend	5	346—348
† Weyr Emil.		
Über die Anzahl der n-fachen Elemente J_{n-1}^{n} auf einem Träger vom Geschlechte Eins	2	458
Über Fünfecke, welche einer C_3 gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind	4	120
Über Vierecke, welche einer C_3 gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind	4	154
Wilhelm Franz in Pilsen.		
Über den Ort der Achsen jener gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide, welche zwei gegebene windschiefe Gerade enthalten	2	345—350
Wirtinger Wilhelm in Innsbruck.		
Bemerkung über ganzzahlige irreductible Gleichungen	1	47— 48
Über eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variablen	1	113—128
Bemerkung über die elliptischen Modulfunctionen	1	429—432
Zur Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3	2	55— 60
Über eine Eigenschaft der Wendetangenten der Curven dritter Ordnung	4	395—397
Über die Rectification algebraischer Curven, insbesondere derjenigen dritter Ordnung bei projectiver Maßbestimmung	5	92— 96
Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen (1. Abhandlung)	6	69— 98
Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen (2. Abhandlung)	7	1— 25
Wulf Theodor in Innsbruck.		
Die Grenzwerte $\lim_{n=+\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$ und $\lim_{n=+\infty}(\sqrt[n]{a}-1)n$ als Grundlage für die Theorie der reellen Potenzen und des reellen Logarithmus	8	43— 53
Zahradníček Karl in Teschen.		
Zur Theorie der adiabatischen und isothermischen Compression eines Gases	4	167—172
Zindler Konrad in Wien.		
Die Büschel linearer Complexe	3	135—141
Über getrennte gemeinsame Convergenzgebiete zweier Potenzreihen zweier Veränderlichen	5	115—119
Bemerkung über Potenzreihen zweier Veränderlichen	5	287—288
Zsigmondy Karl in Wien.		
Zur Theorie der Potenzreste	3	265—284
Notiz über einige Kriterien für gewisse in bestimmten linearen Formen enthaltene Primzahlen	4	79— 80
Über einige allgemein giltige, additiv gebildete Kriterien für Primzahlen	5	123—128
Beiträge zur Theorie Abel'scher Gruppen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie	7	185—289
Über wurzellose Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodul	8	1— 42
Zuchristian Johann in Wien.		
Ein Satz von de Morgan-Sylvester über die Zerlegung der ganzen Zahlen	4	185—189

Digitized by Google

Digitized by Google

X. Jahrgang 1899. *1. Vierteljahr.*

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JAN 30 1899
CAMBRIDGE, MASS.

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR CULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. G. v. ESCHERICH und Prof. L. GEGENBAUER

IN WIEN.

WIEN, 1899.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Digitized by Google

Bezugspreis: Jährlich 7 fl.

INHALT.

Studnička, F. J., Dr., Prof., Beiträge zur Determinanten-Theorie 1
Kantor, S., Neue Äquivalenztheorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene 17
— — Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren 54
Klingatsch, A., Eine Abbildung der Kugel auf den Rotationskegel 75
Klug, L., Die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n-dimensionalen Raum 84
Dintzl, Erwin, Über den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes 88

Literatur-Berichte.

Pfaundler, Leop., Dr., Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie 1
Rudio, Ferdinand, Dr., Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses 2
Krüger, L., Dr., Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen . 3
Helmert, F. R, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels 4
Walter, Alois, Dr., Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. . . . 4
Schubert, Hermann, Dr. Vierstellige Tafeln mit Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen 5
Graf, J. H., Dr. phil., Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen 6
Cappelli, Alfredo, Prof., Lezioni die algebra complementare 6
Föppl, Aug., Dr., Vorlesungen über technische Mechanik 7
Routh, Edward John, Die Dynamik der Systeme starrer Körper 8
Günther, Ludwig, Keplers Traum vom Mond 9
Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung 10
Löwy, Alfred, Dr., Über bilineare Formen mit conjugiert-imaginären Variablen 11
Heydenreich, Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln 11
Vivanti, Giulio, Prof, Corso di calcolo infinitesimale 12
Cantor, Moritz, Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens 13
André, Ch., Dir., Traité d'astronomie stellaire 13
Simon, Max, Dr., Analytische Geometrie des Raumes 14
Geissler, Curt, Mathematische Geographie 14

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JAN 30 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Beiträge zur Determinanten-Theorie

Von Prof. Dr. F. J. Studnička in Prag.

In meinen in diesem Sommersemester abgehaltenen Vorlesungen über Determinanten habe ich einige Neuerungen eingeführt, welche eine allgemeinere Aufmerksamkeit zu verdienen scheinen, da sie sowohl betreffs der Form als auch des Inhaltes eine Vervollkommnung der Sylvester'schen „Algebra upon Algebra" involvieren, und vielleicht eine einheitlichere Darstellung dieser modernen Theorie anzubahnen imstande wären.

Überblickt man nämlich die bisherige Literatur, welche dieser kaum hundert Jahre alte Zweig[1]) des mathematischen Wissens aufweist, so gelangt man sofort zur Überzeugung, dass hier vor Allem Einheitlichkeit der Darstellung und Abrundung des Inhaltes anzustreben sei, soll diese Theorie auf dieselbe Höhe der Vollkommenheit gehoben werden, auf welcher sich viele der älteren exacten Wissenszweige befinden.

Indem ich nun zuerst die oberwähnten formellen und dann die inhaltlichen Neuerungen den Fachcollegen zur Berücksichtigung empfehle, glaube ich hoffen zu dürfen, dass hiedurch, wenn nichts Anderes, so doch eine Anregung zu weiteren Bestrebungen gegeben wird, um auf diesem dankbaren Gebiete neue Fortschritte zu ermöglichen.

§ 1.

Was die bisherige Determinantenbezeichnung betrifft, so weisen wir darauf hin, dass hiebei sowohl die allgemeine Darstellung der Elemente als der Matrix zur Berücksichtigung kam, wobei die jeweiligen Bedürfnisse ihren zweckentsprechenden Ausdruck fanden. Am häufigsten benützt man zwar im ersten Falle verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Zeigern oder gleiche Buchstaben mit Doppelzeigern, sodass in diesem Falle der betreffende Buchstabe bloß als Träger der Zeiger fungiert; es ist jedoch schon von Leibnitz in seinem bekannten Brief an l'Hospital mit Recht darauf hingewiesen worden, dass die Zeiger allein hinreichen, um die Stellung der zu bezeichnenden Elemente

[1]) Siehe Studnička „Augustin Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie". Abh d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1876.

Digitized by Google

im System der gegebenen Bedingungen zu markieren. Darnach wähle ich zur Bezeichnung der Elemente zwei übereinander gestellte Zeiger, wo nur ein System in Betracht kommt, und ihre Träger nur dann, wenn zwei oder mehrere Systeme gleichzeitig behandelt werden sollen.

Diese Stellung der Zeiger, wo die obere Angabe die Zeile, die untere hingegen die Kolonne betrifft, in welcher das Element steht, hat den großen Vorzug der Übersichtlichkeit, zumal bei zusammengesetzten Zeigern, wie dies z. B. die Schreibweise

$$a_{n-k-1,\,n-k-2} \text{ und } e_{\substack{n-k-1\\n-k-2}} \text{ oder } \begin{matrix} n-k-1\\ n-k-2 \end{matrix}$$

ersichtlich macht; der Träger e deutet auf das Wort Elemente hin.

Um nun ein System von Elementen kurz darzustellen, schreibt man entweder

$$\left\| e_{r\,s} \right\|_{r=1\,s=1}^{m\quad m} \text{ oder } \left\| \begin{matrix} r\\ s \end{matrix} \right\|_{r=1\,s=1}^{m\quad n},$$

sodass sich diese Matrix in eine Determinante n-ten Grades verwandelt, sobald

$$m = n$$

gesetzt wird, die noch kürzer mit Δ_n sich bezeichnen lässt, so dass man hat

$$\Delta_n \equiv \left\| e_{r\,s} \right\|_{r=1\,s=1}^{n\quad n} \text{ oder } \Delta_n \equiv \left\| \begin{matrix} r\\ s \end{matrix} \right\|_{r=1\,s=1}^{n\quad n}. \tag{1}$$

Wollte man hingegen das Diagonalsymbol von Cauchy oder Binet zur Anwendung bringen, so hätte man zu schreiben

$$\Delta_n \equiv \Sigma \pm \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix} \equiv \sum \pm \begin{pmatrix} 1.2.3 & \cdots & n \\ 1\ 2\ 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

oder im letztgenannten Falle

$$\Delta_n \equiv \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 & \cdots & n \\ 1\cdot 2\cdot 3 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ebenso ist bei der Wahl des quadratischen Schemas zu schreiben

$$\Delta_n \equiv \begin{vmatrix} e_1 \cdots e_1 \\ 1 \qquad n \\ \vdots \\ e_n \cdots e_n \\ 1 \qquad n \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 \qquad 1 \\ 1 \cdots n \\ \vdots \\ n \qquad n \\ 1 \cdots n \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

oder falls noch ein zweites System Δ'_n in Betracht kommen sollte, daneben bloß

$$\Delta'_n \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{1\,1} \dots \varepsilon_{1\,n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n\,1} \dots \varepsilon_{n\,n} \end{vmatrix}.$$

Bei der Darstellung der Determinante als algebraische Summe von Producten, wo der erste Factor eine Subdeterminante k-ten Grades, der zweite hingegen ihre Ergänzung als complementäre Determinante ausdrückt, benütze man für den letztern die Bezeichnung C mit Anführung des vorangehenden Factors, oder gar nur mit der Beifügung des bekannten Symbols der Wiederholung $_n$ (ditto), so dass man darnach schreibt

$$\Delta_n \equiv {}^1_1.C_n - {}^1_2.C_n + {}^1_3.C_n - \dots \pm {}^1_n.C_n,$$

oder wenn nach den Elementen der ersten Colonne zerlegt wird,

$$\Delta_n \equiv {}^1_1.C_n - {}^2_1.C_n + {}^3_1.C_n - \dots \pm {}^n_1.C_n,$$

will man nicht ausführlicher sich ausdrücken, indem man setzt im ersten Falle

$$\Delta_n \equiv {}^1_1.C^1_1 - {}^1_2.C^1_2 + {}^1_3.C^1_3 - \dots \pm {}^1_n.C^1_n$$

oder im zweiten Falle

$$\Delta_n \equiv {}^1_1.C^1_1 - {}^2_1.C^2_1 + {}^3_1.C^3_1 - \dots \pm {}^n_1.C^n_1.$$

Als nächstes Beispiel führen wir an

$$\Delta_n = \binom{1\ 2}{1\cdot 2}.C_n - \binom{1\ 3}{1\cdot 2}C_n + \binom{1\ 4}{1\cdot 2}.C_n - \dots \pm \binom{1\ n}{1\cdot 2}.C_n + \dots + \binom{n-1\ n}{1\ \cdot 2}.C_n,$$

was in kürzerer Fassung durch

$$\Delta_n = \sum \pm \binom{k\ e}{1\cdot 2}.C_n$$

ausgedrückt erscheint, oder in ausführlicherer Schreibweise

$$\Delta_n \equiv \binom{1\ 2}{1\cdot 2}.C\binom{1\ 2}{1\cdot 2} - \binom{1\ 3}{1\cdot 2}.C\binom{1\ 3}{1\cdot 2} + \dots \pm \binom{1\ n}{1\cdot 2}.C\binom{1\ n}{1\cdot 2} + \binom{2\ 3}{1\cdot 2}.C\binom{2\ 3}{1\cdot 2} - \dots \mp \binom{2\ n}{1\cdot 2}.C\binom{2\ n}{1\cdot 2} + \binom{n-1\ n}{1\ \cdot 2}.C\binom{n-1\ n}{1\ \cdot 2}.$$

Digitized by Google

Und allgemein hätte man darnach

$$\Delta_n \equiv \sum \pm \binom{1\ 2\ 3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdots \binom{k}{k} . C_n ,$$

wenn dem ersten Factor die entsprechende combinatorische Bedeutung ertheilt wird, so dass darnach z. B. erhalten wird

$$\Delta_5 \equiv \frac{1\ 2\ 3}{1\cdot 2\cdot 3} . C_n - \frac{1\ 2\ 4}{1\ 2\ 4} . C_n + \frac{1\ 2\ 5}{1\cdot 2\cdot 5} . C_n - \ldots_n + \frac{1\ 4\ 5}{1\cdot 4\cdot 5} . C_n$$
$$- \frac{2\ 3\ 4}{2\cdot 3\cdot 4} . C_n + \frac{2\ 3\ 5}{2\cdot 3\cdot 5} . C_n - \frac{2\ 4\ 5}{2\cdot 5\cdot 5} . C_n$$
$$+ \frac{3\ 4\ 5}{3\cdot 4\cdot 5} . C_n ,$$

indem das betreffende Zeichen der einzelnen Summanden sich nach bekannter Regel leicht bestimmen lässt.

§ 2.

Eine weitere Änderung betrifft die sogenannten beigeordneten oder adjungierten Determinanten, welche mit dem allgemeinen Symbol A bezeichnet werden, wobei ein unterer Zeiger ihre Classe, ein oberer hingegen ihre Ordnung andeutet, sodass darnach das Symbol

$$A_h^k (\Delta_n)$$

eine adjungierte Determinante h-ter Classe und k-ter Ordnung, zu dem System Δ_n gehörig, bezeichnet.

Die Determinante n ten Grades enthält nämlich

n_1^2 Subdeterminanten 1. Classe,
n_2^2 " 2. "
n_3^2 " 3. "
.....
n_k^2 " k. "

welche durch Combinationen der Elemente zur jeweiligen Classe sich bilden lassen.

Darnach erhalten wir, von der Ordnung vorläufig abgesehen, die adjungierten Determinanten

$$A_1 (\Delta_n),\ A_2 (\Delta_n),\ A_3 (\Delta_n),\ \ldots,\ A_k (\Delta_n),\ \ldots,\ A_n (\Delta_n),$$

wobei natürlich unserer Definition gemäß

$$A_1 (\Delta_n) = \Delta_n \text{ und } A_n (\Delta_n) = \Delta_n$$

bedeutet, da im ersten Falle die Combination der Elemente zur ersten Classe keine Änderuug hervorbringt, im letzten Falle hin-

Digitized by Google

gegen eine einzige Combination n-ter Classe auftritt, welche dieselbe Determinante vorstellt.

Daneben ist aber die adjungierte Determinante

zweiter Classe $A_2(\Delta_n)$ vom Grade n_2 und Dimension $n.(n-1)_1$
dritter „ $A_3(\Delta_n)$ „ „ n_3 „ „ $n.(n-1)_2$
.....
k-ter „ $A_k(\Delta_n)$ „ „ n_k „ „ $n(n-1)_{k-1}$
.....
$(n-1)$-ter „ $A_{n-1}(\Delta_n)$ „ „ n_1 „ „ $n(n-1)_1$

Der Wert einer solchen adjungierten Determinante k-ter Classe ist durch

$$A_k(\Delta_n) = \Delta_n^{(n-1)_{k-1}} \tag{4}$$

gegeben, wie durch Induction leicht zu finden ist, so dass z. B.

$$A_2(\Delta_5) = \Delta_5^4,$$
$$A_3(\Delta_5) = \Delta_5^6,$$
$$A_4(\Delta_5) = \Delta_5^4,$$

wie auch das beifolgende concrete Beispiel zeigt, wo die Auswertung Schritt für Schritt zu verfolgen ist, wenn man die bekannte Transformationsformel[1]) wiederholt anwendet.

Ist z. B. gegeben

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & 1, & 0 \\ 1, & 4, & 6, & 4, & 1 \\ 1, & 5, & 10, & 10, & 2 \end{vmatrix} =$$

so erhält man, da hiebei

$$n_2 = 5_2 = 10$$

bedeutet, als beigeordnete Determinante zweiter Klasse

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 3, & 1, & 0, & 3, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 6, & 4, & 1, & 6, & 4, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 4, & 10, & 10, & 2, & 10, & 10, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 3, & 2, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 2, & 5, & 4, & 1, & 8, & 8, & 2, & 4, & 1, & 0 \\ 3, & 9, & 10, & 2, & 15, & 20, & 4, & 10, & 2, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & 1, & 6, & 8, & 3, & 6, & 3, & 1 \\ 2, & 7, & 9, & 2, & 15, & 25, & 6, & 20, & 6, & 2 \\ 1, & 4, & 6, & 1, & 10, & 20, & 3, & 20, & 2, & -2 \end{vmatrix},$$

[1]) Siehe Studnička, „Über eine neue Determinanten-Transformation“. Sitzb. d. k. böhm. Ges. d. Wiss, 1879.

Digitized by Google

also wenn ihr Grad um eine Einheit herabgesetzt wird,

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 4, & 1, & 3, & 4, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & 10, & 2, & 6, & 10, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & 2, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 4, & 1, & 6, & 8, & 2, & 4, & 1, & 0 \\ 6, & 10, & 2, & 12, & 20, & 4, & 10, & 2, & 0 \\ 2, & 3, & 1, & 5, & 8, & 3, & 6, & 3, & 1 \\ 5, & 9, & 2, & 13, & 25, & 6, & 20, & 6, & 2 \\ 3, & 6, & 1, & 9, & 20, & 3, & 20, & 2, & -2 \end{vmatrix},$$

und wenn dies wiederholt wird

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 4, & 2, & 0, & 4, & 2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 3, & 5, & 2, & 4, & 1, & 0 \\ 4, & 2, & 6, & 14, & 4, & 10, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 3, & 6, & 3, & 6, & 3, & 1 \\ 4, & 2, & 8, & 20, & 6, & 20, & 6, & 2 \\ 3, & 1, & 6, & 17, & 3, & 20, & 2, & -2 \end{vmatrix},$$

sodann nach Hervorhebung des gemeinschaftlichen Factors

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & -2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 4, & 1, & 4, & 1, & 0 \\ 1, & 6, & 10, & 0, & 10, & 2, & 0 \\ 0, & 3, & 5, & 2, & 6, & 3, & 1 \\ 1, & 8, & 16, & 2, & 20, & 6, & 2 \\ 1, & 6, & 14, & 0, & 20, & 2, & -2 \end{vmatrix} . -2,$$

worauf dann folgt

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 4, & 1, & 4, & 1, & 0 \\ 6, & 10, & 2, & 10, & 2, & 0 \\ 3, & 5, & 2, & 6, & 3, & 1 \\ 8, & 16, & 4, & 20, & 6, & 2 \\ 6, & 14, & 2, & 20, & 2, & -2 \end{vmatrix} . -2,$$

oder wenn die gemeinschaftlichen Factoren 2, 2, 2 herausgehoben werden,

Digitized by Google

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 4, & 1, & 4, & 1, & 0 \\ 3, & 5, & 1, & 5, & 1, & 0 \\ 3, & 5, & 2, & 6, & 3, & 1 \\ 4, & 8, & 2, & 10, & 3, & 1 \\ 3, & 7, & 1, & 10, & 1, & -1 \end{vmatrix} \cdot -16,$$

das weitere Herabsetzen des Determinantengrades führt schließlich zu den Ausdrücken

$$A_2(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 2, & 1, & 0 \\ 2, & 2, & 3, & 3, & 1 \\ 4, & 2, & 6, & 3, & 1 \\ 4, & 1, & 7, & 1, & -1 \end{vmatrix} \cdot -16,$$

$$A_2(\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 4, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ -2, & 2, & -1, & 1 \\ -3, & 3, & -3, & -1 \end{vmatrix} \cdot 16 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 1, & 1 \\ 3, & 0, & -1 \end{vmatrix} . 16 = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} . 16 = 2^4,$$

wie nach unserer Formel (4) zu erwarten war.

Gleichzeitig ersieht man aus diesen Beispiele, wie man eine Determinante 10. Grades, die eine algebraische Summe von

$$10! = 3628800$$

Gliedern vorstellt, nach unserem Transformationsverfahren gar bequem anzuwerten im Stande ist.

Die beigeordnete Determinante dritter Classe ist ebenfalls vom zehnten Grade und zwar:

$$A_3(\Delta_5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 4, & 1, & 4, & 1, & 0, & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 6, & 10, & 2, & 10, & 2, & 0, & 10, & 2, & 0, & 0 \\ 3, & 5, & 2, & 6, & 3, & 1, & 6, & 3, & 1, & 0 \\ 8, & 16, & 4, & 20, & 6, & 2, & 20, & 6, & 2, & 0 \\ 6, & 14, & 2, & 20, & 2, & -2, & 20, & 2, & -2, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ 3, & 7, & 2, & 11, & 4, & 2, & 15, & 6, & 4, & 2 \\ 3, & 8, & 1, & 5, & 1, & -2, & 20, & 1, & -4, & -2 \\ 1, & 3, & 0, & 6, & -1, & -3, & 10, & -3, & -9, & -8 \end{vmatrix},$$

deren Auswertung auf dieselbe Weise durch fortschreitendes Herabsetzen des Grades derselben erzielt wird, wobei man schließlich auf den Ausdruck

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 15, & 17, & 17 \\ 3, & 5, & 6 \end{vmatrix} .32 = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} .64 = 2^6$$

zurückkommt, der auch nach unserer Formel (4) zu erwarten war.

Dass schließlich

$$A_4(\Delta_5) = 2^4,$$

braucht nicht weiter erwähnt zu werden.

§. 3.

Bevor wir zur Feststellung der Ordnung einer beigeordneten Determinante übergehen, wollen wir auf elementarem Wege[1]) die bekannten Relationen ableiten, welche zwischen den Subdeterminanten des adjungierten und den zugehörigen complementären Determinanten des ursprünglichen Systems Geltung haben.

Hiebei wollen wir uns der üblichen Symbolik bedienen, um bequemer an bekannte Formeln anknüpfen zu können, und setzen deshalb

$$(5) \qquad \Delta_n \equiv \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, \ldots, n_1 \\ a_2, b_2, c_2, \ldots, n_2 \\ a_3, b_3, c_3, \ldots, n_3 \\ \vdots \\ a_n, b_n, c_n, \ldots, n_n \end{vmatrix} \equiv (a_1, b_2, c_3, \ldots, n_n)$$

voraus, sodass in Folge dessen

$$(6) \quad A_{n-1}(\Delta_n) \equiv \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1, \ldots, N_1 \\ A_2, B_2, C_2, \ldots, N_2 \\ A_3, B_3, C_3, \ldots, N_3 \\ \vdots \\ A_n, B_n, C_n, \ldots, N_n \end{vmatrix} \equiv (A_1, B_2, C_3, \ldots, N_n)$$

und deshalb die fragliche Relation allgemein durch Formel

$$(7) \qquad \Delta_n^{n-k} . (a_1 b_2 c_3 \ldots h_{k-1}) = (I_k J_{k+1} K_{k+2} \ldots N_n)$$

oder in anderer Form

$$\frac{(I_k J_{k+1} K_{k+2} \ldots N_n)}{(a_1 b_2 c_3 \ldots h_{k-1})} = \Delta_n^{n-k},$$

ausgedrückt erscheint, woraus die bekannten Einzelrelationen erhalten werden, wenn wir

[1]) Diese Methode wurde zuerst in den Schriften der südslavischen Akademie der Wissenschaften in Jahre 1887 veröffentlicht. Eine den umgekehrten Weg einschlagende Ableitung derselben Formeln enthält „Časopis pro pěstování math. a fys." I., woher sie S. Günther in sein „Lehrbuch der Determinantentheorie" II. Aufl. übernommen.

Digitized by Google

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

setzen und daher das System von Formeln

$$\Delta_n^{n-1} = (A_1 B_2 C_3 \ldots N_n) \tag{8}$$

$$\Delta_n^{n-2} . a_1 = (B_2 C_3 D_4 \ldots N_n) \tag{9}$$

$$\Delta_n^{n-3} . (a_1 b_2) = (C_3 D_4 E_5 \ldots N_n) \tag{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta . (a_1 b_2 c_3 \ldots h_{n-2}) = (M_{n-1} N_n) \tag{11}$$

ableiten. Hiebei ist zu bemerken, dass diese letzte Relation aus unserer obcitierten Determinanten-Transformation

$$\Delta_n = \frac{1}{(a_1 b_2 c_3 \ldots g_{h-1})^{n-h}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3 \ldots h_h), \ldots & (a_1 b_2 c_3 \ldots i_h), \ldots \\ (a_1 b_2 c_3 \ldots h_{h+1}), \ldots & (a_1 b_2 c_3 \ldots i_{h+1}), \ldots \\ (a_1 b_2 c_3 \ldots h_n), \ldots & (a_1 b_2 c_3 \ldots i_n), \ldots \end{vmatrix} \tag{12}$$

direct sich ergibt, wenn wir darin setzen statt des Zeigers

$$h = n - 1,$$

so dass dessen Träger mit dem Buchstaben m bezeichnet erscheint.

Um nun durch Induction die Formel (7) abzuleiten, gehen wir von einer Determinante fünften Grades aus und schreiben dabei statt der letzten Formel speciell

$$\Delta_5 . (a_1 b_2 c_3) = (D_4 E_5).$$

Daraus folgt nun direct das System von Relationen

$$\begin{aligned} \Delta_5 . (a_1 b_2 a_3) &= 0, \\ \Delta_5 . (a_1 b_2 b_3) &= 0, \\ \Delta_5 . (a_1 b_2 c_3) &= (D_4 E_5), \\ \Delta_5 . (a_1 b_2 d_3) &= (C_4 E_5), \\ \Delta_5 . (a_1 b_2 e_3) &= (C_4 D_5), \end{aligned}$$

oder wenn auf der linken Seite zerlegt wird,

$$\begin{aligned} \Delta_5 [(a_1 b_2) a_3 + (a_2 b_3) a_1 + (a_3 b_1) a_2] &= 0, \\ \Delta_5 [(a_1 b_2) b_3 + (a_2 b_3) b_1 + (a_3 b_1) b_2] &= 0, \\ \Delta_5 [(a_1 b_2) c_3 + (a_2 b_3) c_1 + (a_3 b_1) c_2] &= (D_4 E_5), \\ \Delta_6 [(a_1 b_2) d_3 + (a_2 b_3) d_1 + (a_3 b_1) d_2] &= (C_4 E_5), \\ \Delta_5](a_1 b_2) e_3 + (a_2 b_3) e_1 + (a_3 b_1) e_2] &= (C_4 D_5); \end{aligned}$$

multipliciert man nun beiderseits der Reihe nach mit

Digitized by Google

$$A_3, -B_3, C_3, -D_3, E_3$$

und addiert unter Berücksichtigung der bekannten Zerlegungsformeln, so erhält man schließlich

$$\Delta_5^2 . (a_1\ b_2) = (C_3\ D_4\ E_5). \tag{12}$$

Aus dieser Formel ergibt sich weiter das System

$$\begin{aligned}
\Delta_5^2(a_1\ a_2) &= 0,\\
\Delta_5^2(a_1\ b_2) &= (C_3\ D_4\ E_5),\\
\Delta_5^2(a_1\ c_2) &= (B_3\ D_4\ E_5),\\
\Delta_5^2(a_1\ d_2) &= (B_3\ C_4\ E_5),\\
\Delta_5^2(a_1\ e_2) &= (B_3\ C_4\ D_5);
\end{aligned}$$

multipliciert man, nachdem auf der linken Seite die Determinanten zweiten Grades zerlegt worden sind, der Reihe nach mit

$$-A_2, -B_2, -C_2, D_2, -E_2,$$

und addiert gleichfalls unter Berücksichtigung der bekannten Zerlegungsformeln, so gelangt man sofort zur Formel

$$\Delta_5^3 . a_1 = (B_2\ C_3\ D_4\ E_5). \tag{13}$$

Aus derselben folgt endlich das System

$$\begin{aligned}
\Delta_5^3 . a_1 &= (B_2 C_3 D_4 E_5),\\
\Delta_5^3 . b_1 &= (A_2 C_3 D_4 E_5),\\
\Delta_5^3 . c_1 &= (A_2 B_3 D_4 E_5),\\
\Delta_5^3 . d_1 &= (A_2 B_3 C_4 . E_5),\\
\Delta_5^3 . e_1 &= (A_2 B_3 C_4 D_5),
\end{aligned}$$

so dass wenn beiderseits der Reihe nach mit

$$A_1, -B_1, C_1, -D_1, E_1$$

multipliciert und dann addiert wird, schließlich die Formel

$$\Delta_5^4 = (A_1\ B_2\ C_3\ E_4\ E_5) \tag{14}$$

erhalten wird, wie dies die allgemeine Relation (7) fordert.

Wie leicht einzusehen ist, liefert analoge Ergebnisse die Zugrundelegung einer Determinante sechsten Grades

$$\Delta_6 = (a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5\ f_6),$$

wenn man von der Formel

Digitized by Google

$$\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ d_4) = (E_5\ F_6)$$

ausgeht, die in unserer allgemeinen Determinanten-Transformation enthalten ist und zwar für den Zeigerwert

$$h - 1 = 4$$

und für den vorletzten Trägerbuchstaben e.

Man erhält hieraus zunächst das Formelsystem

$$\begin{aligned}
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ a_4) &= 0,\\
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ b_4) &= 0,\\
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ c_4) &= 0,\\
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ d_4) &= (E_5\ F_6),\\
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ e_4) &= (D_5\ F_6),\\
\Delta_6 . (a_1\ b_2\ c_3\ f_4) &= (D_5\ E_6),
\end{aligned}$$

und daraus nach Zerlegung der Determinanten vierten Grades

$$\Delta_6 . [(a_1\ b_2\ c_3)\ a_4 - (a_2\ b_3\ c_4)\ a_1 + (a_3\ b_4\ c_1)\ a_2 - (a_4\ b_1 c_2)\ a_3] = 0$$

. . . . . .

und schließlich nachdem man die so erhaltenen Relationen der Reihe nach mit

$$-A_4, B_4, -C_4, D_4, -E_4, F_4$$

multipliciert und dann beiderseits addiert hat

$$\Delta_6^2 . (a_1\ b_2\ c_3) = (D_4\ E_5\ F_6).$$

Wie man aus dieser Formel der Reihe nach

$$\begin{aligned}
\Delta_6^3 (a_1 b_2) &= (C_3 D_4 E_5 F_6),\\
\Delta_6^4 . a_1 &= (B_2 C_3 D_4 E_5 F_6),\\
\Delta_6^5 &= (A_1 B_2 C_3 D_4 E_5 F_6)
\end{aligned}$$

erhält, geht aus der Ableitung, die soeben mit der Determinante Δ_5 durchgeführt worden, klar genug hervor, so dass wir aus diesem Verfahren auf die allgemeine Giltigkeit der Formel (7) zu schließen berechtigt sind.

§. 4.

Dies vorausgeschickt, erhalten wir, wenn zu der adjungierten Determinante (6), die wir erster Ordnung nennen, wieder nach derselben Regel die adjungierte Determinante gebildet wird, eine adjungierte Determinante zweiter Ordnung, zu welcher sie nach demselben Vorgange wieder eine adjungierte Determinante dritter Ordnung u. s. f. herstellen lässt, was wir durch oben am Symbol

Digitized by Google

A angebrachte Zeiger kenntlich machen; indem wir hiedurch zunächst erhalten

$$\Delta_{n-1}(\Delta_n),\ A^2_{n-1}(\Delta_n),\ A^3_{n-1}(\Delta_n),\ \ldots,\ A^k_{n-1}(\Delta_n),\ \ldots$$

sehen wir, dass die bisher als adjungierte Determinante speciell gezeichnete Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe auf diese Art zu Grunde belegt wird, wobei der Grad aller derselbe bleibt, nämlich n.

Auf dieselbe Weise erhalten wir jedoch auch die Reihe

$$\begin{aligned}
&A_2(\Delta_n),\ A^2_2(\Delta_n),\ A^3_2(\Delta_n),\ \ldots,\ A^k_2(\Delta_n),\ \ldots\\
&A_3(\Delta_n),\ A^2_3(\Delta_n),\ A^3_3(\Delta_n),\ \ldots,\ A^k_3(\Delta_n),\ \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_m(\Delta_n),\ A^2_m(\Delta_n),\ A^3_m(\Delta_n),\ \ldots,\ A^k_m(\Delta_n),\ \ldots
\end{aligned}$$

Alle diese Determinanten lassen sich durch Potenzen des ursprünglichen Determinantenwertes ausdrücken, wie dies unsere Formeln (4) und (8) ersichtlich machen. Was jedoch die Glieder der einzelnen obangeführten Reihen betrifft, so reproduciert sich abwechselnd die erste und zweite Determinante, wie man dies auch auf folgende Weise leicht ersieht.

Bildet man zu der Determinante

$$\Delta_n = (a_1 b_2 c_3 \ldots n_n)$$

die adjungierte $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe

$$A_{n-1}(\Delta_n) = (Ca_1 . Cb_2 . Cc_3 \ldots Cn_n),$$

so ist ihre adjungierte derselben Classe

$$A^2_{n-1}(\Delta_n) = (C^2a_1 . C^2b_2 . C^2c_3 \ldots C^2n_n),$$

welche als adjungierte zweiter Ordnung bezeichnet wird, wobei ihre Elemente die eben benützte Bezeichnung führen, da man $C(Ca_1) = C^2a_1$ u. s. w. schreiben kann.

Nach Formel (9) gilt aber allgemein

$$\begin{aligned}
C^2 a_1 &= (B_2 C_3 D_4 \cdots N_n) = \Delta_n^{n-2} \cdot a_1\\
C^2 b_1 &= (A_2 C_3 D_4 \cdots N_n) = \Delta_n^{n-2} \cdot b_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C^2 n_1 &= (A_2 B_3 C_4 \cdots M_n) = \Delta_n^{n-2} \cdot n_1,
\end{aligned}$$

sodass also erhalten wird, wenn man das vollständige Schema zugrunde legt,

Digitized by Google

$$A^2_{n-1}(\Delta_n) = \begin{vmatrix} a_1\,\Delta_n^{n-2}, & b_1\,\Delta_n^{n-2}, & c_1\,\Delta_n^{n-2}, & \cdots, & n_1\,\Delta_n^{n-2} \\ a_n\,\Delta_n^{n-2}, & b_2\,\Delta_n^{n-2}, & c_2\,\Delta_n^{n-2}, & \cdots, & n_2\,\Delta_n^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ a_n\,\Delta_n^{n-2}, & b_n\,\Delta_n^{n-2}, & c_n\,\Delta_n^{n-2}, & \cdots, & n_n\,\Delta_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

woraus hervorgeht, sobald der gemeinschaftliche Factor herausgehoben wird, einerseits

$$A^2_{n-1}(\Delta_n) = \Delta_n^{n^2-2n}.(a_1\,b_2\,c_3\cdots n_n),$$

was unsere Behauptung bestätigt, und anderseits

$$A^2_{n-1}(\Delta_n) = \Delta_n^{n^2-2n+1} = \Delta_n^{(n-1)^2}, \tag{15}$$

was der Formel (8) entspricht.

Ebenso wird man erhalten einerseits

$$A^3_{n-1}(\Delta_n) = \Delta_n^{n^3-3n^2+2n}.(Ca_1 \cdot Cb_2 \cdot Cc_3 \cdots Cn_n)$$

und anderseits

$$A^3_{n-1}(\Delta_n) = \Delta_n^{(n-1)^3};$$

und allgemein ergibt sich also, was auch a priori anzugeben war,

$$A^{2k}_{n-1}(\Delta_n) = (a_1\,b_2\,c_3\cdots n_n)\,\Delta_n^{(n-1)^{2k}-1} \tag{16}$$

$$A^{2k+1}_{n-1}(\Delta_n) = (Ca_1\,Cb_2\,Cc_3\cdots Cn_n)\,\Delta_n^{(n-1)^{2k+1}-(n-1)}. \tag{17}$$

Dass man von jeder dieser adjungierten Determinanten ausgehend zu anderen adjungierten beliebiger Classe und Ordnung übergehen und ihren Wert durch die ursprüngliche Determinante ausdrücken kann, ist ebenfalls aus dem Vorangehenden ersichtlich.

So hat man z. B.

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & 1 \\ 1, & 4, & 6, & 6 \end{vmatrix} = 3$$

und erhält demnach für die adjungierte Determinate zweiter Klasse

$$A_2(\Delta_4) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 2, & 3, & 1, & 3, & 1, & 0 \\ 3, & 6, & 6, & 6, & 6, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 3, & 2, & 1 \\ 2, & 5, & 6, & 8, & 12, & 6 \\ 1, & 3, & 5, & 6, & 14, & 12 \end{vmatrix} = 3^3,$$

Digitized by Google

ebenso für die adjungierte Determinante dritter Classe

$$A_3(\Delta_4) = \begin{vmatrix} 10, & 7, & 4, & 1 \\ 12, & 12, & 9, & . \\ 6, & 6, & 6, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3^3,$$

während für die adjungierte Determinante dritter Classe zweiter Ordnung erhalten wird

$$A_2[A_3(\Delta_4)] = \begin{vmatrix} 36, & 42, & 18, & 15, & 9, & 3 \\ 18, & 36, & 24, & 18, & 15, & 6 \\ 3, & 6, & 9, & 3, & 6, & 3 \\ 0, & 18, & 18, & 18, & 18, & 9 \\ 0, & 3, & 9, & 3, & 9, & 6 \\ 0, & 0, & 3, & 0, & 3, & 3 \end{vmatrix} = 3^9,$$

wie nach den vorausgehenden Formeln zu erwarten war.

§ 5.

Schließlich wollen wir noch auf die Eigenthümlichkeit hinweisen, welche die beigeordnete Determinante $(n-1)^{ter}$ Classe bei der fundamentalen Potenzdeterminante

$$(18) \qquad \delta_n = \begin{vmatrix} a^0, & b^0, & c^0, & \ldots, & n^0 \\ a^1, & b^1, & c^1, & \ldots, & n^1 \\ a^2, & b_0, & c^2, & \ldots, & n^2 \\ \vdots & & & & \\ a^{n-1}, & b^{n-1}, & c^{n-1}, & \ldots, & n^{n-1} \end{vmatrix} = (a^0\, b^1\, c^2 \ldots n^{n-1})$$

auszeichnet, indem sie als Product der $(n-2)^{ten}$ Potenz des ursprünglichen Systems (18) mit einer aus Combinationssummen bestehenden Determinante sich darstellen lässt und somit zu einer interessanten Identität führt.

Man erhält zunächst

$$A_{n-1}(\delta_n) = \begin{vmatrix} Ca^0, & Cb^0, & Cc^0, & \ldots, & Cn^0 \\ Ca^1, & Cb^1, & Cc^1, & \ldots, & Cn^1 \\ Ca^2, & Cb^2, & Cc^2, & \ldots, & Cn^2 \\ \vdots & & & & \\ Ca^{n-1}, & Cb^{n-1}, & Cc^{n-1}, & \ldots, & Cn^{n-1} \end{vmatrix},$$

wobei bekanntlich zu gelten hat in Betreff der ersten Kolonne

Digitized by Google

$$\left|\begin{array}{l} Ca^0 = (b^1 c^2 d^3 \ldots n^{n-1}), \\ Ca^1 = (b^0 c^2 d^3 \ldots n^{n-1}), \\ Ca^2 = (b^0 c^1 d^3 \ldots n^{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ca^{n-1} = (b^0 c^1 d^2 \ldots n^{n-1}), \end{array}\right|$$

und analog auch in Betreff der übrigen Kolonnen,

Alle diese Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind Potenzdeterminanten und als solche ausdrückbar durch das bekannte alternierende Product, multipliciert mit einer Combinationsdeterminante nach der allgemeinen Formel [1])

$$(a^0 b^{r_1} c^{r_1+r_2} d^{r_1+r_2+r_3} \ldots n^{r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}})$$
$$= \Pi . (\underbrace{K_{n-1} \ldots K_{n-1}}_{(r_1-1)\text{-mal}} . \underbrace{K_{n-2} \ldots K_{n-2}}_{(r_2-1)\text{-mal}} . K_{n-3} \ldots \underbrace{K_1 \ldots K_1}_{(r_n-1)\text{-mal}}),$$

wenn Π das alternierende Product aus allen Elementen

$$a, b, c, \ldots, n$$

gebildet vorstellt, also zu gelten hat

$$\Pi = (b-a).(c-a).(d-b).(d-a)\ldots(n-m),$$

Bezeichnet man also ein derartiges Product, wo das Element a fehlt, mit $\Pi^{(a)}$, so dass also

$$\Pi^{(a)} = (c-b)\,(d-b)\,(d-0)\ldots(n-m),$$

und ähnlich mit

$$\Pi^{(b)}, \Pi^{(c)}, \Pi^{(d)}, \ldots, \Pi^{(n)}$$

derartige Producte mit den fehlenden Elementen

$$b, c, d, \ldots, n,$$

so erhält man, wenn analog mit

$$K_i^{(a)}, K_i^{(b)}, K_i^{(c)}, \ldots, K_i^{(n)}$$

Summen aller Combinationen i-ter Classe, gebildet aus denselben Elementen, die obenthaltenen ausgenommen, bezeichnet werden,

$$Ca^0 = K_{n-1}^{(a)} . \Pi^{(a)},$$
$$Ca^1 = K_{n-2}^{(a)} . \Pi^{(a)},$$
$$Ca^2 = K_{n-3}^{(a)} . \Pi^{(a)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ca^{n-1} = K_0^{(a)} . \Pi^{(a)},$$

[1]) Siehe Studnička „Beitrag zur Theorie der Potenz- und Combinationsdeterminanten", Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss., 1897 pag. 3, Formel (8).

Digitized by Google

wobei jedoch

$$K_0 = 1$$

zu setzen ist.

Dasselbe gilt von den Formen der übrigen Kolonnen, so dass, wenn die betreffenden Buchstaben eingesetzt werden, endlich erhalten wird

$$A_{n-1}(\delta_n) = \begin{vmatrix} K_0^{(n)}, & K_0^{(m)}, & \ldots, & K_0^{(b)}, & K_0^{(a)} \\ K_1^{(n)}, & K_1^{(m)}, & \ldots, & K_1^{(b)}, & K_1^{(a)} \\ K_2^{(n)}, & K_2^{(m)}, & \ldots, & K_2^{(b)}, & K_2^{(a)} \\ \vdots & & & & \\ K_{n-1}^{(n)}, & K_{n-1}^{(m)}, & \ldots, & K_{n-1}^{(b)}, & K_{n-1}^{(a)} \end{vmatrix} . \Pi^{(a)} . \Pi^{(b)} \ldots \Pi^{(n)}.$$

Werden nun die Producte entwickelt und vereinigt, sowie auf der linken Seite der bekannte Potenzwert eingesetzt, so erhält man einerseits

$$A_{n-1}(\delta_n) = \delta^{n-1},$$

und anderseits

$$\Pi^{(a)} . \Pi^{(b)} \ldots \Pi^{(n)} = \delta^{n-2},$$

sodass nach erfolgter Kürzung sich ergibt

$$\begin{vmatrix} a^0, & b^0, & c^0, & \ldots, & n^0 \\ a^1, & b^1, & c^1, & \ldots, & n^1 \\ a^2, & b^2, & c^2, & \ldots, & n^2 \\ \vdots & & & & \\ a^{n-1}, & b^{n-1}, & c^{n-1}, & \ldots, & n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_0^{(n)}, & K_0^{(m)}, & \ldots, & K_0^{(b)}, & K_0^{(a)} \\ K_1^{(n)}, & K_1^{(m)}, & \ldots, & K_2^{(b)}, & K_1^{(a)} \\ K_2^{(n)}, & K_2^{(m)}, & \ldots, & K_2^{(b)}, & K_2^{(a)} \\ \vdots & & & & \\ K_{n-1}^{(n)}, & K_{n-1}^{(m)}, & \ldots, & K_{n-1}^{(b)}, & K_{n-1}^{(a)} \end{vmatrix},$$

oder in kürzerer Fassung

$$(19) \qquad (a^0 b^1 c^2 \ldots n^{n-1}) = (K_0^{(n)}, K_1^{(m)}, \ldots K_{n-2}^{(b)}, K_{n-1}^{(a)}).$$

Darnach hat man also z. B.

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, & d \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2 \\ a^3, & b^3, & c^3, & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a+b+c, & ab+ac+bc, & abc \\ 1, & a+b+d, & ab+ad+bd, & abd \\ 1, & a+c+d, & ac+ad+cd, & acd \\ 1, & b+c+d, & bc+bd+cd, & bcd \end{vmatrix},$$

was auch sofort durch Auswertung sich verificieren lässt.

Anmerkung.

Dieselbe fundamentale Potenzdeterminante lässt noch folgende Transformation zu:

Digitized by Google

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a, & b, & c, & \ldots, n \\ a^2, & b^2, & c^2, & \ldots, n^2 \\ \vdots & & & \\ a^{n-1}, & b^{n-1}, & c^{n-1}, & \ldots, n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a+p, & b+p, & c+p, & \ldots, (n+p) \\ (a+q)^2, & (b+q)^2, & (c+q)^2, & \ldots, (n+q)^2 \\ & & & \\ (a+s)^{n-1}, & (b+s)^{n-1}, & (c+s)^{n-1}, & \ldots, (n+s)^{n-1} \end{vmatrix},$$

worin als specieller Fall die Identität

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a, & b, & c, & \ldots, n \\ a^2, & b^2, & c^2, & \ldots, n^2 \\ \vdots & & & \\ a^{n-1}, & b^{n-1}, & c^{n-1}, & \ldots, n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ a, & b, & c, & \ldots n \\ a^2, & b^2, & c^2, & \ldots n^2 \\ & & & \\ (a+s)^{n-1}, & (b+s)^{n-1}, & (c+s)^{n-1}, & \ldots (n+s)^{n-1} \end{vmatrix}$$

enthalten ist, woraus sich mehrere zahlentheoretische Sätze ableiten lassen, auf die wir jedoch hier nicht eingehen mögen.

Schließlich wollen wir nur bemerken, dass man auf diesem Wege noch weitere mit Formel (19) correspondierende Relationen ableiten kann. Die so erhaltenen Sätze haben vorläufig die Bedeutung von mathematischen Wahrheiten, für deren praktische Verwendung noch keine Gelegenheit sich bietet; aber dies schmälert nicht ihren theoretischen Wert. „On étudie, en mathématiques, une fonction pour elle-même. Peut-être plus tard un phénomène mieux connu s'exprimera par cette fonction", sagt diesbezüglich ganz zutreffend A. Ribière.

Digitized by Google

Neue Äquivalenztheorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Curven in der Ebene.

Von S. Kantor.

In vorliegender Arbeit entwickele ich eine neue Theorie der Äquivalenz für die genannten Curvensysteme, infolge deren an Stelle der bisherigen unzulänglichen Theoreme, wie sie von Nöther, Bertini, Martinetti, Jung, Segre, Guccia herrühren oder bearbeitet wurden, neue Theoreme und neue Typen gesetzt werden. Die Auffassung, welche diese neue Theorie nöthig macht, ist die folgende: Führt man die hier in § 1 definierten rationalen Gruppen vielfacher Punkte ein, so kann es geschehen, dass zur Auffindung der quadratischen Transformationen von Nöther, Bertini, Martinetti, Guccia etc., welche reducieren sollen, die Auflösung von Gleichungen irgend hohen Grades und allgemeinster Beschaffenheit nothwendig wird. Dadurch werden einmal die Transpositionen, mithin auch die vorgeblichen Typen imaginär, während das gegebene Curvensystem durchaus reell, ja sogar rational bestimmt sein mag, und aber, wenn in den Coefficienten des Curvensystemes auch nicht lineare Parameter vorhanden sind, die dem Systeme eine weitere Variabilität ertheilen, kann die Transposition überhaupt ihren birationalen Charakter dadurch verlieren. In den Anwendungen dieser Curvensysteme auf die Theorie der Curvensysteme im R_3 und R_r treten aber diese rationalen Gruppen irrationaler Punkte ganz von selbst ein und die gegenwärtige Theorie erweist sich als unumgänglich, um Fehler und Auslassungen im R_r zu vermeiden.

Meinen neuen Theoremen, für welche ich zwei wesentlich verschiedene Beweismethoden gebe [1]), kommt nun eben eine algebraische Bedeutung, hinter der auch ihre geometrische Eigenartigkeit zurücktritt, dadurch zu, dass sie der wesentlichen Forderung genügen, die bisher von keiner Seite geltend gemacht wurde, nämlich anzugeben, wie weit sich die Äquivalenz auf rein rationalem Wege erreichen lässt. Die hier angegebenen Typen sind in allen Fällen erreichbar, ohne neue Irrationalitäten in die Curvengleichungen einzuführen. An ihnen hat man erst zu discutieren, welche Irratio-

[1]) Für die elliptischen Curven wird man sogar drei Methoden erkennen.

Digitized by Google

nalitäten die älteren Typen von Nöther, Bertini, Martinetti etc. mit sich führen konnten.

Dass mit meinen neuen Theoremen eigentlich auch ein neuer Beweis für die älteren Theoreme abfällt, ist ein Umstand, dem ich nur insofern eine weitere Bedeutung zugeschrieben haben möchte, als dieser Beweis rein algebraischer Natur ist, also insbesondere von der bisher als unentbehrlich angesehenen Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > n$ (für die drei höchsten Fundamentalpunkte) unabhängig ist [1]).

Unter dem Gesichtspunkte der rationalen Ausführung der Operationen bleibt also den älteren Theoremen nur mehr noch ein zahlentheoretischer Wert. Worin diese Bedeutung bestehe, wie sie zum Ausgangspunkte für die Auffindung und den Ausspruch eigenartiger Resultate in der Zahlentheorie wird gemacht werden können, habe ich zuerst in meiner „Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene" in Cr. J. Bd. CXIV sowie in meinem Buche deutlich erläutert.

§. 1. Rational gegebene Curvensysteme.

In dieser Arbeit wird ein Rationalitätsbereich nicht durch die Coordinaten von Punkten, sondern durch die Coefficienten von Curven constituiert. Sind nun von den Schnittpunkten (A) zweier Curven C, C' eine Anzahl $(A)_1$ rational gegeben, so heiße die Gruppe der übrigen Schnittpunkte $(A)_2$ eine rationale Gruppe 2. Art. Hiebei müssen C, C' nicht in allen Punkten von $(A)_1$ gleiche Vielfachheit besitzen. Construiert man dann durch eine Gruppe $(A)_2$ zwei rational bekannte Curven C, C', welche in allen Punkten von $(A)_2$ — jede für sich — gleiche Vielfachheiten haben, so schneiden sich C, C' in Punkten $(A)_3$, welche wieder eine rationale Gruppe bilden. Aber man kann stets Punkte $(A)_1$ so bestimmen, dass es auch zwei Curven C_1, C_1' gibt, welche durch die $(A)_1$ mit gewissen verschiedenen Vielfachheiten gehen und sich außerdem nur in der Gruppe $(A)_3$ einfach schneiden: $(A)_3$ ist unter dieser Auffassung nur eine Gruppe 2. Art.

[1]) Diese Unabhängigkeit bezieht sich ganz uneingeschränkt auf die in den §§. 2 bis 5 durchgeführten Äquivalenzbeweise. Auch das Büschel kann, wie im §. 6 erwähnt, ohne die Benützung jener Relation auf einen Typus gebracht werden, es handelt sich nur, die Curve $p = o$, $u = o$ (wo u die Dimension ist) unabhängig hievon als Fundamentalcurve in einer birationalen Transformation (nämlich mindestens einer) nachzuweisen. Indessen würde sogar die Benützung der Relation nichts an dem algebraischen Charakter unserer Endtheoreme ändern, da ja in diesen die Discriminierung der einzelnen Punkte nicht mehr vorkommt Jene Relation wäre also in einem solchen Falle nur dazu benützt worden, die Gruppen gleicher Vielfachheiten genauer zu studieren, um ihre Eigenschaften für die Aufstellung rein rationaler Fundamentalsysteme verwenden zu können. Das bezieht sich z. B. auf das II. Capitel der folgenden Arbeit und auf den §. 12 dieser Arbeit, wo eben die zweiten, durchaus strengen Beweismethoden für meine neuen Theoreme durchgeführt sind.

Digitized by Google

Dieses ändert sich aber, wenn man fordert, dass die Punkte $(A)_1$ durchwegs einfache Punkte für C sowie für C' sein sollen. In diesem Falle kommt man auf Gruppen, welche sich nur als Residuen von Gruppen 2. Art darstellen lassen, also als Gruppen 3. Art bezeichnet werden müssen. Indem dann noch die Forderung hinzutritt, dass das Residuum mehr Punkte enthalte als die Ursprungsgruppe, so kann man zu rationalen Gruppen $(A)_q$ der q^{ten} Art gelangen.

Die gegenwärtige Arbeit bezieht sich auf rational gegebene Curvensysteme. Ist ein Curvensystem rational gegeben, so müssen seine Basispunkte aus $\lambda_1, \ldots \lambda_i$ je $\alpha_1, \ldots \alpha_i$-fachen Punkten bestehen, wo die $\lambda_1, \ldots \lambda_i$-Punkte je eine Gruppe bilden, welche rational ist.

Ein rational gegebenes ∞^u Curvensystem muss sich aus rational gegebenen Curven linear zusammensetzen lassen. Die $u+1$ Constituenten können aber auch ihrerseits eine rationale Gruppe bilden. Damit ist gemeint, dass ihre Coefficienten sich aus einem Rationalitätsbereiche in derselben Weise herleiten, wie die rationalen Gruppen aus rationalen Punkten hergeleitet sind. Ein Curvensystem ist also nicht rational gegeben, wenn in seine Basis irrationale Bestandtheile rationaler Gruppen eintreten. Hiernach ist das Büschel von C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten kein rational angebbares System, weil in seine Basis stets irrationale Bestandtheile eintreten, solange nicht die Wurzel einer elliptischen Theilungsgleichung adjungiert wird. Eine begriffliche Abhilfe liegt allerdings in den Kronecker'schen Gattungsbereichen, wonach jeder Punkt, der eine der Lösungen eines elliptischen Theilungsproblemes in geometrischem Gewande ist, als rational prätendiert wird und unsere Begriffe rational, irrational erst ihn als Element zur Vorausetzung haben.

§. 2. Das Büschel rationaler Curven.

Theorem I. Für jedes Büchel von rationalen Curven gibt es solche Transversalcurven, welche jede Curve C_n des Büchels in je zwei variabeln Punkten treffen.

Der numerische Inhalt des Theoremes, dass es nämlich einen Singularitätencomplex $\nu, \beta_1 \ldots \beta_\sigma$ gebe, der mit dem Singularitätencomplexe von C_n die Gleichung

$$F_{\alpha\beta} = n\nu - \sum \alpha\beta = 2$$

befriedige, ist leicht zu beweisen, denn nach dem numerischen Beweise für die Äquivalenz mit einem Gradenbüschel O in der Ebene E' hat man nur in E' eine Curve C_m O^{m-2} anzunehmen und diese nach E zu übertragen.

Digitized by Google

Um über die algebraischen Schwierigkeiten hinüberzukommen, benütze ich die Invariantentheorie und es dürfte diese Anwendung derselben nicht nur zu ihrer Wertschätzung unter den Geometern, sondern auch in ganz eigenthümlicher Weise zur Erschließung neuer Resultate rein algebraischer Natur führen können. Da der Kern der Frage auch in der gegenwärtigen Form eine zahlentheoretische Interpretation zulässt, so hat man hier auch einen Fall von einer gegenseitigen Förderung der Zahlen- und Invariantentheorie, wie sie in den Annalen dieser Disciplinen noch nicht vorkam.

1. Beweis. Es können nämlich auf den Curven C_n des Büschels in der mannigfaltigsten Weise ∞^1 binäre Formen $a_x^{2\pi}$ der Ordnung 2π construiert werden, auf jeder Curve des Büschels eine, von welcher jede eine rational distincte quadratische Covariante besitzt, unter anderen $(aa')^{2\pi-2} a_x a'_x$ und die Gesammtheit dieser quadratischen Covarianten bringt eine Ortscurve zustande, welche jede C_n in einem Punktepaare trifft. Die Formen $a_x^{2\pi}$ können auf den C_n durch Curven C_m ausgeschnitten werden und es kann nicht geschehen, dass für alle solche Curven C_m, wie hoch man auch m nehmen möge, alle $a_x^{2\pi}$ nur identisch verschwindende quadratische Covarianten hätten. Überdies können q simultane Formen $a_x^{2\pi}, \ldots$ genommen und für sie simultane quadratische Covarianten bestimmt werden.

Auch die Gesammtheit der $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\sigma = 3(n-2)$ Nachbarpunkte $a_x^{3(n-2)}$ der Fundamentalpunkte des Büschels kann als Transversale oder Directrixcurve benützt werden oder es kann eine Gerade der Ebene mit jeder C_n geschnitten und die quadratische Ableitung dieser Schnittform kann bestimmt werden. Oder man benütze eine adjungierte Curve C_{n-2} des Curvenbüschels und suche auf jeder C_n zu den $n-2$ Schnittpunkten mit C_{n-2} die Ableitung nach der Schnittpunktgruppe mit einer festen Geraden[1]).

2. Beweis. Auch unabhängig von der Invariantentheorie kann eine C_m der gewünschten Art gefunden werden. Ich habe zum erstenmale in den Act. Math. XIX die „inversen Adjungierten" definiert, das ist eine Reihe von Curvensystemen, von denen jedes folgende das vorhergehende zum adjungierten Systeme hat und deren erstes Glied das gegebene Curvensystem ist. Nun schneidet eine Curve C_{kn+3} mit $(k\alpha_i + 1)$-fachen Punkten in den α_i-fachen

[1]) Unabhängig von dem gegenwärtigen Probleme lassen sich auf Grund der Covarianten Verwandtschaften zwischen den Curven verschiedener eigenthümlicher Curvensysteme in der Ebene definieren, als Basis wird ein Curvenbüschel mit $p=0$ benützt. Irgend eine Curve C_m schneidet die $\infty^1 . C_n$ in ∞^1 Formen, zu denen ∞^1 Covarianten einer bestimmten vorgewählten Art gehören. Diese ∞^1 Covarianten erfüllen eine C_m, welche, wenn C_m in einem linearen Systeme variiert, ein System beschreibt, sodass die Invariantentheorie in die Untersuchung von Verwandtschaften unter Curvensystemen einläuft.

Digitized by Google

der C_n die C_n in $n(kn+3)-\sum\alpha_i(k\alpha_i+1)=2$ Punkten, ist also eine gewünschte Transversalcurve. Ist das Büschel rational gegeben, so ist auch das System der C_{kn+3} rational gegeben.

Corollar. Aus dem 1. Beweise geht hervor, dass die Dimension der Transversalcurve beliebig hoch gemacht werden kann.

Theorem II. Jedes Büschel rationaler Curven in der Ebene lässt sich durch eine birationale Transformation der ganzen Ebene in ein Kegelschnittbüschel übertragen.

1. Beweis. Die Curven C_m sind hyperelliptisch. Die numerische Untersuchung lehrt leicht, dass dieses System stets in rationaler Art, durch bloße Annahme weiterer vielfacher Punkte frei in der Ebene bestimmbare Systeme rationaler Curven der Dimension $u'>1$ enthält. Dieses Verhältnis von p, u bleibt auch bei gegenwärtiger Auffassung bestehen und gilt auch für die obigen C_m. Aus dem Systeme der C_m können also ∞^2 Curven $p=o$ ausgeschieden werden, welche ein homoloidales System bilden. Dieses definiert eine birationale Transformation zwischen den Ebenen E, E', durch welche die C_n, da sie die C_m in Punktepaaren schneiden, in C_2 von C' übertragen werden.

Man kann nicht ohne weiteres schließen, dass die C_m mit den C_{kn+3} aus Theorem I übereinstimmen.

2. Beweis. Die Dimension der C_{kn+3} von vorher ist $3k+q-\sigma$, ihr Geschlecht ist $k+1$. Es ist also k so groß zu nehmen, dass $3k+q>\sigma$, dann aber so, dass wenn durch möglichst hohe vielfache Punkte, welche der C_{kn+3} vorgeschrieben werden, das Geschlecht um $k+1$ reduciert wird, doch die Dimension noch >1 bleibt.

Theorem III. Gibt es für ein Büschel rationaler Curven eine Transversale C_m mit 1-punktigem Schnitt, so gibt es unendlich viele.

Man kann wieder mit Anwendung von Transversalcurven $C_{m'}$ auf jeder Curve C_n des Büschels ein Punktepaar festsetzen und dann auf C_n zu dem durch C_m markierten einzelnen Punkte den vierten harmonischen Punkt bestimmen, dessen Ort, da $C_{m'}$ nicht die C_m als Bestandtheil enthalten muss, eine nun 1-punktige Transversalcurve sein muss.

Theorem IV. Das Büschel rationaler Curven mit 1-punktig schneidenden Transversalcurven ist durch birationale Transformation der ganzen Ebene übertragbar in ein Geradenbüschel.

Ich setze ein Geradenbüschel O von E' in willkürliche projective Beziehung H zum C_m Büschel in E, wähle ferner irgend drei unter den 1-punktigen Transversalen, etwa L_1, L_2, L_3, weise sie dem Punkte O und zwei Geraden g_2, g_3 von E' zu und bestimme

Digitized by Google

dann unter jeder C_n und der nach H entsprechenden Geraden durch O eine Projectivität, in der den Schnittpunkten von C_n mit L_1, L_2, L_3, der Punkt O und die Schnittpunkte mit g_2, g_3 entsprechen.

Die Gesammtheit dieser ∞^1 Projectivitäten erfüllt die gewünschte birationale Transformation. Durch Zusammenfassung von II und IV erhalten wir:

Theorem V. Jedes rational gegebene Büschel rationaler Curven kann durch rational bestimmbare birationale Transformationen der ganzen Ebene entweder: 1. in ein Kegelschnittbüschel mit einem rationalen Quadrupel von Basispunkten oder 2. mit zwei rationalen Punktepaaren oder 3. in ein Geradenbüschel übertragen werden[1]).

§. 3. Das lineare ∞^u-System von rationalen Curven.

Jedes ∞^2-System rationaler Curven (für welches nämlich genau $u = 2$ ist) ist durch birationale Transformation in die ∞^2 Geraden der Ebene übertragbar, da der Rang gleich ist.

Ist nun ein $\infty^{u>2}$-System[2]) rationaler Curven C_n gegeben, so beweise ich, dass stets ein Büschel 1-punktiger Transversalen oder ein Netz zweipunktiger vorhanden ist und zwar rational distinct in folgender Weise.

Durch $u-2$ Punkte der Ebene geht ein ∞^2-System der C_n, welches also homoloidal ist. Ist $u-2=1$ und sind keine weiteren einfachen Basispunkte vorhanden, so entspricht in E eine Fundamentalgerade durch zwei Punkte $A_1 A_2$, welche $(n:2)$-fach sind; und das Strahlbüschel durch einen derselben überträgt sich nach E in 1-punktig schneidende Transversalen, welche durch P_1 nicht gehen. Sind aber $A_1 A_2$ irrational verbunden, so sind die Kegelschnitte durch diese sie 2-punktig schneidende Curven aller Geraden der Ebene und liefern in E' Transversalen. Ist $u-2=2$ ohne weitere einfache Basispunkte oder auch $u-2>3$, so entsteht in E' ein Fundamentalpunkt A, in welchem alle Fundamentalpunkte convergieren, und dieses Strahlbüschel A liefert in E die Transversalen. Ist $u-2=3$ ohne weitere einfachen Fundamentalpunkte, so existiert nur ein Netz von Kegelschnitten in E', das durch die drei höchsten Fundamentalpunkte gehend alle Geraden der Ebene in Punktepaaren schneidet, also in E die Transversalen

[1]) Für den Fall, wo alles rational gegeben ist, erfordert die Giltigkeit des Nöther'schen Theorems, dass $n^2 - \Sigma\alpha^2 = 0$, $3n - \Sigma\alpha = 2$ nicht durch lauter gerade Zahlen gelöst werden können.

[2]) Über den Fall $u = 0$ s. §. 6.

Digitized by Google

liefert. Die Fälle sind, wenn weitere einfachen Fundamentalpunkte vorhanden sind, in der Discussion weiter vorzurücken[1]).

In jedem dieser Fälle erhält man in E ein System von 1- oder 2-punktigen Transversalcurven, welche durch die hinzugenommenen $u-2$ Punkte nicht hindurchgehen und also Transversalen auch für das ganze System bilden. Also bleibt nur noch die Dimension v dieser Transversalen zu bestimmen, von der aber schon ersichtlich ist, dass sie größer als 0 ist.

Ich nehme nun wieder mittelst $u-2$ einfacher Punkte ein homaloidales System heraus. Dann werden diese ∞^2 Curven nach E' in Geraden übertragen, aber die Transversalen, wenn sie 1-punktig sind, in ∞^2 oder ∞^1 Geraden eines Netzes oder Büschels und somit die C_n in die ∞^2 Geraden von E' oder in Curven $C_{u-1}\,a^{u-2}$. Sind die Transversalen 2-punktig, so werden sie in ein System von C_2 übertragen. Wäre dann dieses System im ∞^3-, ∞^4-, ∞^5-System, so gäbe es kein anderes System rationaler Curven, das sie in Punktepaaren schnitte, als nur die Geraden der Ebene, also war $u=2$. Die Dimension der 2-punktigen Transversalen kann also, wenn $u>2$ war, nur 1 oder 2 sein. Ist sie 2, so können sie stets rational in die Geraden der Ebene übertragen werden und hiemit gehen die C_n in ein System von Kegelschnitten über. Ist aber die Dimension 1, so sind Curven zu bestimmen, welche die Kegelschnitte eines Büschels je in einem Punktepaare schneiden; also:

Jedes $\infty^{u>2}$-System von rationalen Curven C_n kann durch birationale Transformation $n.O.$ und eventuell eine quadratische Transformation der ganzen Ebene übertragen werden: 1. in das System aller ∞^5 Kegelschnitte oder 2. aller Kegelschnitte durch 2 irrational verbundene Punkte oder 3. ein System von Curven $C_{u-1}\,a^{u-2}$, oder 4. ein System von Curven, das die C_2 eines Büschels in Punktepaaren trifft.

Der letzte Fall sei zuerst discutiert. Ist ein Basispunkt des Büschels rational, so wird er in ein Geradenbüschel übertragen, die C_n werden $C_{n-1}\,a^{n-2}$ und haben zunächst $p=n-2$, $u=3n-4$, erhalten aber durch weitere $n-2$ Doppelpunkte $p=0$ und $u=5$. Durch eine Transformation von Jonquières der Ordnung $(n-1):2$ oder $u:2$ geht dieses System stets, auch bei unendlicher Annäherung von Doppelpunkten an a rational in ein System von C_2 oder von $C_3\,a^2$ über.

Bilden die 4 Basispunkte ein einziges rationales Quadrupel, so sind, wenn $\nu=u-1$ die Ordnung der Curven, $4\frac{\nu-1}{2}$-fache Punkte vorhanden nebst $(\nu-1):2$ Doppelpunkten. Die Dimension ist $=2$. Bilden die Basispunkte 2 rationale Paare, so ist nur noch

[1]) Dass ∞^2, ∞^3 oder ∞^4 Systeme rationaler Curven, wo alle n, α gerade wären, nicht bestehen können, zeigen die Relationen $\Sigma\,\alpha^2=n^2-1$, $\Sigma\,\alpha^2=n^2-2$, $\Sigma\,\alpha^2=n^2-1$.

Digitized by Google

der Fall möglich, dass zwei $(\mu:2)$-fache und zwei $(\mu-2):2$-fache Punkte vorhanden sind. Dann wird das Geschlecht $(\mu-2):2$, die Dimension $3\mu:2$, daher nach Hinzufügung von $2\mu-2$ Doppelpunkten $u=3$, der Rang also $k=2$ und somit kann ein solches System stets rational in ein System von Kegelschnitten übertragen werden.

Es bleiben noch die Systeme $C_{u-1}\,a^{u-2}$ zu untersuchen. Sind δ einfache Basispunkte in endlicher Entfernung vorhanden, so kann man, wenn δ gerade ist, durch die Transformation der Ordnung $(\delta:2)+1$, welche $a\frac{\delta}{2}$fach und diese δ Punkte als einfache Fundamentalpunkte hat, die Ordnung (es sei $n=u-1$), $n\big((\delta:2)+1\big)-(n-1)\delta:2=n-(\delta:2)$ erreichen, und wenn δ ungerade, durch die Transformation der Ordnung $(\delta+3):2$, welche $a\frac{\delta+1}{2}$-fach und die δ Punkte, sowie einen willkürlichen Punkt als einfache Fundamentalpunkte besitzt, die Ordnung $n\big((\delta+1):2+1\big)-$ $-(n-1)(\delta+1):2-\delta=n-(\delta-1):2$. In jedem Falle aber kann man erst alle in endlicher Entfernung von a gelegenen Punkte entfernen bis etwa auf einen. Für die übrig gebliebenen unendlich nahen Punkte kann es geschehen, dass diese sämmtlichen Punkte etwa rational zu einer Gruppe vereinigt sind, sodass man sie nicht mit dem einen in endlicher Entfernung gelegenen Punkte, wie immer er wäre, vereinigen kann. Somit ist bewiesen das:

Theorem I. Jedes $\infty^{u>1}$-System rationaler Curven C_n kann durch birationale Transformation der ganzen Ebene und deren Ordnung nicht $>n$ ist, übertragen werden 1. in das System aller Kegelschnitte der ganzen Ebene oder 2. in die Kegelschnitte durch 2 irrational verbundene Punkte oder 3. in die $C_n\,a^{n-1}$ ohne weiteren einfachen Punkt oder 4. mit einem weiteren einfachen Punkte in endlicher Entfernung von a oder 5. mit m an a unendlich nahen Punkten oder 6. mit diesen und einem einfachen Punkte in endlicher Entfernung von a.

§. 4. Das ∞^5- bis ∞^9-System elliptischer Curven.

Es ist algebraisch von hohem Interesse, dass sich für $p=1$ die ∞^u-Systeme für größeres u leichter erledigen als für die niederen u, entgegen dem Falle $p=0$. Insbesondere bereitet der Fall $u=1$ unter gegenwärtiger Auffassung Schwierigkeiten, die aber im §. 6 überwunden werden.

Das ∞^u-System enthält für $u>4$ unendlich viele Systeme mit $u=2$ und $p=0$. Ein solches wird erhalten, indem man

Digitized by Google

einen willkürlichen Punkt P der Ebene als Doppelpunkt der Curven C_n des Systemes vorschreibt. Die Curven C_n (P^2) haben $u' = u - 3$, $p = 0$. Werden also noch $u - 5$ einfache Punkte vorgeschrieben, so bleibt $u = 2$, $p = 0$. Dieses System kann in die Geraden von E' übertragen werden. Da die Anzahl der Schnittpunkte der C_n $(P^2 P_1 \ldots P_5)$ mit den übrigen C_n gleich dem Range k ist, so wird die Ordnung der transformierten Curven der C_n gleich k sein. Aus den Relationen $n(n+3):2 - \sum \alpha(\alpha+1):2 = u$, $(n-1)(n-2):2 - \sum \alpha(\alpha-1):2 = 1$ folgt $\sum \alpha^2 = n^2 - u$, also $k = u$. Daher ist bewiesen, dass wir die ∞^5- bis ∞^9-Systeme resp. durch Transformationen der Ordnung n übertragen können in Systeme C_5 bis C_9.

Es ist jetzt zu untersuchen, welches die ∞^u-Systeme von C_u sind und ob diese weiter vereinfacht werden können. Ich discutiere sofort alle Ordnungen von 3 bis u.

Die ∞^9-Systeme: Es gibt nur folgende: 1. C_3 2. C_6 $(A_1^3 A_2^3 A_3^3)$. 3. C_9 $(A_1^6 A_2^3 \ldots A_5^3)$, von denen 2. und 3. in allen Fällen reducierbar sind. Die ∞^8-Systeme: Es gibt nur folgende: 1. $C_3(A_1)$, 2. $C_4(A_1^2 A_2^2)$, 3. $C_5(A_1^3 A_2^2 A_3^2)$, 4. $C_6(A_1^4 A_2^2 A_3^2 A_4^2)$, 5. $C_6(A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4)$, 6. $C_7(A_1^5 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2)$, 7. $C_8(A_1^6 A_2^2 \ldots A_6^2)$, 8. $C_8(A_1^5 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^2)$, 9. $C_8(A_1^4 A_2^4 A_3^4 A_4^2 A_5^2)$. Alle sind zu vereinfachen auf 1. und 2. Die ∞^7-Systeme: Es gibt nur folgende: 1. $C_3(A_1, A_2)$. 2. $C_4(A_1^2 A_2^2 A_3)$, 3. bis 9. die aus ∞^8-Systemen 3. bis 9. entstehenden, 10. $C_7(A_1^4 A_2^3 A_3^3 A_4^2 A_5^2)$, von denen 2. bis 10. reduciert werden können. Die ∞^6-Systeme: Es gibt nur folgende: 1. $C_3(A_1 A_2 A_3)$, 2. $C_4(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4)$, 3. bis 5. die aus den ∞^8-Systeme 3. bis 5. entstehenden, 6. $C_6(A_1^3 A_2^3 A_3^2 A_4^2 A_5^2)$; von diesen sind nur 1., 2., 6., irreductibel. Die ∞^5-Systeme: Es gibt nur folgende: 1. $C_3(A_1 A_2 A_3 A_4)$, 2. $C_4(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 A_5)$, 3. $C_5(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2)$, 4. $C_5(A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4 A_5 A_6)$, von denen nur 4. in jedem Falle reducierbar ist. Hieraus das Theorem:

Theorem. I. Es gibt nur folgende linearen ∞^5 bis ∞^9-Systeme elliptischer Curven, welche nicht durch birationale Transformation der ganzen Ebene auf lineare Systeme von Curven niederer Ordnung reduciert werden können:

1. C_3, 2. $C_3(A_1)$, 3. $C_3(A_1 A_2)$, 4. $C_3(A_1 A_2 A_3)$, 5. $C_3(A_1, A_2, A_3, A_4)$, 6. $C_4(A_1^2 A_2^2)$, 7. $C_4(A_1^2 A_2^2 \overbrace{A_3 A_4})$ 8. $C_4(\overbrace{A_1^2 A_2^2} \overbrace{A_3 A_4 A_5})$, 9. $C_5(\overbrace{A_1^2 \ldots A_5^2})$, 10. $C_6(\overbrace{A_1^3 A_2^3} \overbrace{A_3^2 A_4^2 A_5^2})$.

Digitized by Google

Hierin müssen die Punkte unter — eine rationale Gruppe höherer als der ersten Art bilden, die übrigen können irrational verbunden sein und zwar in verschiedener Weise.

Dadurch entstehen 2 Typen aus $n.3$, 3 Typen aus $n.4$, 5 Typen aus $n.5$, je 2 aus $n.6$ und 7. Es gibt also 7 für ∞^5, 6 für ∞^6, 2 für ∞^7, 3 für ∞^8, 1 für ∞^9.

Theorem II. Kein System elliptischer Curven kann eine Dimension >9 haben.

Die Annahme von einfachen Punkten würde jedenfalls ein ∞^{10}-System ausscheiden und dieses könnte durch die obige Methode in ein ∞^{10}-System C_{10} übertragen werden. Es bleiben also nur die Systeme von C_{10} auf ihre Dimension zu untersuchen. Diese Dimension liefert die Nichtexistenz von ∞^{10}-Systemen von C_{10} $p=1$, also kann u auch nicht >9 sein.

Ein zweiter Beweis besteht darin, dass man ein ∞^9-System ausscheidet, es auf das System von C_3 reduciert und dann zeigt, dass diese in keinem ∞^{10}-System mit $p=1$ enthalten sein können, da die Summe irgend eines Singularitätencomplexes und des Complexes $n=3$ ohne Basispunkte stets $p>1$ hat.

§. 5. Die ∞^7- bis ∞^4-Systeme elliptischer Curven.

Die Verschiedenheit der Methoden, welche ich in den §§. 4, 5, 6, verwende, dürfte keine willkürliche, nach persönlicher Wahl getroffene, sondern eine in der Natur der Sache begründete und darum doppelt interessante sein.

Die ∞^2-Systeme. Seien n die Ordnung, $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ die Vielfachheiten der C_n des Systems. Dann existiert in jedem Falle ein rational distinctes System vom Curven $C_{\lambda n}$, welche in denselben Punkten die Vielfachheiten $\lambda\alpha_1, \ldots \lambda\alpha_\sigma$ haben. Es ist dasjenige lineare System, in welchem alle in je λ C_n zerfallene Curven enthalten sind. Dieses System oder besser sein Singularitätencomplex kann als der mit λ multiplicierte Singularitätencomplex von C_n bezeichnet werden. Über Addition, Subtraction, Multiplication, und Ergänzung von Singularitätencomplexen kann man die Ausführungen in meiner Arbeit Cr. J. Bd. CXIV. vergleichen[1]).

[1]) Das Operieren mit Curvengleichungen, also die Bildung von Systemen, in denen rationale Functionen gegebener Curvensysteme enthalten sind, ist nichts Neues, es ist eine den Mathematikern seit Jahrzehnten geläufige Schlussweise, die sich wesentlich schon in den älteren Arbeiten von Jacobi und Nöther findet und von Kronecker zur Theorie der Modulsysteme ausgebildet ist. Die Operationen mit Singularitätencomplexen kommen erst in meiner oben citierten Arbeit vor. Aber die Operation des Summierens etc. von Schaaren von Punktgruppen auf einer algebraischen Curve, das seit einigen Jahren von italienischen Geometern (wenn auch sehr geistreich) verwendet wird, gehört nicht diesen, sondern unstreitig den Herren Dedekind und Weber an, die es in ihrer Abhandlung in Cr. J. XCII. „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" begründet und erläutert haben.

Digitized by Google

Das System $C_{\lambda n}$ hat $2u' = \lambda^2(n^2 - \sum\alpha^2) + \lambda(3n - \sum\alpha) = k\lambda^2 + (u - p + 1)\lambda$, also für $p = 1$ ist $2u' = u\lambda(\lambda + 1)$. Es ist $2p' = k\lambda^2 - (u - p + 1)\lambda + 2$, also für $p = 1$ ist $2p' = u\lambda(\lambda - 1) + 2$.

Ich wähle $\lambda = 5$, also $p' = 21$, $u' = 30$. Schreibe ich dann den C_{5n} vor, einen willkürlichen Punkt P der Ebene 7-fach zu enthalten, so bleibt $p' = 0$, $u' = 2$ oder die C_{5n} (P^7) bilden ein homaloidales System. Dieses übertrage ich gemäß dem Lemma des § 2 in ein Geradensystem und erhalte in E' als Transponierte der C_n Curven einer Ordnung f, wenn f die Anzahl der Schnittpunkte von C_n mit den C_{5n}. Da $n^2 - \sum\alpha^2 = 2$, so ist $3.5n - \sum\alpha.5\ \alpha = 10$, daher $f = 10$, also:

Theorem I. Jedes ∞^2-System elliptischer Curven C_n lässt sich durch eine birationale Transformation der Ordnung $5n$ in ein System von Curven C_{10} übertragen.

Dieses System ist zu discutieren. Ich lasse f von 3 bis 10 gehen und lasse jene Systeme weg, welche durch Hinzufügung einfacher Punkte zu ∞^5- bis ∞^9-Systemen entstehen. Die Systeme sind:
1. $C_3(A_1, \ldots A_7)$, 2. $C_4(A_1^2\ A_2^2\ A_3 \ldots A_8)$, 3. $C_5(A_2^1 \ldots A_5^2\ A_6 A_7 A_8)$, 4. $C_6(A_1^3\ A_2^2 \ldots A_7^2\ A_8)$, 5. $C_7(A_1^4\ A_2^3\ A_3^2 \ldots A_7^2\ A_8 A_9)$, 6. $C_7(A_1^3\ A_2^3\ A_3^3\ A_4^2 \ldots A_6^2)$, 7. $C_8(A_1^5\ A_2^3\ A_3^2 \ldots A_9^2)$, 8. $C_8(A_1^4\ A_2^4\ A_3^3\ A_4^2 \ldots A_8^2\ A_9)$, 9. $C_8(A_1^4\ A_2^3 \ldots A_5^3\ A_6^2\ A_7^2\ A_8\ A_9)$, 10. $C_8(A_1^3 \ldots A_6^3\ A_7^2\ A_8^2)$, 11. $C_9(A_1^6\ A_2^3\ A_3^3\ A_4^2 \ldots A_9^2\ A_{10})$, 12. $C_9(A_1^5\ A_2^4\ A_3^4\ A_4^2 \ldots A_8^2\ A_9 A_{10})$, 13. $C_9(A_1^5\ A_2^4\ A_3^3\ A_4^3\ A_5^2 \ldots A_9^2)$, 14. $C_9(A_1^5\ A_2^3 \ldots A_6^3\ A_7^2\ A_8^2\ A_9)$, 15. $C_9(A_1^4\ A_2^4\ A_3^4\ A_4^3\ A_5^3\ A_6^2\ A_7^2\ A_8^2\ A_9)$, 16. $C_9(A_1^4\ A_2^4\ A_3^3 \ldots A_7^3 A_8 A_9)$, 17. $C_{10}(A_1^4 \ldots A_5^4\ A_6^3\ A_7^3\ A_8)$, 18. $C_{10}(A_1^5\ A_2^5\ A_3^4\ A_4^4\ A_5^2 \ldots A_8^2\ A_9 A_{10})$, 19. $C_{10}(A_1^5\ A_2^4\ A_3^4\ A_4^4\ A_5^3\ A_6^2 \ldots A_9^2)$, 20. $C_{10}(A_1^5 A_2^4 A_3^4 A_4^3 \ldots A_7^3 A_8^2 A_9)$, 21. $C_{10}(A_1^5\ A_2^5\ A_3^3 \ldots A_6^3\ A_7^2\ A_8^2\ A_9^2)$, 22. $C_{10}(A_1^6\ A_2^3 \ldots A_7^3\ A_8^2\ A_9^2)$, 23. $C_{10}(A_1^6\ A_2^4\ A_3^3 \ldots A_6^3\ A_7^2\ A_8^2\ A_9 A_{10})$, 24. $C_{10}(A_1^7 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^2 \ldots A_9^2)$, 25. $C_{10}(A_1^7\ A_2^4\ A_3^2 \ldots A_{18}^2\ A_{19})$

Die Discussion dieser Systeme liefert nun:

Theorem II. Jedes lineare ∞^2-System elliptischer Curven lässt sich, auch wenn rationale Gruppen höherer als 1. Art unter den Basispunkten sind, durch birationale Transformation der ganzen Ebene übertragen in: 1. $C_3(A_1 \ldots A_7)$, 2. $C_4(A_1^2\ A_2^2\ \overbrace{A_3\ A_4}\ \overbrace{A_5\ A_6}\ \overbrace{A_7\ A_8})$, 3.

Digitized by Google

$C_4\,(\widetilde{A_1^2\,A_2^2}\;\widetilde{A_3\,A_4}\;\widetilde{A_5\,A_6\,A_7\,A_8})$. 4. $C_5\,(\widetilde{A_1^2\ldots A_5^2}\;\widetilde{A_6\,A_7\,A_8})$, 5. C_6 $(\widetilde{A_1^3\,A_2^3}\;\widetilde{A_3^2\,A_4^2\,A_5^2}\;\widetilde{A_6\,A_7}\;\widetilde{A_8\,A_9})$.

Hierin müssen die Punkte unter ⌢ rational verbunden sein; die übrigen Punkte können es sein. Auf diese Art entstehen 15 Typen aus $n.1$, 17 aus $n.2$, 1 aus $n.3$, 2 aus $n.4$.

Die ∞^3-Systeme. Ich beginne wie für $u=2$, setze aber nicht $\lambda=5$, sondern $=3$ und erhalte so ein ∞^{12}-System von Curven C_{3n} des Geschlechtes 10, aus welchem sich durch Vorschreibung eines 5-fachen Punktes ein ∞^3-System von $C_{3n}\,(P^5)$ mit $p=0$, also ein homaloidales System, gewinnen lässt. Übertrage ich mit diesem Systeme die E birational in eine Ebene E', so erhalte ich ein System von Curven C_9 als Transponierte der C_n. Also.:

Theorem III. Jedes lineare ∞^3-System elliptischer C_n lässt sich durch birationale Transposition der Ordnung $3n$ in ein System von Curven von 9. O. übertragen.

Die Systeme werden durch Weglassung einfacher Punkte aus den obigen 25 ∞^2-Systemen gewonnen, sofern jene Aufzählung vollständig ist. Aber es wird jetzt das aus 3. entstehende System reductibel durch Anwendung einer Transformation $(3,\ldots 3)^8$, sodass resultiert:

Theorem IV. Jedes lineare ∞^3-System elliptischer Curven lässt sich, auch wenn rationale Gruppen höherer als 1. Art unter ihren Basispunkten sind, durch birationale Transformation der Ebene übertragen in: 1. $C_3\,(A_1\ldots A_6)$, 2. $C_4\,(A_1^2\,A_2^2\,\widetilde{A_3\,A_4\,A_5\,A_6\,A_7})$, 3. C_4 $\widetilde{A_1^2\,A_2^2}\;\widetilde{A_3\,A_4}\;\widetilde{A_5\,A_6\,A_7})$. 4. $C_6\,(\widetilde{A_1^3\,A_2^3}\;\widetilde{A_3^2\,A_4^2\,A_5^2}\;\widetilde{A_6\,A_7\,A_8})$.

Hierin entstehen 11 Typen aus $n.1$.

Die ∞^4-Systeme. Ich beginne wie für $u=2$, setze aber auch hier $\lambda=3$ und erhalte ein ∞^{24}-System von Curven C_{3n} des Geschlechtes 13. Durch Vorschreibung der Punkte $P_1^5\,P_2^3\,P_3$ gewinne ich hieraus ein linares ∞^2-System mit $p=0$, also ein homaloidales, durch welches E nach E' übertragen werden kann, so dass aus dem System der C_n ein System von Curven C_{12} erhalten wird, da die C_{3n} die C_n in je 12 Punkten schneiden. Bis zur Ordnung 10 können die 25 Systeme von oben benützt werden und es bleiben nur, da jetzt wieder das C_5-System als irreductibel hinzutritt: 1. C_3, 2. C_4, 3. C_5, 4. C_6.

Von den C_{11} und C_{12} mögen nur die vollständigen ∞^4-Systeme gebildet werden, welche keine einfachen Basispunkte haben, da die anderen in ∞^5- bis ∞^9-Systemen enthalten sind: 1. C_{11}

Digitized by Google

(7 4 4 4 2 2 2 2 2), 2. C_{11} (6 4 4 4 3 2 2 2 2 2 2), 3. C_{11} (6 4 4 4 4 3 2 2), 4. C_{11} (6 5 4 4 3 2 2 2 2), 5. C_{11} (6 5 4 3 3 3 3 2), 6. C_{11} (6 5 5 3 3 2 2 2), 7. C_{11} (5 5 5 4 3 2 3 2), von denen alle stets reductibel sind und 1. C_{12} (8 4 4 3 3 3 3 2 2), 2. C_{12} (7 5 5 4 3 3 2), welche, wie die 3 oder 4 ersten Singularitätencomplexe bezeugen, reductibel sind. Hieraus folgt:

Theorem V. Jedes lineare ∞^4-System elliptischer Curven C_n lässt sich durch birationale Transformation der Ordnung $3n$ in ein System von C_{12} und von da stets in eines der folgenden Systeme übertragen:

1. $C_3 (A_1 \ldots A_5)$, 2. $C_4 (A_1^2 A_2^2 \widetilde{A_3 A_4} \widetilde{A_5 A_6})$, 3. $C_6 (A_1^3 A_2^3 \widetilde{A_3^2 A_4^2} \widetilde{A_5^2 A_6 A_7})$.

Aus n.1. enstehen 7, aus n.2.2 Typen.

§. 6. Das Büschel elliptischer Curven.

Ich will hier mit einem neuen Beweise der Äquivalenz des Büschels mit rational gegebenen Basispunkten mit $C_{3s}(9A^s)$ beginnen, der durchaus algebraischer Natur und vollständig unabhängig von dem Theoreme über $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > n$ ist. Das Büschel kann überhaupt im natürlichen Rationalitätsbereiche nicht rational gegeben sein, falls $s > 1$, es treten also die Irrationalitäten der elliptischen Theilungsgleichung in den Gattungsbereich ein, auf den sich die rationalen Constructionen des Theoremes beziehen.

Ein zweiter Beweis für das Büschel wird im §. 12 gegeben. Da aber gegenwärtiger §. 6 in §. 7 verwendet wird, muss hervorgehoben werden, dass er von §§. 4, 5 unabhängig ist.

Theorem I. In jedem linearen ∞^1-Systeme von elliptischen Curven sind 12 Curven eines gegebenen Moduls k, z. B. 12 rationale Curven, 6 harmonische und 4 äquianharmonische Curven enthalten.

Denn die Bestimmung des Moduls gemäß der ursprünglichen Clebschischen Vorschrift, worin er die adjungierten Curven φ_{n-2} benützt, leitet in jedem Falle zu einer algebraischen Gleichung derselben Ordnung und die Erscheinung der 4 dreifachen und 6 doppelten Elemente ist nur eine Folge der Doppelverhältnis-Function.

Theorem II. In einem linearen ∞^1-Systeme von Curven $p = 1$, wo die Anzahl der gemeinsamen Punkte σ ist, sind $\sigma + 3$ Curven mit einem Doppelpunkte außerhalb der Basispunkte enthalten.

Digitized by Google

Für das System haben wir $\sum \alpha_i^2 = n^2$, $\sum \alpha_i = 3n$, wo α_i die Vielfachheiten in den σ Punkten sind, n die Ordnung. Die Hilfscurven K, welche das Nullsystem unter den Punkten der Ebene und ihren Tangenten an die Curven C_n bestimmen und als die Basispunkte ihres Netzes die Doppelpunkte im Büschel liefern, haben die Ordnung $2n-1$, haben $(2\alpha_i - 1)$-fache Punkte in den σ Punkten und dort $(2\alpha_i - 1)$-fache Tangenten. Irgend zwei gehen durch $2(n-1)$ einfache Punkte auf den Geraden, welche ihre Ausgangspunkte O, O' verbindet. Die 2 Curven haben daher $(2n-1)^2 - \sum(2\alpha_i - 1)^2 - 2(n-1) - \sum(\alpha_i - 1) = \sigma + 3$ Punkte gemeinsam, wo σ die Anzahl der Basispunkte ist.

Lemma I. Jede rationale Curve mit $u=0$ über rational gegebenen $\sigma > 2$ Punkten lässt sich ohne Hinzunahme weiterer Punkte birational in einen Punkt verwandeln.

Will man die Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > n$ anwenden, welche auch für $u=0$ noch gilt[1]), so kann eine Succession von quadratischen Transformationen $Q', Q'', \ldots$ gefunden werden, welche auf eine Gerade und dann auf einen Punkt reduciert; also ist $(Q' . Q'' \ldots .)$ die gesuchte Transformation.

Aber man kann auch direct beweisen, dass die Relation $ny - \sum a_i y_i = 0$ durch ein Wertesystem y, y_i befriedigt werden kann, wofür $y^2 - \sum y_i^2 = 1, 3y - \sum y_i = 3$, falls $n^2 - \sum \alpha_i^2 = -1$, $3n - \sum \alpha_i = 1$.

Das Lemma spricht sich auch so aus: Jede Curve (ausgenommen die Gerade durch 2 Punkte mit $p=0, u=0$ ist Fundamentalcurve in einem Fundamentalsysteme, das keine Fundamentalpunkte außerhalb der sie bestimmenden Punkte besitzt.

Lemma II. Sind über σ'' rational gegebenen Punkten σ' Curven gegeben, welche vermöge dieser Punkte $p=0, u=0$ haben und sich zu je zweien nicht schneiden, so ist es möglich, $\sigma'' - \sigma$ weitere Curven zu bestimmen, welche über denselben Punkten $p=0$, $u=o$ haben und weder untereinander noch mit den σ' Curven Schnittpunkte besitzen, also mit den σ' Curven ein Fundamentalsystem bilden, ausgenommen $\sigma'=1, \sigma''=2$ mit der Fundamentalgeraden.

Wähle ich eine der σ' Curven und vervollständige diese zu einem Fundamentalsystem von σ'' Curven und übertrage mit dieser birationalen Transformation G_1 in eine Ebene E', so erhalte ich Curven, von denen eine ein Punkt A_1 ist. Von E übertrage ich

[1]) Es wäre interessant festzustellen, bis zu welchem $u < 0$ sie noch bei $p=0$ oder 1 gilt und dann für die kleineren u zu erforschen, welches die Relationen sind, die an Stelle von $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > n$ gesetzt werden können.

Digitized by Google

in eine Ebene E'' mittelst einer Transposition, welche eine der $\sigma'-1$-Curven als fundamental hat. Dort erscheinen zwei Punkte A_1, A_2 und $\sigma'-2$ Curven. Durch Fortsetzung entsteht endlich in einer Ebene $E^{\sigma'}$ eine Gruppe von σ' Punkten, Transformierten der σ' Curven und $\sigma''-\sigma'$ anderen Punkten, über denen nun, wenn keine Rationalitätseinschränkungen gegeben sind, irgend ein Fundamentalsystem construiert werden kann. Dann ist die Transformation $G_1 . G_2 \ldots G_\varrho, . G$ eine Transformation der gewünschten Art. Der Ausnahmsfall geht aus dem Beweis hervor.

Lemma III. Über 9 Punkten gibt es kein anderes Büschel von Curven $p=1$ als das Büschel von Curven C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten (cf. Acta Math. XIX p. 215).

Es ist eine einfache Folge des Satzes, dass über derselben Zahl σ von Punkten bei gleichem p derjenige Complex das kleinste u hat, welcher die α_i möglichst nahe gleich hat.

Theorem III. Jedes Büschel elliptischer Curven kann, wenn alle Basispunkte als rational verwendet werden, durch birationale Transformation der ganzen Ebene in ein Büschel von C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten verwandelt werden.

Beweis. Unter den $\sigma+3$ Curven mit Doppelpunkt dürfen nur 12 als Curven vom Modul 1 zu zählen sein. Nicht als solche, sondern als Curven mit nicht vorher bestimmtem Doppelverhältnisse werden die Curven zu nehmen sein, welche in eine Fundamentalcurve $p=0, u=0$ und eine Curve $p=1, u=0$ zerfallen. Eine Discussion beweist, dass nur dann, wenn überdies die beiden Bestandtheile sich in keinem freien Punkte schneiden, das p der Gesammtcurve gleich 1 und auch u gleich 1 wird. Es müssen also $\sigma+3-12=\sigma-9$ solche zerfallene C_n vorhanden sein, welche auf $\sigma-9$ von einander und von 1 verschiedene Module entfallen werden.

Hieraus folgt, dass $\sigma-9$ Fundamentalcurven im Büschel vorhanden sein müssen. Da sie eben so vielen C_n als Bestandtheilen angehören, dürfen sie sich gegenseitig nicht schneiden. Wir sind so im Falle des Lemma II, wo $\sigma'=\sigma-9$ ist. σ'' kann $\leqq\sigma$ sein. Wird dann die birationale Transformation des Lemma II construiert und mit ihr übertragen, so entsteht ein Büschel von Curven, wo die $\sigma-\sigma''$ unberührten Punkte wieder in Punkte übergegangen sind, und überdies $\sigma''-(\sigma-9)$ Punkte entstanden sind aus Fundamentalcurven, welche 1-punktige Transversalen der C_n waren. Für die übrigen $\sigma-9$ Fundamentalcurven sahen wir, dass der ergänzende Bestandtheil ($p=1$) die Fundamentalcurve nicht schneiden durfte, also gehören diese dem Curvenbüschel in E'' nicht als Basis an, so dass nur 9 Punkte bleiben. Das Büschel C_n ist also in ein Büschel über 9 Punkten verwandelt. Lemma III liefert hierauf das Theorem.

Digitized by Google

Lemma IV. Jede rationale Curve mit $u=0$ kann in allen Fällen birational entweder in einen Punkt oder eine Gerade oder einen Kegelschnitt[1]) verwandelt werden.

Ein Beweis wird im II. Cap. der hier folgenden Arbeit skizziert werden.

Ein anderer, directer Beweis wird gefunden, indem man unter den Curvensystemen, welche geringere Ordnung als die C_n haben und welche die Punktgruppen gleicher Vielfachheit ihrerseits als Punktgruppen gleicher Vielfachheit haben, solche sucht, welche ein homaloidales System enthalten. Es wird stets ein solches geben.

Das Lemma kann auch so ausgesprochen werden: Jede Curve $p=0$, $u=0$ kann als Fundamentalcurve in einer Transformation angesehen werden, welche entweder keinen weiteren oder nur einen weiteren einfachen oder doppelten Fundamentalpunkt besitzt.

In dieser Form ist das Lemma unschwer direct zu beweisen und ich kann es sogar noch präcisieren: Jede Curve $C_n p=0, u=0$ kann als eine Fundamentalcurve höchster Ordnung in einer Transformation angesehen werden, welche dieselben Fundamentalpunkte besitzt, ausgenommen, wo die C_n drei höchste Fundamentalpunkte hat, oder wenn sie sechs höchste Fundamentalpunkte hat, wo je 1 weiterer Fundamentalpunkt für die Transformation existiert.

Lemma V. Hat ein Büschel elliptischer Curven den Singularitätencomplex $y, y_1 \ldots y_\sigma$, so hat auch der Complex $\lambda y, \lambda y_1, \ldots \lambda y_\sigma$ die Zahlen $u=1, p=1$.

Denn man hat $(\lambda y)^2 - \sum(\lambda y_i)^2 = \lambda^2(y^2 - \sum y_i^2) = 0$, $3(\lambda y) - \sum(\lambda y_i) = \lambda(3y - \sum y_i) = 0$, woraus mit Beachtung der Abhängigkeit unter den σ Punkten $u=1$, $p=1$ folgt.

Theorem IV. Jedes Büschel elliptischer Curven kann durch rational bestimmbare birationale Transformation der ganzen Ebene übertragen werden: 1. in ein Büschel von $C_{3s}\left(A_1^s \ldots A_9^s\right)$, oder 2. in ein Büschel von $C_{4s}\left(A_1^{2s} A_2^{2s} \overbrace{A_3^s A_4^s} \overbrace{A_5^s A_6^s} \overbrace{A_7^s A_8^s} \overbrace{A_9^s A_{10}^s}\right)$ oder 3. $C_{45}\left(\overbrace{A_1^{2s} A_2^{2s}} \overbrace{A_3^s A_4^s A_5^s} \overbrace{A_6^s A_7^s} \overbrace{A_8^s A_9^s A_{10}^s}\right)$ oder 4. $C_{5s}\left(\overbrace{A_1^{2s} \ldots A_5^{2s}} \overbrace{A_6^s \ldots A_{10}^s}\right)$ oder 5. $C_{6s}\left(\overbrace{A_1^{3s} A_2^{3s}} \overbrace{A_3^{2s} A_4^{2s} A_5^{2s}} \overbrace{A_6^s A_7^s} \overbrace{A_8^s A_9^s} \overbrace{A_{10}^s A_{11}^s}\right)$ oder 6. $C_{6s}\left(\overbrace{A_1^{3s} A_2^{3s}} \overbrace{A_3^{2s} A_4^{2s} A_5^{2s}} \overbrace{A_6^s A_7^s A_8^s} \overbrace{A_9^s A_{10}^s A_{11}^s}\right)$.

[1]) Diese drei Fundamentalcurven sind die einzigen, welche nur eine Gruppe gleicher Vielfachheit besitzen. Welches sind die Fundamentalcurven mit nur zwei Gruppen? Es gilt der Satz: Für eine Curve $p=0, u=0$ unterscheiden sich die zwei niedersten Vielfachheiten nur um eine Einheit.

Digitized by Google

Nach dem Vorhergehenden können wir etwa die höchste Fundamentalcurve des Büchels der C_n auf rein rationalem Wege in Gerade oder Kegelschnitt verwandeln. Dann zeigt aber eine leichte Discussion, dass keine Fundamentalcurven übrig geblieben sein können, als etwa Gerade und Kegelschnitt gleichzeitig. Dies sagt, dass wir nur Büschel mit 9, 10 oder 11 Punkten als Typen erhalten können. Die adjungierte Curve des Büschels kann sich nur in die rationalen Fundamentalcurven und eine elliptische Curve zerlegen und nach Äquivalenz können sich bei der successiven Verminderung nur die Gerade oder der Kegelschnitt oder bei 11 Punkten beide absondern. Die Büchel müssen also $l.C_1+m.C_2+s.C_3$ sein. Untersucht man nun, für welche Zahlen l, m, s diese zerlegten Curven $u=1$, $p=1$ liefern, so findet man

$$l=s,\ m=0;\ l=0,\ m=s;\ l=m=s.$$

Diesen 3 Singularitätencomplexen entsprechen die Typen des Theorems.

Invarianten. Sieht man alle Basispunkte als rational an, so ist das Büschel einem Büschel C_{3s} äquivalent und diese Zahl s ist eine Invariante; sie bezeichnet die geringste Anzahl Punkte, welche in diesem Falle von einer Transversalcurve ausgeschnitten werden können.

Wenn ein Büschel mit $p=1$ die numerische Invariante s hat, so sind vermöge des Theorems IV seine Ordnung n und alle Vielfachheiten α_i durch s theilbar.

Aber auch im Falle der rationalen Gruppen ist die Anzahl s' des minimalen Schnittes eine Invariante. s' — die geometrische Invariante — ist stets durch s theilbar. Es genügt daher, die s' für die Büschel mit $s=1$, also C_3, C_4, C_5, C_6 zu untersuchen.

C_3-Büschel mit $(A)_9$[1] haben $s'=3$ und ein einziges System Transversalcurven, mit $(A)_3$ $(A)_6$ haben $s'=3$ und 3 Systeme von Transversalcurven, welche gegenseitig 2, 5, 10 Schnittpunkte haben, mit $(A)_3$ $(A)_3$ $(A)_3$ haben $s'=3$ und unendlich viele Transversalcurvensysteme mit $s'=3$, unter diesen auch Gruppen solcher, welche sich ganz symmetrisch verhalten.

Alle übrigen C_3-Büschel haben $s'=1$, jedoch keine zwei haben gleiche Anzahl und gleiches gegenseitiges Verhalten der Transversalcurvensysteme mit $s'=1$.

Die C_4-Büschel[1]) haben stets $s'=2$ mit Ausnahme derjenigen, wo die Paare von $n.2$ des Theoremes IV. in ein einziges Octupel und die beiden Doppelpunkte in ein Paar irrational verbunden sind, mit $s'=4$, und dasjenige, wo $(A)_3$ unter den einfachen Punkten ist, mit $s'=1$.

[1]) In diesem und den nachfolgenden Paragraphen bezeichnet $(A)_i$ eine rationale Gruppe höherer als erster Art von i Punkten.

[2]) Bei den C_4, C_5, C_6-Büscheln lasse ich die Fundamentalcurven, die $s'=0$ geben und oben im Beweise als Gerade $(A_1\,A_2)$ und Kegelschnitt $(A_1 \ldots A_5)$ erhalten werden, außer Acht.

Digitized by Google

Das C_5-Büschel hat $s'=2$, denn der Kegelschnitt $(A_1 \ldots A_5)$ schneidet ein Punktepaar aus jeder C_5 aus. Diese Transversalcurve ist aber auch die einzige mit $s'=2$.

Die C_6-Büschel haben $s'=4$ oder $s'=6$, je nachdem die 6 einfachen Punkte in rationale Theile zerfallen oder ein einziges rationales Sextupel bilden.

Eine genaue, durchaus nicht überflüssige Aufzählung aller Transversalcurven mit s' Schnittpunkten (in den Fällen, wo ihre Anzahl endlich ist) würde liefern, dass bei keinen zwei dieser typischen Büschel die Anzahl und die gegenseitigen Beziehungen ausgedrückt durch die Werte, welche sie der Form $F=yz-\Sigma y_i z_i$ (wo y, y_i und z, z_i die beiden Singularitätencomplexe sind) geben, übereinstimmen. Jeder Typus kann also durch die Anzahl der Transversalcurven mit s' Schnittpunkten und durch ihre Werte von F vollständig und eindeutig charakterisiert werden.[1])

Es ist also möglich, ein vorgelegtes nicht typisches Curvenbüschel auch mit rationalen Gruppen unter ihren Basispunkten mit Hilfe der Transversalcurven, das ist mit alleiniger Auflösung der diophantischen Gleichung

$$F_{n,y}=ny-\alpha_1 y_1-\ldots-\alpha_\sigma y_\sigma=1, 2, 3, 4, 6$$

hinsichtlich seiner Zugehörigkeit unter eine der unter das Theorem IV ressortierenden typischen Classen vollständig und eindeutig zu charakterisieren.

Das ist auch im alten Falle rational gegebener Punkte praktischer, als die Reduction durch quadratische Transformationen.

§. 7. Eine zweite Methode für die ∞^2- bis ∞^0-Systeme.

Aus einem solchen Systeme kann durch Vorschreibung einfacher rationaler Punkte ein Büschel herausgenommen werden, welches also $s'=s=1$ hat. Auch vom Lemma IV des §. 6 ausgehend sieht man, dass 1-punktige Transversalen nur für $s=1$ vorhanden sein können.

Ein solches Büschel sei nun nach §. 6 auf einen der 4 Typen reduciert und da aber $s'=1$ sein muss, schließen wir aus §. 6 am Ende:

„Jedes Büschel elliptischer Curven, das mittelst rationaler einfacher Punkte aus einem höher dimensionalen Systeme ausgeschieden ist, kann durch birationale Transformation einem C_3-Büschel äquivalent gemacht werden."

[1]) Cf. Kronecker Cr. J. Bd. 99. p. 333. „Über einige Anwendungen der Modulsysteme etc." Die Berechtigung dieses Citates bedarf einer ausführlichen Erörterung.

Digitized by Google

Es sind also nur die ∞^u-Systeme mit $p=1$ zu bestimmen, welche die C_3 eines Büschels in u Punkten schneiden. Die Discussion der Gleichungen

$$3n-\sum_1^9 \alpha_i = u,\ n^2-\sum \alpha_i^2 = u,$$

mit $u>1$ liefert direct die Typen der §§. 4 und 5. Sie kann aber hinsichtlich der Äquivalenz noch vereinfacht werden durch Benützung des in §. 6 erläuterten Umstandes, dass die sich absondernden Fundamentalcurven auf Gerade und Kegelschnitt reduciert werden können.

§. 8. Zusammenfassung der Äquivalenztheoreme für die Systeme elliptischer Curven.

Die Resultate der §§. 4 bis 6 können nun zusammengefasst werden:

Theorem. Jedes rational gegebene lineare System elliptischer Curven kann durch rational bestimmbare birationale Transformationen übertragen werden in einen der folgenden Typen:

für ∞^9: das System aller C_3

für ∞^8: 1 Typus von C_3, 2 Typen von C_4

für ∞^7: 2 Typen von C_3,

für ∞^6: 3 Typen von C_3, 2 Typen von C_4, 1 Typus von C_6

für ∞^5: 5 Typen von C_3, 1 Typus von C_4, 1 Typus von C_5,

für ∞^4: 7 Typen von C_3, 4 Typen von C_4, 1 Typus von C_6,

für ∞^3: 11 Typen von C_3, 3 Typen von C_4, 1 Typus von C_6

für ∞^2: 15 Typen von C_3, 7 Typen von C_4, 1 Typus von C_5, 2 Typus von C_6,

für ∞^1: 30 Typen von C_{3s}, 12 Typen von C_{4s}, 1 Typus von C_{5s}, 4 von C_{6s}.

Hierin sind aber die ∞^1-Systeme mit $s>1$ nur insofern als rational gegeben zu betrachten, als man den natürlichen Rationalitätsbereich durch die irrationalen Lösungen der elliptischen Theilungsprobleme zu einem Kronecker'schen Gattungsbereiche erweitert hat.[1])

[1]) Werden jetzt unter Voraussetzung von durchaus rationalen Punkten oder wenigstens als rational adjungierten Punkten diese Typen weiter reduciert, so kommt man auf die älteren Theoreme, hat also den in Einleitung erwähnten neuen Beweis.

Digitized by Google

§. 9. Die Systeme hyperelliptischer Curven.

Diejenigen Curven, welche aus den C_n des Systemes die organische Involution g_2^1 ausschneiden, müssen für alle C_n dieselben sein, weil der hyperelliptische Charakter nur von den singulären Punkten abhängt und bilden ein Büschel von C_m, deren Geschlecht nur 0 oder 1 sein kann. Denn nur in diesen beiden Fällen ist durch einen Punkt auf C_m und C_n nicht mehr als ein weiterer Schnittpunkt bedingt.

Sind die C_m rational, so reduciere ich sie auf einen der 3 Typen des §. 2 und erhalte leicht die ersten Typen von C_n, welche im folgenden Theoreme aufgezählt sind.

Sind die C_m elliptisch, so reduciere ich nach §. 6 und bilde für jeden der dortigen Typen die C_n, welche jede der C_3 oder C_4 C_5, C_6 in 2 Punkten treffen. Keinesfalls kann $s > 1$ sein.

a) C_3-Büschel. Eine Discussion, welche für diesen Fall umständlich und ausgedehnt ist, liefert die 7 weiteren Typen des folgenden Theoremes.

b) C_4-Büschel. Hier will ich die Discussion durchführen. Für $n.2$ des Theoremes IV. in §. 6 seien die C_n vom Complexe

1. $n, s, s', s_1, s_1, s_2, s_2, s_3\ s_3, s_4, s_4$ also $4n - 2s - 2s' - 2s_1 - - 2s_2 - 2s_3 - 2s_4 = 2$. Hiezu kommen wegen der Irreductibilität durch birationale Transformationen Bedingungen,

2. $n \geqq s + s_i + s_k$, $n \geqq s' + s_i + s_k$ wegen quadratischen,

3. $3n \geqq 2s + 2s_i + 2s_k + 2s_l$, $3n \geqq 2s' + 2s_i + 2s_k + 2s_l$ wegen biquadratischen Transformationen. Also muss wegen Addition von 2. und 3. und Vergleich mit 1.

$$s = s', \quad s_1 = s_2 = s_3 = t, \ s_4 = t - 1, \quad n = s + 2t$$

oder

$$s = s' + 1, s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = t \qquad n = s + 2t$$

Für $n.3$ des citierten Theoremes sei der Complex

1.' $n, s, s, s_1, s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, s_3$, sodass $4n - 4s - 3s_1 - - 3s_2 - 2s_3 = 2$ mit den Bedingungen der Irreductibilität

2.' $3s_1 \leqq n$, $3s_2 \leqq n$, wegen quadratischen Tr.,

3.' $n - s_1 - s_3 - s \geqq 0$, $n - s_2 - s_3 - s \geqq 0$ wegen Tr. 7.O,

4.' $7n - 3(3s_1 + 2s_3 + 2s) \geqq o$, $7n - 3(3s_2 + 2s_3 + 2s) \geqq o$, wegen Transformation 8. O.

5.' $8n - 6s - 9s_1 - 9s_2 \geqq 0$, $8n - 6s_3 - 9s_1 - 9s_2 \geqq 0$ wegen Transformationen 17.O.

$$n - s - s_1 - s_2 \geqq 0$$

wegen Transformationen 13. O., also

Digitized by Google

$$\begin{array}{ll} s_1 = s_2 = s_3 - 1 & n = s + 2s_1 + 1 \\ s_1 = s_3 = s_2 + 1 & n = s + 2s_1 \\ s_1 = s_3 = s_2 - 2 & n = s + 2s_1 + 2 \end{array}$$

c) C_5-Büschel. Die Gleichung $5n - 10s - 5s_1 = 2$ ist unlösbar.

d) C_6-Büschel. Für $n.5$ des Theoremes IV aus §. 6 seien die C_n vom Complexe

$$n,\ s_1,\ s_1,\ s_2,\ s_2,\ s_3,\ s_3,\ s_4,\ s_4,\ s_5,\ s_5,$$

also

$$6n - 6s_1 - 6s_2 - 2s_3 - 2s_4 - 2s_5 = 2$$

mit den Bedingungen der Irreductibilität

$$3s_2 \leqq n$$

wegen quadr. Transformationen

$$n \geqq s_3 + s_4 + s_5,\ n \geqq s_1 + s_3 + s_4,\ n \geqq s_1 + s_4 + s_5,$$
$$n \geqq s_1 + s_3 + s_5$$

wegen Transformationen 3.O.,

$$7n - 3\,(2s_1 + 2s_3) - 6s_2 \geqq n,$$

also

$$n \geqq s_1 + s_2 + s_3,\ n \geqq s_1 + s_2 + s_4,\ n \geqq s_1 + s_2 + s_5,$$

wegen Transformationen 7.O., woraus folgt

$$\left.\begin{array}{llll} 2.s_1, & 3.s_2, & 2.s_3, & 2.(s_3 - 1), \\ 2.s_1, & 3.s_2, & 2.s_3, & 2.s_3, \end{array}\right| \begin{array}{l} 2.(s_3 - 1) \\ 2.(s_3 - 2) \end{array} \Bigg| \quad n = s_1 + s_2 + s_3.$$

Für $n.6$ des erwähnten Theoremes ist der Complex

$$n, 2.s_1, 3.s_2, 3.s_3, 3.s_4, 2.s_5,$$

also

$$6n - 6s_1 - 6s_2 - 3s_3 - 3s_4 = 2,$$

welche Gleichung unlösbar ist.

In einzelnen der erhaltenen 14 Fälle muss $s > 1$ sein, damit das Geschlecht nicht < 0 werde. Das Hinzutreten von gemeinsamen doppelten oder einfachen Punkten ändert an der Irreductibilität dieser 14 Typen nichts, mit Ausnahme einiger niederer Fälle, z. B. für VIII., wenn $s = 2$. Ich habe die folgende Liste durch diese Zusätze nicht complicieren wollen.

Auch hier können wir für $p = 1$ mittelst der Transversalcurven und ihres gegenseitigen Verhaltens (Schnittpunkteanzahl je zweier) Invarianten gefunden werden, welche an jedem System hyperelliptischer Curven direct die Äquivalenz mit einem der folgenden Typen erkennen lassen.

Digitized by Google

Theorem. Alle Systeme hyperelliptischer Curven $p > 1$ lassen sich durch birationale Transformationen, welche in allen Fällen rational bestimmbar sind, übertragen in folgende Typen:

I. Curven C_n mit $(n-2)$-fachem Punkte und einer rationalen Gruppe von $(2\mu+1)$ Doppelpunkten und hiezu noch willkürlich vielen einfachen Punkten,

II. Curven C_n mit vier $(n-1)$: 2-fachen Punkten, welche eine rationale Gruppe bilden, und keinen weiteren Doppelpunkten, aber willkürlich vielen einfachen Punkten,

III. oder diese vier ersten Punkte zwei rationale Paare bilden,

IV. Curven C_n mit zwei $(n:2)$-fachen und zwei $(n-2):2$-fachen Punkten, welche je ein rationales Paar bilden, keinen Doppelpunkten, aber willkürlich vielen rationalen Gruppen einfacher Punkte, von deren keiner ein einzelner Punkt ist,

V. Curven C_{3s+2} mit $\overbrace{s+2, s+2}, \overbrace{s, s, s}, \overbrace{s, s, s}$

VI. Curven C_{3s+2} mit $\overbrace{s+1, s+1}, \overbrace{s+1, s+1}, s, s, s, s$

VII. Curven C_{3s+1} mit $s+1, s, s, s, s, s, s, s, s$

VIII. Curven C_{3s+1} mit $s+1, s+1, s-1, \overbrace{s, s}, \overbrace{s, s}, \overbrace{s, s}$

IX. Curven C_{3s} mit $s-2, s, s, s, s, s, s, s, s$

X. Curven C_{3s} mit $s-1, s-1, s, s, s, s, s, s, s$

XI. Curven C_{3s} mit $\overbrace{s+1, s+1}, s, s, s, \overbrace{s-1, s-1}, \overbrace{s-1, s-1}$

XII. Curven C_{s+2t} $s, s, \overbrace{t, t}, \overbrace{t, t}, \overbrace{t, t}, \overbrace{t-1, t-1}$

XIII. Curven C_{s+2t} $s, s-1, \overbrace{t, t}, \overbrace{t, t}, \overbrace{t, t}, \overbrace{t, t}$,

XIV. Curven C_{s+2s_1+1} $\overbrace{s, s}, \overbrace{s_1, s_1, s_1}, \overbrace{s_1, s_1, s_1}, \overbrace{s_1+1, s_1+1}$

XV. Curven C_{s+2s_1} $\overbrace{s, s}, \overbrace{s_1, s_1, s_1}, \overbrace{s_1, s_1, s_1}, \overbrace{s_1-1, s_1-1}$

XVI. Curven C_{s+2s_1+2} $\overbrace{s, s}, \overbrace{s_1, s_1, s_1}, \overbrace{s_1+2, s_1+2, s_1+2}, \overbrace{s_1, s_1}$

XVII. Curven $C_{s_1+s_2+s_3}$ $\overbrace{s_1, s_1}, \overbrace{s_2, s_2, s_2}, \overbrace{s_3, s_3}, \overbrace{s_3-1, s_3-1}, \overbrace{s_3-1, s_3-1}$

XVIII. Curven $C_{s_1+s_2+s_3}$ $\overbrace{s_1, s_1}, \overbrace{s_2, s_2}, \overbrace{s_2}, \overbrace{s_3, s_3}, \overbrace{s_3, s_3}, \overbrace{s_3-2, s_3-2}$

Hierin müssen die unter $\overbrace{\quad}$ vereinigten Punkte je in einer rationalen Gruppe irrational verbunden sein, die übrigen Punkte oder diese Gruppen können je unter einander irrational verbunden sein.

Digitized by Google

§. 10. Die Ordnung der Transpositionen im Falle $p = 0$.

Sind so die Typen der Curvensysteme für $p=0$ gefunden, so kann zu der weit delicateren Frage nach der möglichst niedrigen Ordnung der Transposition, durch welche der Übergang zu jenen Typen geleistet werden kann, geschritten werden. Es ist dies eine Frage von fundamentaler Bedeutung, wie die nächste Arbeit zeigt.

Ich habe bereits in §. 3 bewiesen, dass ein $\infty^{u>2}$-System auf seinen Typus durch eine Folge von Transpositionen gebracht werden kann, von denen keine eine Ordnung $>n$, die Ordnung des Systemes und nur eine die Ordnung n hat.

Ist aber das System den $\infty^5 C_2$ äquivalent, so verwandelt die Transposition T die Geraden von E' in C_m, die Kegelschnitte in C_{2m} und das ∞^2-System von C_m wird aus den C_n rational distinct ableitbar sein. Also können solche C_n mittelst einer Transposition der Ordnung $(n:2)$ auf den Typus gebracht werden.

Für die C_2 durch 2 irrational verbundene Punkte $A_1 A_2$ gibt es ∞^2 rational bestimmbare homaloidale Systeme, die sie in Paaren schneiden, also ist auch ein System in E rational bestimmbar und da die Vielfachheiten von A_1, A_2 für T_m nicht die Summe $\geqq m$ haben können, folgt $n \geqq 2m - m$, also können die C_n auf diesen Typus durch eine einzige Transformation gebracht werden, deren Ordnung höchstens n ist.

Für den Typus $C_\nu a^{r-1}$ ohne einfachen Punkt findet man ähnlich $n-2$ als höchste nöthige Ordnung von T_m, bei Vorhandensein eines einfachen Punktes ist sie $n-1$.

Für das Büschel C_n $p=0$ hängt die Ordnung von dem Vorhandensein einer möglichst niedrigen Curve $u=0$, welche in einzelnen Punkten schneidet, ab. Es ist indessen am besten, successive Transpositionen zu benützen. In einzelnen Fällen enthält das System der adjungierten C_{n-2}[1]) ein homaloidales System, das dann in C_{n-2} nach E' überträgt.

In den übrigen Fällen wird aber stets eines der Systeme $C_{n-3h+h'}$ $(\alpha_i' - h)$ ein homaloidales System enthalten, welches die C_n dann auf eine Ordnung $n' < n$ transformiert.[2])

Für die einzelne Transposition wird man nur beweisen können, dass ihre Ordnung $<$ als ein gewisses Vielfaches von n bleiben muss.

---

[1]) Für nur einfach rationale (Riemann'sche) Transformation unter E, E' ist das System der adjungierten C_{n-2} bereits von Clebsch benützt worden.

[2]) Es ist wichtig zu beachten, dass nicht jedes Büschel mit $p=o$ auf seinen Typus gebracht werden kann ohne Hinzunahme weiterer Punkte zu seinen Basispunkten, so $C_n A_1^{n-1}$ mit einer rationalen Gruppe von $2n-1$ einfachen Punkten.

Digitized by Google

§. 11. Die Ordnung der Transposition im Falle $p = 1$.

Um zu beweisen, dass ein System von C_n durch eine Transposition einer Ordnung $m < n$ oder höchstens $= n$ auf den Typus U gebracht werden könne, gehe ich vom Typus U in E' aus und beweise, dass für jede mögliche Voraussetzung über T ein ∞^2-System $p = 0$ (H) gefunden werden könne, welches durch T aus E' nach E in ein System C_m niederer Ordnung als die der Transformierten C_n des Systemes U verwandelt wird. Die C_n liefern eine an Stelle von T zu verwendende Transformation, wenn H die U in beziehungsweise nicht mehr als 3, 4, 5, 6 Punkten schneidet. In einigen Fällen kann man auch die Schnittpunktezahl 7, 8, 9 wählen und dann die erhaltenen Systeme C_7, C_8, C_9 einfach weiter reducieren.

Typen $U3.O$. Ist die Basis von U eine rationale Gruppe, so ist H das System der Geraden von E'. Es gibt aber für ein mit diesem Typus äquivalentes System von C_n stets ein System von $C_{n:3}$, das die C_n in Punktetripeln trifft. Ist $(A)_1$ vorhanden, so wird entweder das Geradensystem als U verwendet, wenn nämlich $\sum \alpha + \beta < 2\nu$, wo $\sum$ über die Vielfachheiten von T in $A_2, \ldots, A_9$ erstreckt und β die Vielfachheit in A_1 ist, oder es wird $\left(A_2^6 \ldots A_9^6\right)^{17}$ verwendet, wenn nämlich $17\nu - 6\sum\alpha < 3\nu - \sum\alpha - \beta$ ist. Die beiden Fälle erschöpfen alle Dispositionen von T.

Ist $(A)_2$ vorhanden, so wird als H entweder das Geradensystem verwendet, wenn nämlich $\sum\limits_7 \alpha + \sum\limits_2 \beta < 2\nu$, wo $\sum\limits_7 \alpha$ über die Vielfachheiten von T in $A_3 \ldots A_9$ erstreckt ist und $\sum\limits_2 \beta$ über jene in A_1, A_2, oder es wird $\left(A_3^3 \ldots A_9^3\right)^8$ verwendet, wenn nämlich

$$8\nu - 3\sum_7 \alpha < \nu - \sum_7 \alpha - \sum_2 \beta$$

womit alle Dispositionen von T erschöpft sind.

Ist $(A)_3$ vorhanden, so wird das Geradensystem für die Fälle $\sum\limits_6 \alpha + \sum\limits_3 \beta < 2\nu$, das System $\left(A_4^2 \ldots A_9^2\right)^5$ als H verwendet, wenn $5\nu - 2\sum\limits_6 \alpha < \nu - \sum\limits_6 \alpha - \sum\limits_3 \beta$, womit alle Dispositionen von T erschöpft sind.

Ist $(A)_4$ vorhanden, so wird das Geradensystem für die Fälle $\sum\limits_5 \alpha + \sum\limits_4 \beta < 2\nu$, das System $(A_1^5 \ldots A_4^5 A_5^2 \ldots A_9^2)^{11}$ als H verwendet, wenn $11\nu - 5\sum\limits_4 \alpha - 2\sum\limits_5 \beta < 3\nu - \sum\limits_4 \alpha - \sum\limits_5 \beta$.

Ich habe die Formeln für das Büschel geschrieben. Ganz entsprechend geschieht die Schreibung für das ∞^3, ∞^3, ∞^4-System. In $\sum$ ist nur das i zu ändern.

Digitized by Google

Typen *U*. 4. O. Ich schreibe wieder die Formeln, als wären sie für das Büschel bestimmt. Ist $(A)_2$ unter den einfachen Punkten, so nimmt man als H das Gradensystem, so lange $\sum_2 \alpha + \sum_6 \beta + \sum_2 \gamma < 3\nu$ oder das System $\left(A_1^6 \ldots A_8^6\right)^{17}$, falls $17\nu - 6\sum_2 \alpha - 6\sum_6 \beta < 4\nu - -2\sum \alpha - \sum \beta - \sum \gamma$, wo $A\alpha$ über die Vielfachheiten von T in A_1, A_2, $\sum \beta$ über jene in $A_3 \ldots A_8$ erstreckt ist, $\sum \gamma$ über A_9, A_{10}.

Ist $(A)_3$ unter den einfachen Punkten, so nimmt man für H das Geradensystem, wenn $\sum_{2_1} \alpha + \sum_5 \beta < 3\nu$ oder das System $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$, falls $8\nu - 3\sum_2 \alpha - 3\sum_5 \beta < 4\nu - 2\sum_2 \alpha - \sum_5 \beta - \sum_3 \gamma$.

Ist $(A)_4$ unter den einfachen Punkten, so dient in gleicher Weise $(A_1^2 \ldots . A_6^2)^5$. Sind übrigens A_1, A_2 rational distinct, so können auch Jonquières'sche Systeme als H verwendet werden.

Typen *U* 5. O. Entweder das Geradensystem oder $(A_1^2 \ldots A_5^2 P)^5$ oder $(A_1^2 \ldots A_5^2 A_6^5 \ldots A_9^5)^{11}$ oder $(A_6^2 \ldots A_{10}^2 P^2)^5$ genügen als H.

Typen *U* 6. O. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Vielfachheiten vom T über A_1, A_2; A_3, A_4, A_5; $(A)_i$ und der Restgruppe $(A)_k$, so wendet man als H das Geradensystem an, solange $2\alpha + 3\beta + i\gamma + k\delta < 5$ oder man verwendet für $i = 2, 3$ bezüglich $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$ und $(A_1^6 \ldots A_8^6)^{17}$, solange

$8\nu - 3(2\alpha + 3\beta + 2\gamma) < 6\nu - 6\alpha - 6\beta - 2\gamma - k\delta$ oder

$17\nu - 6(2\alpha + 3\beta + 3\gamma) < 6\nu - 6\alpha - 6\beta - 3\gamma - k\delta$.

Übrigens ist die erste Bedingung stets erfüllt.

Es ist zu beachten, dass die Auffindung des Systemes C (des transformierten von H) in E nur ein arithmetisches Problem und zwar unter Voraussetzung der Eigenschaften des Systemes elliptischer Curven nur ein lineares Problem ist. Nach Auflösung der diophantischen Gleichung hat man den Singularitätencomplex und das diesen tragende Curvensystem rational distinct gegeben. Das letztere ist der Erfolg der Discussion dieses Paragraphen.

§. 12. Ein zweites Beweisprincip für die linearen Systeme mit $p = 0, 1$.

Theorem I. Kein lineares System rationaler Curven und kein $\infty^{u>1}$-System elliptischer Curven kann mehr als 8 Basispunkte höchster Vielfachheit besitzen.

Digitized by Google

Denn für diese Systeme von C_n gilt

$$3n - \sum \alpha = u - p + 1.$$

Ferner gilt der Satz, dass die Summe der 3 höchsten Vielfachheiten $> n$ für alle diese Systeme und daher ist die höchste Vielfachheit $\alpha_1 > (n:3)$, also $9\alpha_1 > 3n$, was wegen der geschriebenen Relation nicht sein darf.

Von hier ab unterscheide ich die Fälle, wo die Anzahl σ_1 der h_1-fachen Punkte, wo h_1 der größte Wert von α_i ist, $1, 2, \ldots 8$ sei. Jeder einzelne dieser Fälle lässt sich auf eine besondere Art erledigen und es sind hiezu genau dieselben Discussionen und Hilfssätze nöthig, welche sich im Cap. II der nächsten Arbeit für den einen, besonders bemerkenswerten Fall $u=2, p=0$ finden. Insbesondere wird wie dort bewiesen:

„Das einzige Büschel $p=1$ mit 9 höchsten Basispunkten ist C_3, $(9A^4)$ und irreductibel. Jedes lineare $\infty^{u>0}$-System mit $p=0$, 1 und 8 höchsten Basispunkten lässt sich durch $(A_1^6 \ldots A_8^6)^{17}$, mit 7 durch $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$, mit 6 durch $(A_1^2 \ldots A_6^2)^5$, mit 5 durch dieselben oder durch $(A_1^{16} \ldots A_5^{16} A_6^{10} \ldots A_{10}^{10})^{41}$, mit 4 durch $(A_1^{(n-1):2} \ldots A_4^{(n-1):2})^n$, mit 3 durch $(A_1 A_2 A_3)^2$, mit 2 durch die bisherigen oder $(A_1^6 A_2^6 A_3^4 \ldots A_8^4)^{13}$ oder $(A_1^{12} A_2^{12} A_3^8 A_4^8 A_5^8 A_6^6 A_7^6 A_8^6 A_9^6)^{25}$ ode $(A_1^{14} A_2^{14} A_3^8 \ldots A_9^8)^{29}$, mit 1 durch Jonquières'sche Transformationen auf niedere Ordnung reducieren — ausgenommen die in dieser Arbeit gefundenen Typen."

§. 13. Einfluss der neuen Theorie auf die Typen involutorischer eindeutiger Transformationen.

Die rationale Doppelebene — wie man heute zu sagen pflegt — ist, nachdem Clebsch sie in die Theorie der Flächenabbildungen eingeführt hatte, von Nöther auf ihre Typen gebracht worden. Das damit parallel laufende Problem der involutorischen Transformationen (J) ist von Bertini und in mehr systematischer Weise von mir selbst in *Cr. J.* Bd. CXIV. in Bezug auf die Typen gelöst worden. Aber auch diese Typen sind unter der gegenwärtigen Auffassung nicht auf rationalem Wege erreichbar. Dies gilt einerseits für meine „Charakteristiken", indem man auch für diese die Forderung stellt, dass in die Transposition stets nur gleich vielfache Punkte genommen werden sollen[1]), und gleicherweise für die „Transformationen".

[1]) Welche Wichtigkeit diese Forderung für höhere Probleme gewinnen kann, sieht man aus meiner Abhandlung im XVIII. Bande des Amer. Journ. of Math.

Digitized by Google

Der Unterschied zwischen Charakteristiken und Transformationen sollte zwar auch durch die ganze folgende Discussion hindurch festgehalten werden. Da er nur in $n \cdot 3$ wesentliche Consequenzen hat, so will ich hier die in meinen bisherigen Arbeiten und in meinem Buche[1]) befolgte Zweitheilung in eine „Theorie der Charakteristiken" und eine „Theorie der Transformationen" nur implicite zur Geltung bringen, da der Raum drängt.

Durch Anwendung meines Principes der successiven Adjunction gelange ich also zu einem System von Curven $p = o$ oder $p = 1$, das durch die J in sich transformiert werden muss. Nach Reduction desselben auf den Typus (Y) sind die J zu suchen, welche Y reproducieren. Es sind aber jezt für Y die in dieser Arbeit erhaltenen Typen zu verwenden. Ich sende das Theorem voraus: „Wird eine Charakteristik der gegenwärtigen Art durch eine Transposition mit dem Vorbehalte übertragen, dass gleich vielfache Punkte wieder als solche verwendet werden, so wird die Directrixsubstitution nicht geändert."

1. Das Geradenbüschel.

T_n ist eine Jonquières'sche Transformation mit $(a\,b)^{n-1}$. Aber jetzt können von den Verkettungen der einfachen Punkte die Paare $(a_1\,b_2)$ $(a_2\,b_1)$ je in eine rationale Gruppe verbunden sein, ja sogar mehrere solche Paare können eine einzige Gruppe bilden, deren Lösung durch eine Abel'sche Gleichung geschieht. Wie solche Transformationen durch eine invariante hyperelliptische Curve construiert werden können, habe ich anderwärts gezeigt (Rendiconti Circolo di Palermo 1895).

Also kann jede involutorische Jonquières'sche Charakteristik in Bezug auf ungestört rationale Zerlegung als typische Transformation erscheinen.

2. Das Kegelschnittbüschel.

a) Hat T_n nur $(n-1):2$-fache Punkte mit den Coincidenzen $(A_1A_1^1)$ $(A_2A_2^1)$ $(A_3A_3^1)$ $(A_4A_4^1)$ oder $(A_1A_2^1)$ $(A_2A_1^1$ $(A_3A_4^1)$ $(A_4A_3^1)$[1]), so werden die drei zerfallenden Kegelschnitte jeder in sich transformiert; also herrscht Identität unter den C_2 $(A_1A_2A_3A_4)$ und in jeder entsteht eine Involution. Es ist eine rationale C_m projectiv auf die C_2-Reihe zu beziehen und ihre Punkte sind als Centra der Involutionen zu benützen. Die Incidenzen sind die doppelten Fundamentalpunkte B_i, also jedenfalls in ungerader Anzahl, daher

[1]) „Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene." Berlin, Mayer & Müller, 1895.

[2]) Die 4 höchsten Fundamentalcurven dieser Transformationen sind für $n = 4q+1$ Curven $(A_i^q A_k^q A_l^q A_m^{q-1} B_1 \ldots B_{(n-1):2})^{2q}$, für $n = 4q+3$ aber $(A_i^q A_k^q A_l^q A_m^{q+1} B_1 \ldots B_{(n-1):2})^{2q+1}$. Eine Gerade $A_i A_k$ entspricht im 1. Falle der Geraden $A_i'A_k'$, im 2. Falle der Geraden $A_l'A_m'$.

Digitized by Google

$n = 4q + 3$, mit Ausnahme, wo in den einen rationalen Punkt V_1 des Diagonaltripels eine Incidenz fällt, $n = 4q + 1$ gibt. Im 1. Falle ist die 1. Charakteristik, im anderen die 2. Charakteristik vorhanden. Auch wenn C_m durch alle 3 Eckpunkte $V_1 V_2 V_3$ des Diagonaltripels geht, entsteht die 1. Charakteristik, aber mit $n = 4q + 1$; sind dagegen nur in V_2, V_3 Incidenzen, so entsteht die 2. Charakteristik und $n = 4q + 3$. Diese Fälle sind möglich mit Basisquadrupel oder 2 Basispaaren.

Es bleibt noch $(A_1 A_1^1)(A_2 A_2^1)(A_3 A_3^1)(A_4 A_4^1)$. Dann werden zwei Geradenpaare involutorisch vertauscht. Unter den Kegelschnitten entsteht Involution mit einem festen Geradenpaare. Die beiden Geraden des einen Paares werden entweder in sich übergeführt oder unter einander vertauscht, je nachdem $n = 4q + 1$ oder $4q + 3$. Die Construction einer solchen J_n geschieht am besten durch zwei invariante Curven. Beide müssen ihre Berührungspunkte mit $C_2(A_1 A_2 A_3 A_4)$ in Paare einer Involution getrennt besitzen, welche eben durch die 3 Geradenpaare bestimmt ist; die zweite wird zur ersten als eine invariante Curve in jener ebenen Involution hinzu construiert, welche die erste zum Orte der Doppelpunkte hat. Dann erscheint auf jeder C_2 ein Quadrupel harmonischer Punkte, wodurch also gleichzeitig zwei Transformationen bestimmt sind, welche aber durch eine einzige quadratische Gleichung separiert werden können. Die Schnittpunkte beider Curven entscheiden über die doppelten Fundamentalpunkte B_i der Transformation.

Alle Transformationen dieser Art können in typischer Form erscheinen. Herrscht Identität unter den C_2 des Büschels, so müssen die B_i zu Coincidenzen $(B_i B_i')$ vereinigt sein. Die Transformationen sind typisch, sogar wenn alle B_i einzeln rational sind, ob $A_1 A_2 A_3 A_4$ ein rationales Quadrupel oder zwei rationale Paare sind. Herrscht Involution unter den C_2, so dürfen nur 0, 1 oder 2 Coincidenzen $(B_i B_i')$ vorhanden sein, die übrigen sind zu $(B_i B_k')(B_k B_i')$ vereinigt. Diese Transformationen sind typisch, wenn keines dieser letzten Paare rational zerfällt.

b) Hat T_n zwei $(n:2)$-fache und zwei $(n-2):2$-fache Punkte[1], so herrscht unter den Kegelschnitten Involution, das Geradenpaar $A_1 A_2, A_3 A_4$ wird in den Kegelschnitt durch A_σ verwandelt, die beiden anderen werden entweder in sich — wenn $n = 4q$ und

[1]) Ist $n = 4q$, so sind die vier ersten Fundamentalcurven $(A_1^q A_2^q A_3^q A_4^{q-1} A_5 \ldots A_\sigma)^{2q}$, $(A_1^q A_2^q A_3^{q-1} A_4^q A_5 \ldots A_\sigma)^{2q}$, $(A_1^q A_2^{q-1} A_3^{q-1} A_4^{q-1} A_5 \ldots A_{\sigma-1})^{2q-1}$ $(A_1^{q-1} A_2^q A_3^{q-1} A_4^{q-1} A_5 \ldots A_{\sigma-1})^{2q-1}$. Ist $n = 4q + 2$, so sind sie $(A_1^{q+1} A_2^q A_3^q A_4^q A_5 \ldots A_\sigma)^{2q+1}$, $(A_1^q A_2^{q+1} A_3^q A_4^q A_5 \ldots A_\sigma)^{2q+1}$, $(A_1^q A_2^q A_3^q A_4^{q-1} A_5 \ldots A_{\sigma-1})^{2q}$, $(A_1^q A_2^q A_3^{q-1} A_4^q A_5 \ldots A_{\sigma-1})^{2q}$.

Digitized by Google

$(A_1 A_1')$, $(A_2 A_2')(A_3 A_3')(A_4 A_4')$ besteht oder wenn $n = 4q + 2$ und $(A_1 A_2')(A_2 A_1')(A_3 A_4')(A_4 A_3')$ oder $(A_i A_i')$ —, oder untereinander, — wenn $n = 4q$ und $A_1 A_1')(A_2 A_2')(A_3 A_4')(A_4 A_3')$ oder wenn $n = 4q + 2$ und $(A_1 A_2')(A_2 A_1')(A_3 A_3')(A_4 A_4')$ — verwandelt. Jede dieser Charakteristiken ist construierbar mit Hilfe zweier invarianter Curven $C_{2\lambda+\mu} A_1^{\lambda+\mu} A_2^{\lambda+\mu} A_3^{\lambda} A_4^{\lambda}$ genau nach der Methode für a).

Auch diese Transformationen können alle typisch sein, sofern die involutorischen Coincidenzen der Punkte $A_5, A_6, \ldots A_{\sigma-1}$ gleichzeitig rational untrennbar sind.

3. C_3-Systeme.

Die Charakteristik hat $\sigma \leqq 9$ Punkte. Es sei zuerst $\sigma = 9$; die übrigen folgen unter $n.7$.

a) Sind alle Punkte als rational anzusehen, so kann nach der ursprünglichen Theorie stets auf $\sigma = 8$ reduciert werden.

b) Sei A_1 rational gegeben; n, α_1 (über A_1), $\alpha_2, \ldots \alpha_9$ sei der Complex von T_n, also A_1 Träger der höchsten Vielfachheit; α_{i1} $\alpha_{i2}, \ldots \alpha_{i9}$ seien die Complexe der Fundamentalcurven. Ich wende $Q = (A^4_1 A_2 \ldots A_9)^5$ an und erhalte für $Q \,.\, T_n$ den Complex $n' = 5n_1 - 4\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_9$, $\alpha_1' = 5\alpha_i - 4\alpha_{i1} - \alpha_{i2} - \ldots - \alpha_{i9}$[1]) und für $Q \,.\, T_n \,.\, Q^{-1}$ die Ordnung $n'' = 5n' - 4\alpha_1' - \alpha_2' \ldots - \alpha_9'$. Wird dies ausgerechnet, so entsteht $4n - 21\,\alpha_1 + 9\,\alpha_{11} + 12 = n_1''$. Dies ist $< n$, wenn $n - 7\,\alpha_1 + 3\,\alpha_{11} + 4 < 0$, was aber stets der Fall ist. Ist A_1 Träger des niedersten α, dann führt die Rechnung für $Q = (A_2^6 \ldots A_9^6)^{17}$ zu $n'' < n$; $n'' =$ Ordnung von $Q\, T_n\, Q^{-1}$. Dies zeigt, dass man auf $\sigma = 8$ muss reducieren können[2]).

b) Ein rationales Paar $(A)_2$ sei vorhanden und Träger von α_1. Sei $(A)_7$ die Ergänzungsgruppe, dann gibt es über $(A)_2$ $(A)_7$ die Fundamentalsysteme T_8 und T_{29} aus Cap. I. der hier folgenden Arbeit. Sind die involutorischen Charakteristiken J_8 und J_{29}, so können, da J_8 und J_{29} nicht vertauschbar sind, weil nicht beide A_1 A_2 in sich transformieren, aus den beiden Reihen von Transformationen

$$\ldots\ T_{29}\ T_8\ T_{29}\ T_8\ J_{29}\ T_8^{-1} T_{29}^{-1} T_8^{-1} T_{29}^{-1} \ldots .$$
$$\ldots\ T_8\ T_{29}\ T_8\ T_{29}\ J_8\ T_{29}^{-1} T_8^{-1} T_{29}^{-1} T_8^{-1} \ldots .$$

---

[1]) Indem ich dies anschreibe, trage ich schon dem Umstande Rechnung, dass wegen $T_n^2 = E$ nur gleich vielfache Punkte in Coincidenz kommen können.

[2]) Hieraus allein ist schon zu schließen, dass nur ein System mit $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 8$ und keines mit $\sigma_1 = 8$, $\sigma_2 = 1$ existieren kann (cf. die zweite Arbeit).

Digitized by Google

keine zwei übereinstimmen und eine kurze Zahlenrechnung zeigt, dass sie die aus den cit. Fundamentalsystemen des Cap. I. gebildeten J vollständig erschöpfen. Damit ist die Äquivalenz aller dieser J mit J_8 und J_{99} bewiesen, für welche noch alle Directrixsubstitutionen vom Index 2 genommen werden dürfen, solange es sich nur um Charakteristiken handelt.

Wird $(A)_2$ durch $(A)_5 (A)_2^1$ ergänzt, und ist $(A_2)^1$ Träger des niedersten α, so wendet man $Q = (A_1^3 \dots A_7^3)^8$ an, welches überhaupt, wenn α_8, α_9 die niedersten Werte sind und (cf. C. J. CXIV) $\alpha_{88}, \alpha_{89}\, \alpha_{98}, \alpha_{99}$ die Vielfachheiten der 2 niedersten Fundamentalcurven in A_8, A_9 sind, liefert $n'' = n - 6\alpha_8 - 6\alpha_9 + 9(\alpha_{88} + \alpha_{89} + \alpha_{98} + \alpha_{99})$ und dieses ist $< n$, wie sich leicht beweisen lässt.

c) Ein rationales Tripel $(A)_3$ sei gegeben und Träger von α_1 oder α_i. Dann reduciert entweder $(A_1 A_2 A_3)^2$ oder $(A_4 \cdots A_9)^5$, je nachdem $n - 4\alpha_1 + 3\alpha_{11} \mp 2 < 0$ oder > 0, das ist $(3\alpha_1 - n) \gtrless (3\alpha_{11} - \alpha_1) \mp 2$, wo die eine Klammer der Nöther'sche Übersehuss für T_n, die andere der Nöther'sche Überschuss für die höchste Fundamentalcurve von T_n ist.

d) Ein rationales Quadrupel $(A)_4$ sei vorhanden. Ist es der Träger von α_1, so wird $(A_1^5 \cdots A_4^5 A_6^2 \dots A_9^2)^{11}$ durch Übertragung reducieren. Es ist jedoch zu beachten, dass wenn unter $A_5 \cdots A_9$ eine $(A)_2$ oder $(A)_4$ ist, wir auf die vorigen Fälle recurrieren können, sodass nur der Fall $(A)_1$ $(A)_5$ zu untersuchen bleibt, mit Ausnahme von $(A)_2^{h_1} (A)_3^{h_2} (A)_4^{h_3}$ mit $h_1 > h_2 > h_3$.

Auch hier haben wir die beiden Involutionen J_{11} und J_{41}, welche nicht vertauschbar sein können, da J_{41} nicht die $C_2 (A_1 \dots A_4)$ unter einander verwandelt, so dass also die Reihen

$$\dots . T_{41}\, T_{11}\, T_{41}\, T_{11}\, J_{41}\, T_{11}^{-1}\, T_{41}^{-1}\, T_{11}^{-1}\, T_{41}^{-1} \dots .$$
$$\dots . . T_{11}\, T_{41}\, T_{11}\, T_{41}\, J_{11}\, T_{41}^{-1}\, T_{11}^{-1}\, T_{41}^{-1}\, T_{11}^{-1} \dots . .$$

ganz verschieden sind und aber, wie eine kurze Zahlenrechnung zeigt, alle J, die aus den in Cap. I. gefundenen Fundamentalsystemen gebildet werden können, erschöpfen. Damit ist dann die Äquivalenz aller dieser J mit J_{11}, J_{41} bewiesen, für welche noch alle Directrixsubstitutionen vom Index 2 genommen werden dürfen, solange es sich nur um Charakteristiken handelt.

Für $(A)_2$ $(A)_3$ $(A)_4$ sieht man, dass eine unterhalb T_{39} und T_{41} gelegene Transformation den bisherigen Reductionen entgehen kann, nicht aber eine unterhalb T_8 oder T_{11} gelegene. Es findet sich, dass T_{25} aus Cap. II.[1]) und T_{26} aus Cap. I. der nächten Arbeit allein übrig sind.

[1]) Ist C der Schnittpunkt von A_1 A_2 mit einer C_3, so beschreibt sein Tangentialpunkt C_i eine Curve 9. O. mit $A_1^3 A_2^3 A_i^3$ $(i = 3 \dots 9)$. Die Schnittpunkte A_1^4 von A_1 C_i mit C_3 beschreiben eine Curve 14. O., die dem A_1 entsprechende Fundamentalcurve; ebenso für A_2. Die Schnittpunkte A_3^4 von A_3 C_i

Digitized by Google

Was nun die „Transformationen“ J_{25}, J_{29}, J_{41} anlangt, so ist zuerst jede J_{25} durch $(A_1\ A_2\ A_3)^2$, weil ein $(A_3\ A_3')$ vorhanden sein muss, in J_{13} übertragbar, und diese, sofern ein $(A_4\ A_4')$ existiert, in J_8. Hieraus schließe ich, dass in diesem Falle nur eine J_{25} existieren kann.

Aber J_{13} ohne $(A_4\ A_4')$ ist nicht construierbar, weil $(A_1\ A_2\ A_4)^2$, in J_7 aus Art. 2 dieses § und mit $(A_1\ A_2')\ (A_2\ A_1')\ (A_3\ A_4')\ (A_4\ A_3)$ $(B_1\ B_1')\ (B_2\ B_3')\ (B_3\ B_2')$ übertragen würde, was, wie dort bewiesen, nicht construierbar ist.

Für J_{29} überträgt $(A_1\ A_2\ A_3)^2$ sofort in $J_{17}\left[(c_i\ c_k')\right]$ und da keine andere J_{17} existieren kann, als die bekannte typische (von mir mit Σ_2 bezeichnete), so ist auch nur eine J_{29} möglich.

Für J_{41} mit $(A_1\ A_1')\ (A_2\ A_3')\ (A_3\ A_2')$ überträgt $(A_1\ A_2\ A_3)^2$ sofort in J_{29}. Also ist jedenfalls nur eine J_{41} construierbar. Es ist aber ein $(A_i\ A_i')$ stets vorhanden. Also ist diese eine J_{41} möglich.

Diese Beweise für J_{25}, J_{29}, J_{41} sind darum zulässig, weil nach dem Fundamentalsatze der Algebra zur Lösung der rationalen Gruppen stets complexe Werte genügen, und die Theoreme meines Buches, welche ich hier benützt habe (über die Unconstruierbarkeit der J_8 oder J_{17}) für die ganze complexe Ebene gelten.

Es folgt nun, dass J_{29}, J_{41} die C_3 eines Büschels, J_{25} nur eine C_3 invariant lassen.

J_{29} wird construiert, indem auf jeder C_3 der Schnittpunkt mit $A_1\ A_2$ als Doppelpunkt einer $u' + u \equiv \gamma$ gewählt wird; J_{41}, indem auf jeder C_3 der Schnittpunkt mit $(A_1 \ldots A_5)^2$ als solcher Doppelpunkt benützt wird. Folglich kann sofort geschlossen werden:

J_{26} muss die Transformation sein, welche die C_3 eines Büschels so in sich transformiert, dass die Schnittpunkte mit $A_1\ A_2$ und $(A_1 \ldots A_5)^2$ sich involutorisch in einer $u' + u \equiv \gamma$ entsprechen.

---

mit C_3 beschreiben eine Curve 8. O., die dem A_2 entsprechende Fundamentalcurve. Hiemit kennt man alle Fundamentalcurven und auch die Ordnung von T_{29}.

Ist C' der Schnittpunkt von $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ mit C_3, so beschreibt sein Tangentialpunkt C_t' eine Curve 12. O. mit $A_1^3 \ldots A_5^3\, A_6^5 \ldots A_9^5$. Die Schnittpunkte $A_1^u \ldots A_5^u$ von $A_1\ C_t', \ldots A_5\ C_t'$ mit C_3 beschreiben je eine Curve 16. O., die Fundamentalcurven von $A_1 \ldots A_5$. Die Schnittpunkte von $A_6^u \ldots A_9^u$ von A_6 $C_t' \ldots A_9\ C_t$ mit C_3 beschreiben je eine Curve 10. O., die Fundamentalcurven von $A_6 \ldots A_9$. Hieraus folgt die Ordnung von T_{41}.

Ist C'' der Schnittpunkt von CC' mit C_3, so beschreibt C'' eine Curve 10. O. mit $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8\ A_9$. Der Schnittpunkt A_1^u, A_3^u, A_6^u von $A_1\ C''$, $A_3\ C''$, $A_6\ C''$ mit C_3 beschreiben Curven 12., 9., 6. O., die Fundamentalcurven von T_{26}.

Um J_{25} zu construieren, sind die Eigenschaften der Involutionen $u' + u \equiv \gamma$ auf den Curven $A_1^3\, A_2^3\, A_3^2\, A_4^2\, A_5^2$ zu verwenden.

Digitized by Google

J_{25} entsteht, wie die obige Transformation lehrt, aus einem C_6-Büschel $\overbrace{(A_1^3 A_2^3}\ \overbrace{A_3^2 A_4^2 A_5^2}\ \overbrace{A_6 \ldots A_9}\ \overbrace{A_{10} A_{11}})^6$, wo das Punktepaar $A_{10} A_{11}$ auf allen C_6 des Büschels ein Paar einer $u' + u \equiv \gamma$ bildet.

4. C_4-Systeme.

Sind A_1, A_2 von ungleicher Vielfachheit, so überträgt *b*) aus *n*.1 in niedere Ordnung. Sind α_1, α_2 gleich, so kann nicht $(A)_8$ vorhanden sein und wenn $(A)_3'$ das niederste Paar ist, überträgt *c*), wenn $(A)_3'$ es ist, überträgt $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$. Wenn $(A)_9\,(A)_9'$ vorhanden ist, hat man die Fundamentalsysteme $n = k^2 + 1$, $\alpha = k^2 : 2$, $\beta = k(k+2) : 4$, $\gamma = k(k-2) : 4$.

Die Übertragung dieser J_n mit $(A_1^2 \ldots A_5^2)^5$ liefert $n' = (k-2)^2 + 1$ und $n'' = (k-4)^2 + 1$ also die Lösung für $k - 4$.

Es bleibt $(A)_2\,(A)_3\,(A)_5$, wofür wir T_{61} gefunden haben (Cap. I.). Als Charakteristik sind noch alle involutorischen Directrixsubstitutionen zulässig.

Wir wissen aus meiner älteren Theorie (Cr. J. CXIV), dass in einem der ehemaligen Typen ein C_3-Büschel mit dem Index 2 nur existieren kann, wenn er Jonquières'isch ist, also ein rational distinctes Büschel von Curven $p = 0$ in sich transformiert oder eine quadratische Transformation ist. In diesem 2. Falle ist ein ∞^6-System elliptischer Curven invariant, weshalb wir auf die Typen dieser, welche in § 8. gegeben sind, allein zu recurrieren hätten. Es sind also nur die Büschel invarianter C_4 zu untersuchen. Nun folgt wegen der Invarianz von $(A_1 \ldots A_5)^2$ durch T_{61} sofort:

J_{61} wird construiert, indem auf den C_3 eines Büschels $\overbrace{A_1^2 A_2^2}\ \overbrace{A_3 A_4 A_5}\ \overbrace{A_6 \ldots A_{10}}$ jedesmal der Schnittpunkt mit dem Kegelschnitte $(A_1 \ldots A_5)^2$ als Doppelpunkt einer $u' + u \equiv \gamma$ gewählt wird.

Dies ist die einzige construierbare J_{61}.

5. C_5-Systeme.

Gemäß dem im Cap. I. der folgenden Arbeit Bewiesenen ist hier nur der Fall $\sigma < 9$ möglich.

6. C_6-Systeme.

$(A_1 A_2)$ und $(A_1 \ldots A_5)^2$ müssen in sich verwandelt oder vertauscht werden und es entstehen nach Cap. I. *n*.10 nur die involutorischen Charakteristiken J_{25}, J_{26}, also eigentlich nur über 9 Punkten. Theilen sich aber $A_6 \ldots A_{11}$ in $(A)_4\,(A)_2$ oder $(A)_3\,(A)_3$ oder $(A)_2\,(A)_2\,(A)_2$, so sieht man, dass Fundamentalsysteme mit $\alpha_\delta > 0$ in $(A)_2$ oder $(A)_3$ nicht möglich sind. Denn unter den Theilungen der Zahl $n^2 - 1 - (n-1)^2 : 2 - (n-1)^2 : 3$ in 6 Theile liefert jene die

Digitized by Google

kleinste Summe der Quadrate, wo die Theile gleich sind; nun ist aber schon in diesem Falle, wie im Cap. I. erwähnt, diese Summe größer als zulässig, daher qu. e. d.

$$7.\ \sigma \leqq 8.$$

Es sind die 29 Fundamentalsysteme meiner Preisschrift zu discutieren. Es resultieren die „Charakteristiken" V.—X. meines folgenden Äquivalenztheoremes. Für die „Transformationen" seien die Constructionen durchgeführt.

a) J_5 mit 6 zweifachen Fundamentalpunkten ist nur constructibel mit der Charakteristik $(a_i\, a_k')(a_k\, a_i')$. Es sind also 3 rationale Formen möglich.

b) J_5 der 2. Form: Man nehme auf einer C_3 einen Punkt $(c\, c')$, ein rationales Tripel $(b_1\, b_1')(b_2\, b_2')(b_3\, b_3')$ und projiciere das letztere von einem zu c conjugierten Punkte $c + (K + i\,K') : 2$ ex. gr. auf C_3 in ein rationales Tripel $(a_1\, a_1')(a_2\, a_2')(a_3\, a_3')$. Oder: man ergänzt $b_1\, b_2\, b_3$ in einer der drei Hesse'schen Conjunctionen zu $c_1 c_2 c_3$.

Beweis folgt durch Übertragung auf quadratische Involution.

c) J_6 mit $(b_i\, b_i')$: Man nehme auf C_3 zwei contangentiale Punkte c_1, c_2, schneide C_3 mit der Verbindungslinie des Tangentialpunktes und des Punktes $-(c_1 + c_2)$ in a_1 und benütze die 4 Berührungspunkte der Tangenten aus a_1 als die Punkte b_i. Oder: Man nehme in einer Hesse'schen Conjunction ein Paar $c_1\, c_2$, den zum Schnittpunkte mit $c_1\, c_2$ conjugierten als a_1 und lege durch $a_1\, c_1\, c_2$ irgend eine C_3, welche in c_1, c_2 die gegebene berührt. Das übrige Schnittquadrupel nehme man als b_i.

$(b_1\, b_1')\ (b_2\, b_2')\ (b_3\, b_4')\ (b_4\, b_3')$ wird construiert, indem auf C_3 ein Paar eines contangentialen Quadrupels als $b_3\, b_4$, das zweite als $c_1\, c_2$, ein mit dem Tangentialpunkte allineirtes Paar als $b_1\, b_2$ benützt wird. a ist der Tangentialpunkt.

$(b_1\, b_2')\ (b_2\, b_1')\ (b_3\, b_4')\ (b_4\, b_3')$ ist im complexen Bereiche einer involutorischen Collineation äquivalent und kann construiert werden, indem auf $C_3\ u' + u \equiv \gamma$ vorausgesetzt wird, woraus $b_1\, b_2\ a_1$ und $b_3\, b_4\, a_1$ und eben $c_1\, c_2$ und der Tangentialpunkt von a allineirt erscheinen.

Für $u' - u \equiv \gamma$ sind $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ ein contangentiales Quadrupel und a ist der zweite Tangentialpunkt. Auch c_1, c_2 müssen dann contangentiale Punkte sein.

d) J_8 ist nur mit $(c_i\, c_i')$ construierbar und typisch mit allen möglichen Theilungen der 7 Punkte in rationale Gruppen.

e) J_{13} ist nicht constructibel, da es im complexen Bereiche einer nicht constructibeln J_8 äquivalent war.

f) J_{14} ist im complexen Bereiche mit einer J_3 äquivalent und kann daher nicht existieren, wenn ∞^1 invariante Punkte in

Digitized by Google

einer C_3 vorhanden sind. Sie ist aber constructibel mit dem Index 2 unter den C_3 des Büschels und mit zwei festen C_3'' als invarianten Curven.

g) J_{16} ist nicht constructibel, da es im complexen Bereiche einer nicht existierenden J_8 äquivalent wird.

h) J_{17} ist nur mit $(c_i\, c_i')$ construierbar und typisch bei allen möglichen Theilungen der 8 Punkte in rationale Gruppen.

Indem ich die Bezeichnung der Fundamentalpunkte aus meinem Buche über endliche Gruppen (Berlin, Mayer u. Müller 1895) hieher übertrage, spreche ich die folgenden Theoreme aus:

Äquivalenztheorem für die involutorischen Charakteristiken.

Alle involutorischen Charakteristiken birationaler Matrixen in der Ebene können mit alleiniger Benützung gleich vielfacher verbundener Gruppen birational äquivalent gemacht werden

I. Collineationen,

II. Jonquières'schen Charakteristiken mit (ab) und irgend einer Theilung der einfachen Punkte in einzelne Punkte und Punktepaare,

III. Charakteristiken von $a_1^{\frac{n-1}{2}}\, a_2^{\frac{n-1}{2}}\, a_3^{\frac{n-1}{2}}\, a_4^{\frac{n-1}{2}}$ und irgend einer Theilung der doppelten Fundamentalpunkte in einzelne Punkte und Punktepaare,

IV. Charakteristiken von $a_1^{\frac{n}{2}}\, a_2^{\frac{n}{2}}\, a_3^{\frac{n-2}{2}}\, a_4^{\frac{n-2}{2}}$ und irgend einer Theilung der doppelten Fundamentalpunkte in einzelne Punkte und Punktepaare,

V. Charakteristiken von $\left(a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2\, a_5^2\, a_6^2\right)^5$ oder

VI. von $\left(a_1^5\, a_2^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, c\right)^6$,

VII. von $\left(c_i^3\right)^8$ $i = 1 \ldots 7$ mit irgend einer Theilung in verbundene Gruppen,

VIII. von $\left(f_1^5\, f_2^3\, d_1^4\, d_2^4\, d_3^4\, d_4^4\, d_5^4\, d_6^4\right)^{13}$,

IX. von $\left(f_1^6\, f_2^6\, e_1^5\, e_2^5\, e_3^5\, c_1^3\, c_2^3\, c_3^3\right)^{14}$,

X. von $\left(f_1^6 \ldots f_5^6\, c_1^5\, c_2^5\, c_3^5\right)^{16}$,

XI. von $\left(f_i^6\right)^{17}$ $i = 1 \ldots 8$ mit irgend einer Theilung in verbundene Gruppen,

XII. von $\left(m_1^{12}\, m_2^{12}\, h_1^8\, h_2^8\, h_3^8\, f_1^6 \ldots f_6^6\right)^{25}$,

XIII. von $\left(m_1^{12}\, m_2^{12}\, i_1^9\, i_2^9\, i_3^9\, f_1^6 \ldots f_4^6\right)^{26}$,

Digitized by Google

XIV. von $\left(\overbrace{o_1^{14}\, o_2^{14}}\ \overbrace{h_1^{8} \ldots . h_7^{8}}\right)^{29}$,

XV. von $\left(\overbrace{q_1^{16} \ldots . q_5^{16}}\ \overbrace{k_1^{10} \ldots k_4^{10}}\right)^{41}$,

XVI. von $\left(\overbrace{\tilde{\omega}_1^{30}\, \tilde{\omega}_2^{30}}\ \overbrace{u_1^{20} \ldots u_3^{20}}\ \overbrace{m_1^{12} \ldots m_3^{12}}\right)^{61}$,

alle diese mit jeder involutorischen Directrixsubstitution, welche die vorhandene Theilung in rationale Gruppen aufrecht hält.

Ich bezeichne nun als äquimultiple Variablen einer (hier stets ganzzahligen) linearen Substitution solche Variable, deren Coefficienten einander gleich sind, und zwar in jeder Zeile.

Äquivalenztheorem für die fundamentalen linearen Substitutionen.

Alle involutorischen linearen Substitutionen J mit fundamentaler Matrix können durch eben solche Substitutionen in eine von 15 typischen Formen (den eben geschriebenen Typen entsprechend) übertragen werden, und aber nur in diese, sofern die Einschränkung aufrecht erhalten wird, dass die äquimultiplen Variabeln der Transposition auf äquimultiple Variabeln der Substitutionen J fallen.

Äquivalenztheorem für die involutorischen Transformationen.

Alle involutorischen birationalen Transformationen der Ebene sind birational äquivalent

I. einer Collineation oder

II. Jonquières'schen Transformationen mit (ab) und irgend einer Directrixsubstitution des Index 2 unter den einfachen Punkten,

III. Transformationen mit allen Charakteristiken III.,

IV. Transformationen mit allen Charakteristiken IV.,

V. Transformationen 5.O. mit $\overbrace{(a_1\, a_2')}\ \overbrace{(a_2\, a_1')}\ \overbrace{(a_3\, a_4')}\ \overbrace{(a_4\, a_3')}\ \overbrace{(a_5\, a_6')}\ \overbrace{(a_6\, a_5')}$

VI. Transformationen 6.O. mit $\overbrace{(f_1\, f_2')}\ \overbrace{(f_2\, f_1')}\ (b_1\, b_1')\ (b_2\, b_2')\ (b_3\, b_3')\ (b_4\, b_4'), (c\, c')$

VII. mit $\overbrace{(f_1\, f_2')}\ \overbrace{(f_2\, f_1')}\ \overbrace{(b_1\, b_2')}\ \overbrace{(b_2\, b_1')}\ \overbrace{(b_3\, b_3')}\ \overbrace{(b_4\, b_4')}$,

VIII. mit $\overbrace{(f_1\, f_2')}\ \overbrace{(f_2\, f_1')}\ \overbrace{(b_1\, b_2')}\ \overbrace{(b_2\, b_1')}\ \overbrace{(b_3\, b_4')}\ \overbrace{(b_4\, b_3')}$,

Digitized by Google

IX. Transformationen 8.O. mit $(c_i c_i')$ und jeder Theilung in rationale Gruppen,

X. Transformationen 14. O. mit $\overbrace{(f_1 f_2')\ (f_2 f_1')}\ \overbrace{(e_1 e_1')(e_2 e_2')(e_3 e_3')}\ \overbrace{(c_1 c_1')(c_2 c_2')(c_3 c_3')}$,

XI. Transformationen 17.O. mit $(f_i f_i')$ und jeder Theilung in rationale Gruppen,

XII. Transformationen 25. *O.* mit $(m_i m_i')(h_k h_k')(f_l f_l')$ $(i=1,2;\ k=1,2,3;\ l=1,2,3,4)$,

XIII. Transformationen 26.O. mit $(m_i m_i')(i_k i_k')(f_l f_l')$ $(i=1,2;\ k=1,2,3;\ l=1,2,3,4)$,

XIV. Transformationen 29.O. mit $(o_i o_i')(h_k h_k')$ $(i=1,2;\ k=1,2,\ldots 7$,

XV. Transformationen 41.O. mit $(q_i q_i)(k_l k_l)$ $(i=1,\ldots 5;\ k=1,..4)$,

XVI. Transformationen 61.O. mit $(\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i')(u_k u_k')(m_l m_l')$ $i=1,2;\ k=1,2,3;\ l=1,2,3,4)$.

In den Transformationen XII. bis XVI. müssen, wenn sie typisch bleiben sollen, die gleich vielfachen Punkte stets eine einzige rationale Gruppe bilden.

Digitized by Google

Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren.

Von **S. Kantor.**

Der Begriff, aus welchem sich der Grundgedanke der vorhergehenden Arbeit sowie der gegenwärtigen entwickelt, ist der der rational bestimmbaren Transformation T. Sind unter den Fundamentalpunkten von T irrationale Punkte, so ist T irrational gegeben (in Bezug auf den ursprünglichen Rationalitätsbereich), aber in dem Charakter der Birationalität von T ändert dies eigentlich nichts, indem die Coordinaten des entsprechenden Punktes doch wenigstens durch Approximationsmethoden gefunden werden können, sie werden incommensurabel und imaginär, aber doch eindeutig sein. Eine Beeinträchtigung der Birationalität tritt ein, wenn es sich um Schaaren von Transformationen handelt.

Soll T rational bestimmt sein, so dürfen sich unter ihren Fundamentalpunkten nur rationale Gruppen finden. So viel ich weiß, hat man sich den in §. 1 vorhergehender Arbeit erwähnten Begriff eines rationalen Systemes, das eine rationale Gruppe irrationaler Punkte zu vielfachen Punkten hat, geometrisch nie recht klar gemacht. Darum ist auch bisher nicht bemerkt worden, dass unter dem Gesichtspunkte der rationalen Ausführung aller Operationen, also unter Verwendung von rational bestimmten Transformationen, das so oft citierte und leider eben in manchen Fällen mit Unrecht verwendete Nöther'sche Zerlegungstheorem zu gelten aufhört und unter dieser Auffassung ihm nur mehr ein numerischer Wert zukommt.

Man steht so vor der Frage:[1]) Ist die Anzahl der nicht rational zerlegbaren birationalen Transformationen eine endliche oder eine unendliche und gestatten sie im letzteren Falle eine Classeneintheilung? Ich bin vor mehreren Jahren auf diese Frage ge-

[1]) Ebenso hatten sich Gauss und Dirichlet, die Entdecker der Theorie der algebraischen Zahlen, als erstes Problem (cf. Theoria residuorum biquadraticorum) das stellen müssen, die Primdivisoren im algebraischen Körper zu finden. Man sehe Cap. IV dieser Arbeit.

Digitized by Google

stoßen, als ich im R_3 und R_r birationale Transformationen untersuchte, welche sich aus ∞^k birationalen Transformationen unter R_{r-k}, R'_{r-k} zusammensetzen.

An die Stelle des Nöther'schen Zerlegungstheormes aus Math. Ann. III. und V. setze ich jetzt folgendes

Fundamentaltheorem:[1])

Jede rational gegebene birationale Transformation unter zwei Ebenen kann ohne jegliche neue Irrationalität in Primfactoren folgender Arten zerlegt werden:

1. Transformationen n.Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte, wo alle einfachen Punkte eine rationale Gruppe bilden,

2. Transformationen n.Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte, wo alle einfachen Punkte bis auf einen eine rationale Gruppe bilden,

3. Transformationen n.Ordnung mit vier $(n-1):2$-fachen Punkten und $(n-1):2$ doppelten, welche je eine einzige rationale Gruppe bilden, oder

4. wo die vier ersten sich in zwei Paare sondern,

5. quadratische Transformationen, deren drei Hauptpunkte eine rationale Gruppe bilden,

6. Transformationen 5.Ordnung mit 6 Doppelpunkten, welche eine rationale Gruppe bilden,

7. Transformationen 8.Ordnung mit 7 Doppelpunkten, welche eine rationale Gruppe bilden, oder

8. sich in ein rationales Paar und ein rationales Quintupel sondern,

9. Transformationen 13. Ordnung mit 2 sechsfachen und 6 vierfachen Punkten, welche je eine rationale Gruppe bilden, oder

10. wo die 6 sich in zwei rationale Tripel sondern,

11. Transformationen 16. Ordnung mit 5 sechsfachen und 3 fünffachen Punkten, welche je eine rationale Gruppe bilden,

12. Transformationen 17.Ordnung mit 8 sechsfachen Punkten, welche eine rationale Gruppe bilden,

13. Transformationen 25.Ordnung[2]) mit 2 zwölffachen, 3 achtfachen und 4 sechsfachen Punkten, welche je eine rationale Gruppe bilden,

14. Transformationen 29. Ordnung mit 2 vierzehnfachen und 7 achtfachen Punkten, welche je eine rationale Gruppe bilden,

---

[1]) Cf. S. Kantor, C. R. de l'Académie des Sciences Paris 29 mars 1898.

[2]) Statt dieser könnte ich auch T_{29}, wo $(A)_7$ in rationale $(A)_3$ und $(A)_4$ zerfällt, anwenden, wenn es nicht auf die möglichst niedrige Ordnung ankommt.

Digitized by Google

15. Transformationen 41. Ordnung mit 5 sechzehnfachen und 2 zehnfachen Punkten, welche je eine rationale Gruppe bilden,

16. Transformationen 61. Ordnung mit 2 dreißigfachen, 3 zwanzigfachen und 4 zwölffachen Punkten.

Hiebei sind diese Transformationen nach Art, nach Aufeinanderfolge und nach gegenseitiger Lage der Fundamentalsysteme eindeutig bestimmt.

Cap. I. Erster Beweis des Theorems.

1. Ein Paar von Curvensystemen. Theorem I. Sind $n, \alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ Ordnung und Vielfachheiten der homaloidalen Curven in E, $n', \alpha_1', \ldots, \alpha_\sigma'$ jene in E', so wird das Curvensystem mit dem Singularitätencomplexe $n+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ in das mit $n+1, \alpha_1', \ldots, \alpha_\sigma'$ verwandelt.

Diese Curvensysteme sollen N, N' heißen. Der Beweis folgt daraus, dass die Complexe

$$E \begin{matrix} 1, 0, \ldots, 0 \text{ und } n, \alpha_1', \ldots, \alpha_\sigma' \\ n, \alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma \text{ und } 1, 0, \ldots, 0 \end{matrix} E'$$

sich je entsprechen, also auch die Summe der ersten der Summe der zweiten Complexe entspricht.

Das Geschlecht von N ist $p = n-1$, die Dimension $u = n+4$, der Rang $k = 2(n+1)$.

Rein algebraisch folgt der Beweis daraus, dass unter N, N' die Curven sind, deren Punkte mit ihren entsprechenden je durch einen festen Punkt der Ebene laufen und die einander entsprechen müssen in der Transformation T.

2. Verminderung der Functionen φ. Auf N, N' wende ich dieses Princip[1]) an, bilde also die Reihe der successiven adjungierten Curven sowohl in E als in E'. Dann wird T die

[1]) In seiner Arbeit über die stetigen Gruppen birationaler Transformationen in den Rendiconti der Acc. dei Lincei 1893 wendet F. Enriques mein Princip der Verminderung der φ genau zu dem von mir gelehrten Zwecke an. Obzwar er es mir zuschreibt, meint er, dass es erst bewiesen werden müsse. Wenn er aber meint, dass Castelnuovo einen Beweis geliefert habe, ist das irrig. Denn gerade aus dem obigen Fundamentalsatze ist deutlich ersichtlich, dass der Castelnuovo'sche Versuch, der wie alle Untersuchungen Castelnuovos einen entschieden algebraischen Charakter hervorkehrt, und gerade hierin seinen Wert sucht, als durchaus mislungen bezeichnet werden muss, da ja eben unter dem rein algebraischen Gesichtspunkte die von ihm angewendete Zerlegung in quadratische Factoren nicht zugelassen werden kann. Einen ersten, von jeder Zerlegung unabhängigen Beweis, dass die adjungierten φ_{n-3} durch birationale Transformationen in die adjungierten φ_{n-3}' transformiert werden müssen, habe ich in der Preisschrift und Cr. J. B. CXIV gegeben.

Ich erwähne nebenher, dass auch seine eigene Arbeit durch mein obiges Fundamentaltheorem beinflußt wird, wenn alle Irrationalitäten vermieden werden sollen.

Digitized by Google

homaloidal adjungierte Curve von N in die homaloidal adjungierte Curve von N' verwandeln.

Theorem II. Die Curven $C_{n-2}(\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1)$ zerfallen nur für $\alpha_1 = n-1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_\sigma = 1$. Beim 2. Schritte fallen aber stets die Fundamentalgeraden von T in E ab.

Es habe die abgesonderte Curve Z den Singularitätencomplex $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_\sigma$. Dann muss $(n-2)\xi - \Sigma(\alpha_i - 1)\xi_i < 0$ sein, also $n\xi - \Sigma\alpha_i\xi_i < 3\xi - \Sigma\xi_i - \xi$ oder $n\xi - \Sigma\alpha_i\xi_i < u - p + 1 - \xi$, wo u und p sich auf Z beziehen. u ist nach meinem Beweise aus Act. Math. XIX p. entweder 0 oder 1. Soll also $n - \Sigma\alpha_i\xi_i$, welches die Anzahl der Schnittpunkte von Z mit den homaloidalen Curven ist, nicht < 0 sein, so muss $p = 0, \xi = 1$ sein und $u = 1$. Wäre $n\xi - \Sigma\alpha_i\xi_i < 0$, so würde Z schon von den homaloidalen Curven abfallen.[1])

Verbindet ferner eine Gerade g zwei α_i-, α_k-fache Punkte, wo $\alpha_i + \alpha_k = n$, so schneidet sie C_{n-5} in $\alpha_i - 2 + \alpha_k - 2 = n - 4$ Punkten, trennt sich also ab.

Corollar. Die C_{n-2} haben $p = n + 2 - \sigma$, $u = n - 2$. Die C_{n-5} — wenn keine Fundamentalgeraden in E vorhanden sind — haben $p = n + 14 - 3\sigma$; $u = n + 1 - \sigma$.

3. Der Fall $p = 0$. Die Reihe der φ wird fortgesetzt, bis ich entweder zu Curven mit $p = 0$ oder $p = 1$ komme. Hat ein System $p < 0$, so verwende ich nur das variable System der Bestandtheile und setze von diesem ab das Verfahren fort. Ist nun gleichzeitig mit $p = 0$ $u = 2$, so ist dieses gleichzeitig in E und E' der Fall. Die beiden Curvensysteme N_a, N_a' (die adjungierten zu N) gestatten dann durch zwei Transformationen, deren Ordnung gleich der ihren und daher gewiss $< n$, in Geradensysteme übertragen zu werden.

Ist $u > 2$, so nehme ich aus N_a einfach ein System $u = 2$ heraus und bilde das entsprechende unter N_a'. Dann kann ich diese wieder in zwei Geradensysteme übertragen.

Ist $u = 1$, so habe ich zwei entsprechende Büschel rationaler Curven, deren Ordnungen $< n$ sind. Bereits im vorhergehenden Aufsatze habe ich bemerkt, dass diese durch successive Transformationen, deren Ordnungen kleiner als die ihren sind, auf ihre Typen gebracht werden können. Cf. hiezu die Beweismethode des Cap. III.

4. Der Fall $p = 1$. Wenn ich in der Reihe der successiven adjungierten Systeme N_a in E also auch in E' zu einem linearen Systeme elliptischer Curven komme, so verwende ich das Re-

[1]) Der Beweis des Textes hat eine viel weitere Tragweite als für den obigen Fall. Cf. Cap. III. dieser Arbeit.

Digitized by Google

sultat der vorhergehenden Arbeit, dass diese Systeme stets durch Transpositionen, deren Ordnung kleiner als die ihre ist, auf ihre Typen gebracht werden können.

5. Das Princip des Beweises. Es seien nun N_a, N_a' ein Paar der eben erwähnten Curvensysteme, E, E' seien die Transpositionen, welche resp. N_a, N_a' in ihre Typen übertragen, Y_a, Y_a', und es sei K die Transformation, welche durch die Zusammensetzung entsteht, also

$$K = \mathrm{E}\, T \mathrm{E}'^{-1}.$$

Dann transformiert K die Curven des Systemes Y_a in die Curven des Systemes Y_a'. Hier kann E, E' je selbst ein Product sein. Da ferner aus dieser Gleichung folgt

$$T = \mathrm{E}^{-1} K \mathrm{E}^1$$

und E sowie E' nach Art. 3 und 4 ihre Ordnungen oder die Ordnungen ihrer Factoren $< n$ haben, so wird T zerlegt sein: 1. in Transformationen, deren Ordnungen kleiner als ihre eigenen sind und 2. in eine Transformation vorher bestimmten Natur, welche nämlich zwei typische Curvensysteme untereinander transformiert.

Wird auf E, E' dasselbe Verfahren angewendet, so erhalten wir endlich

$$T = K_1, \ldots, K_f$$

wo $K_1, \ldots, K_f$ Factoren vorher bestimmter Classen sind, also als erste Form des Zerlegungstheoremes:

Theorem III. Jede birationale Transformation lässt sich in Factoren zerlegen, welche von der Art sind, dass sie zwei typische Systeme von rationalen oder elliptischen Curven unter einander verwandeln.

6. Die Transformationen für $p = 0$. Soll K ein Geradenbüschel in ein anderes überführen, so muss sie eine Jonquières'sche Transformation sein. Sei unter den einfachen Punkten eine rationale Gruppe von δ Punkten, dann wird eine Zusammensetzung mit der Transformation $(\delta : 2) + 1^{\text{ter}}$ Ordnung welche $\alpha^{\delta:2}$ und jene einfachen Punkte besitzt, eine Transformation der Ordnung $n - \delta$ liefern, oder wenn δ ungerade, wird dies $C_{(\delta+1):2}\, \alpha^{(\delta+1):2}$ thun. Die Zerlegung ist also nur dann nicht möglich, wenn alle einfachen Punkte oder alle bis auf einen eine rationale Gruppe bilden. Hieraus der 1. und 2. Typus.

Soll K ein Kegelschnittbüschel mit einem rationalen Basisquadrupel in ein anderes überführen, so muss sie die Basispunkte zu $(n-1):2$-fachen Punkten und also weitere $(n-1):2$ Doppelpunkte haben. Hat man eine rationale Gruppe unter weniger als

Digitized by Google

$(n-1):2$ dieser, so vermindert eine Transformation derselben Art, über diese Gruppe und die vier höchsten Punkte verlegt, die Ordnung. Hieraus entsteht der 3. und 4. Typus, da diese Transformation auch unzerlegbar bleibt, wenn zwei rationale Basispunktepaare vorhanden sind.

Für zwei rationale Paare besteht außer der vorigen noch $\left(A_1^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}} A_3^{\frac{n-2}{2}} A_4^{\frac{n-2}{2}}\right)^n$, welche aber stets einen einzelnen einfachen Punkt besitzt, daher durch quadratische Transformation auf niedere Ordnung gebracht wird.

7. Die Transformationen für $p=1$. Typen 3. Ordnung. Die Transformationen, welche zwei Büschel von C_3 unter einander überführen, können nicht mehr als 9 Fundamentalpunkte haben (Cr. J. Bd. CXIV). Ist ein Punkt $(A)_1$ rational gegeben[1]) und der höchste Fundamentalpunkt, so kann mit $(A_1^4\ A_2 \dots A_9)^5$ reduciert werden. Sind die übrigen Punkte zu einer Gruppe verbunden und ist A_1 der niederste, so kann $(A_2^6 \dots A_7^6)^{17}$ zur Zerlegung benützt werden. Mit $(A)_i$ bezeichne ich im Folgenden eine rationale Gruppe von i irrationalen Punkten.

α) Sind zwei Punkte ein rationales Paar $(A)_2$ und die übrigen eine $(A)_7$, so entsteht die Frage, welche Transformationen überhaupt über $(A)_2$ $(A)_7$ bestehen können. Dieselben sollen hier bestimmt werden. Es bestehen die Relationen

$$2\alpha + 7\beta = 3n - 3$$
$$2\alpha^2 + 7\beta = n^2 - 1$$

woraus

$$\left(-\frac{1}{3}(n-1)+\beta\right)\sqrt{63} = \pm\sqrt{7(n-1)^2-(7n^2+11-18n)} = 2\sqrt{n-1};$$

somit

$$\alpha = \frac{1}{3}(n-1) \pm \frac{1}{3}\sqrt{q} \qquad \beta = \frac{1}{3}(n-1) \pm \frac{2}{3}\sqrt{q}$$

oder

$$\alpha = \frac{k}{3}(7k \pm 1) \qquad \beta = \frac{k}{3}(7k \pm 2) \qquad n = 7k+1.$$

Unter diesen Lösungen ist $(A_1^3 \dots A_7^3)^8$ und die neue Transformation

$$\overbrace{\left(A_1^{14} A_2^{14}}\ \overbrace{A_3^8 \dots A_9^8}\right)^{29}$$

mit den Fundamentalcurven
$$\begin{cases} A_1^7\ A_2^6\ A_3^4 \dots A_9^4 \\ A_1^6\ A_2^7\ A_3^4 \dots A_9^4 \\ A_1^4\ A_2^4\ A_i^3\ A_3^2 \dots A_{i-1}^2 A_{i+1}^2 \dots A_9^2 \end{cases}$$

[1]) Zwei C_3-Büschel mit einer einzigen rationalen Gruppe $(A)_9$ gestatten nur Collineationen untereinander, wenigstens unter der gegenwärtigen Auffassung.

Digitized by Google

Alle anderen Lösungen lassen sich aus diesen beiden zusammensetzen.[1])

Die Transformation 29.O. erweist sich als zerlegbar, wenn eine der beiden gleich vielfachen Gruppen in zwei rationale zerfällt, und als Factor tritt eben jene T_{25} auf, welche gleich jetzt in anderer Art bestimmt werden soll.

Wenn die übrigen 7 Punkte so zerfallen, dass eine $(A)'_3$ die niedersten Fundamentalpunkte enthält, so erfordert wegen $2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3(n-1)$ die Bedingung $8n - 3(2\alpha_1 + 5\alpha_2) < n$ nur, dass $n > 3\alpha_3 + 5$ sei. Wegen $\alpha_1 + 2\alpha_2 > n$ ist $2\alpha_3 + 4\alpha_2 < 2n - 3$, also $\alpha_3 + 2\alpha_2 < n - \frac{3}{2}$, so dass unsere Bedingung erfüllt ist, wenn $\alpha_2 - \alpha_3 > 1$. Wenn aber $\alpha_2 - \alpha_3 = 1$ sein sollte, so zeigt die Einsetzung in die Relation $\Sigma \alpha_i^2 = n^2 - 1$, dass $2\alpha_1 + \alpha_3 > n + 1$ sein muss, so dass auch dann der Bedingung genügt ist. $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$ ist also Factor.

Wenn eine $(A)_3$ die niedrigsten Fundamentalpunkte enthält, so ist $(A_1^2 \ldots A_6^2)^5$ ein Factor, wenn $5n - 2(2\alpha_1 + 4\alpha_2) < n$ oder $n < \alpha_1 + 2\alpha_2$, was wegen der Bedingung $2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 3(n-1)$ erfordert $n > 3\alpha_3 + 3$, was stets erfüllt ist.

Wenn $(A)_2$ die höchste, $(A)_5$ die niedrigste Gruppe ist, so reduciert stets $(A_1^5 \ldots A_4^5 A_5^2 \ldots A_9^2)^{11}$, ist also Factor.

Wenn $(A)_3$ die höchste Gruppe ist, reduciert ersichtlich $(A_1 A_2 A_3)^2$.

β) Sind aber $(A)_2 (A)_3 (A)_4$ vorhanden, so versagen die bisherigen Zerlegungen. Wenn von den Fundamentalsystemen T eines die Gerade $A_1 A_2$ in sich transformiert, so muss es auch den Kegelschnitt $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)^2$ in sich transformieren, weil keine andere Curve die C_3 in 1, die $A_1 A_2$ in keinem Punkte schneidet. Ich werde unter $n.10$ beweisen, dass allein eine T_{25} dieser Bedingung genügt. Wenn eine dieser T die Gerade $A_1 A_2$ in den Kegelschnitt $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)^2$ transformiert, so muss sie also auch diese C_2 in $A_1 A_2$ transformieren und in $n.10$ werde ich beweisen, dass außer $(A_3 A_4 A_5)^2$ also quadratischer Transformation nur eine T_{26} dieser Bedingung genügt. Es kann also unter den sämmtlichen T über $(A)_2 (A)_3 (A)_4$ nur zwei geben, welche $A_1 A_2$ in dieselbe Curve C_α und ebenso nur 2, welche $(A_1 \ldots A_5)^2$ in dieselbe Curve C_β transformieren. Sind sie nämlich resp. $T_n, T_{n'}$ und $T_{n'}, T_{n_1}^{-1}$, so ist $T_{n'} = T_{25} \cdot T_n$ und $T_{n_2}^{-1} = T_{25} \cdot T_{n'}$. Es hat nun sicher von

[1]) Die Zusammensetzung jeder der beiden Lösungen für k mit $(A_1^3 \ldots A_7^3)^8$ liefert je eine Lösung für $k-1$ und $k+1$, die Zusammensetzung jener selben Lösungen mit $(\ldots)^{29}$ liefert je eine Lösung für $k-2$ und $k+2$. Auf diese Art erklärt sich meine Behauptung im Texte. Es ist zu beachten, dass diese Lösungen zwei getrennte Mannigfaltigkeiten bilden, was genau dem Umstande entspricht, dass die Anzahl der Variabeln in den fundamentalen linearen Substitutionen gleich 10 ist, also gerade. Diese fundamentalen Substitutionen sind aber (Cr. J. CXIV.) solche, welche eine quadratische Form in sich verwandeln.

Digitized by Google

den beiden T, welche $A_1 A_2$ resp. $(A_1 \cdots A_5)_2$ in dieselbe C_α transformieren, die zweite die niedrigste Ordnung, also $n_1 < n^1$. Es ist nach dem Gesagten

$$T_{25} \cdot T_{n^1} \cdot T_{n_1} = T_{26} \text{ oder } T_2$$

also

$$T_{n^1} = T_{25}^{-1} T_{26} T_{n_1}^{-1} \text{ oder } T_{25}^{-1} T_2 T_{n_1}^{-1}$$

somit T_{n^1} auf niedrigere Ordnung reduciert, d. h. alle Fundamentalsysteme über $(A)_2 (A)_3 (A)_4$ lassen sich zerlegen mit Ausnahme von T_{25} und T_2, da $T_{26} = T_{25} \cdot T_2$.

γ) Sind weiter zwei Gruppen $(A)_4 (A)_5$ vorhanden, so entsteht die Frage nach den Fundamentalsystemen über $(A)_4 (A)_5$. Es bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} 5\alpha + 4\beta &= 3n - 3 \\ 5\alpha^2 + 4\beta^2 &= n^2 - 1, \end{aligned}$$

woraus

$$6\beta - 2(n-1) = \pm \sqrt{10(n-1)},$$

und endlich

$$\alpha = \frac{k}{3}(10k \mp 4), \quad \beta = \frac{k}{3}(10k \pm 5) \quad n = 10k^2 + 1.$$

Unter den Lösungen befindet sich $n = 11$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, welche als specieller Fall hier unter $n.6$ gehört, und weiter die neue Transformation 41. Ordnung

$$(\overbrace{A_1^{16} A_2^{16} A_3^{16} A_4^{16} A_5^{16}} \overbrace{A_6^{10} A_7^{10} A_8^{10} A_9^{10}})$$

mit den Fundamentalcurven

$$\begin{cases} A_i^7 A_k^6 A_l^6 A_m^6 A_n^6 A_6^4 \cdots A_9^4 \\ A_1^4 \cdots A_5^4 A_i^3 A_k^2 A_l^2 A_m^2. \end{cases}$$

Aus diesen beiden lassen sich alle anderen zusammensetzen.[1]) Das Fundamentalsystem T_{41} erweist sich sofort als zerlegbar, wenn eine der beiden Gruppen in zwei rationale zerfällt.

Sind nun allgemein $(A)_4$ die höchsten, so reduciert T_{11}, sind $(A)_5$ die höchsten, so reduciert T_{41}, wie eine den bisherigen analoge Rechnung mit Ungleichungen sofort beweist.

---

[1]) Wird jede der beiden Lösungen für k mit der Transformation 11. Ordnung zusammengesetzt, so entstehen je eine Lösung für $k-1$ und $k+1$; werden jene selben Lösungen mit der Transformation T_{41} zusammengesetzt, so entsteht je eine Lösung für $k-2$ und $k+2$. So erklärt sich meine Behauptung im Texte.

Digitized by Google

δ) Sind weniger als 9 Punkte vorhanden, ist also das $\infty^{u>1}$-System von C_3 zu reproducieren, so handelt es sich um die Discussion der Zerlegbarkeit derjenigen 29 Fundamentalsysteme, welche ich im IV. Theile meiner Preisschrift gegeben habe. Das Resultat sind $n.6$ bis 12 des Fundamentalsatzes oben.

8. Der Fall $p=1$. Typen 4.O. *a*) Sind A_1, A_2 resp. α_1-, α_2-fach und $\alpha_1 > \alpha_2$, so reduciert $(A_1^4 A_2 \dots A_{10})^6$ wegen $6n-5\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{10}=6n-n\alpha_1-3(n-1)=3n+3-4\alpha_1$, solange $\alpha_1-\alpha_2>2$. Es ist nun zu beachten, dass $\alpha_1+\alpha_2=n-1$.

Aber $(A)_3$, also $\alpha_3=\dots=\alpha_{10}$ ist für $\alpha_1-\alpha_2 \geqq 2$ nicht möglich, wie die Einsetzung von $(n-1):4$ für $\alpha_3 \dots \alpha_{10}$ und sei es $n:2$, $(n-2):2$ oder $(n+1):2$, $(n-3):2$ für α_1, α_2 in die Relation $\Sigma\alpha^2=n^2-1$ lehrt.

Ist $(A)_2$ die nächst hohe Partialgruppe von $(A)_8$, so liefert $(A_1^2 A_2 A_3 A_4)^3\, 3n-2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=3n:2+1-2\alpha_3$, also Reduction, wenn $\alpha_3>(n+2):4$. Nun ist $\sum_3^{10}\alpha_i=2(n-1)$, also α_3 wegen $\alpha_3>\alpha_4$ sicher $>(n-1):4$, also mindestens $(n+3):4$, also auch größer als $(n+2):4$. Es ist also hier $\alpha_1-\alpha_2 \leqq 2$ zulässig.

Ist $(A)_4$ die nächst hohe Partialgruppe von $(A)_8$, so liefert $(A_1^3 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)^4$ gemäß einer analogen Rechnung eine Zerlegung. Für $(A)_6$ liefert dann $(A_1^4 A_2 \dots A_8)^5\, 5n-4\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_8=4n+1-3\alpha_1-6\alpha_3$, was schon für $\alpha_1=n:2$ und $\alpha_3=(n+1):4$, also die Minimalwerte, $<n$ wird.

b) Sind A_1, A_2 ein Paar $(A)_2$, so kann nicht ferner $(A)_8$ stattfinden, weil aus $2\alpha+8\beta=3n-2$ und $2\alpha^2+8\beta^2=n^2-1$ folgt $20\beta=6(n-1)\pm\sqrt{n^2-1-90(n-1)^2}$.

Ist $(A)_2'$ die niederste Partialgruppe von $(A)_8$, so liefert $(A_1^6 A_2^6 A_3^4 \dots A_8^4)^{13}\, 13n-12\alpha_1-24\alpha_2<n$, wenn $n<\alpha_1+2\alpha_2$, also $\alpha_2>(n+1):4$. Nun ist wegen $\sum_3^{10}\alpha_i=2(n-1)$ gerade $(n+1):4$ der Minimalwert, es bliebe also dieser zu widerlegen, was durch Einsetzung von $\alpha_1=(n-1):2$, $\alpha_2=(n+1):4$, $\alpha_3=(n-7):4$ in $2\alpha_1^2+6\alpha_3^2+2\alpha_2^2=n^2-1$ geschehen kann.

Ist $(A)_4'$ die niederste Partialgruppe von $(A)_8$, so liefert $(A_1^2 \dots A_6^2)^5\, 5n-2\alpha_1-8\alpha_2<n$, wenn $n<\alpha_1+2\alpha_2$, also $\alpha_2>(n+1):4$. Auch hier liefert dieser Minimalwert Widerspruch wegen der Einsetzung $\alpha_1=(n-1):2$, $\alpha_2=(n+1):4$, $\alpha_3=(n-3):4$ in die genannte Relation. Übrigens erhält man für $(A)_2$ $(A)_4$ $(A)_4'$ die folgenden Fundamentalsysteme $k^2:2$, $k(k+2):4$, $k(k-2):4$, $n=k^2+1$.

Digitized by Google

c) Ist $(A)_3\ (A)_5$ die Theilung der $(A)_8$, so beachtet man zunächst, dass $(A_1 \cdots A_5)^2$ die einzige Curve ist, welche die C_4 des Büschels in einem Punkte schneidet. T muss sie also in sich transformieren. Hieraus folgt sofort $\alpha_2 = (n-1):3$ und endlich $\alpha_3 = (n-1):5$. Eingesetzt wie soeben liefert dieses

$$(n-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = n^2 - 1$$

woraus $n = 61$, also die neue Transformation

$$\overbrace{\left(A_1^{30}\,A_2^{30}\right)}\overbrace{A_3^{20}\,A_4^{20}\,A_5^{20}}\overbrace{A_6^{12}\,A_7^{12}\,A_8^{12}\,A_9^{12}\,A_{10}^{12}}^{61}$$

mit den Fundamentalcurven

$$\begin{cases} A_1^{16}\,A_2^{15}\,A_3^{10}\,A_4^{10}\,A_5^{10}\,A_6^{6} \cdots A_{10}^{6} \text{ der 30. O.} \\ A_1^{10}\,A_2^{10}\,A_3^{7}\,A_4^{6}\,A_5^{6}\,A_6^{4} \cdots A_{10}^{4} \text{ der 20. O.} \\ A_1^{6}\,A_2^{5}\,A_3^{4}\,A_4^{4}\,A_5^{4}\,A_6^{4}\,A_7^{2} \cdots A_{10}^{2} \text{ der 12. O.} \end{cases}$$

Über $(A)_2\,(A)_3\,(A)_5$ können durch Zusammensetzung mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \ldots\ \alpha_9 = 6$, $n = 17$ wohl noch andere gewonnen werden; aber T_{61} ist die einzige Transformation, welche die C_4 untereinander transformiert.

9. Der Fall $p = 1$. Typen 5. O. Nach den bisherigen Artikeln ist es nur nöthig, den Fall des Büschels zu untersuchen, also Fundamentalsysteme über $(A)_5\,(A)_5$. Ich werde zeigen, dass solche nicht existieren. Es bestehen

$$\begin{aligned} 5\alpha + 5\beta &= 3(n-1) \\ 5\alpha^2 + 5\beta^2 &= n^2 - 1, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} 10\,\alpha &= 3(n-1) \pm \sqrt{(n-1)(n+19)} \\ 10\,\beta &= 3(n-1) \mp \sqrt{(n-1)(n+19)}. \end{aligned}$$

Aber $(n-1)(n+19)$ kann kein vollständiges Quadrat sein, weil, wenn man $n - 1 = 2q^2$ oder $4q^2$ oder $5q^2$ oder $10q^2$ setzt, auch q^2+10, q^2+5, q^2+4 oder q^2+2 ein Quadrat sein müsste.

10. Der Fall $p = 1$. Typen 6. O. Die Transformation muss die beiden Fundamentalcurven C_1, C_2 entweder jede in sich transformieren oder vertauschen, also entweder *a*) zwei $(n-1):2$-fache, drei $(n-1):3$-fache Punkte haben und kann dann nicht mehr sechs $(n-1):6$-fache sondern nur 4 besitzen, was

$$6(n-1)^2 + 4(n-1)^2 + 3(n-1)^2 = 12(n^2-1)$$

also

$$n = 25$$

Digitized by Google

gibt, das ist

$$\left(\overbrace{A_1^{12}}\, A_2^{12}\, \overbrace{A_3^8\, A_4^8}\, A_5^8\, \overbrace{A_6^6 \cdots A_9^6}\right)^{25}$$

mit

$$\left\{\begin{array}{l} A_1^6\, A_2^5\, A_3^4\, A_4^4\, A_5^4\, A_6^3 \cdots A_9^3 \\ A_1^5\, A_2^6\, A_3^4\, A_4^4\, A_5^4\, A_6^3 \cdots A_9^3 \\ A_1^4\, A_2^4\, A_i^3\, A_k^2\, A_l^2\, A_6^2 \cdots A_9^2 \\ A_1^3\, A_2^3\, A_3^2\, A_4^2\, A_5^2\, A_i^2\, A_k\, A_l\, A_m \end{array}\right.$$

als Fundamentalcurven, oder *b*) T hat zwei $(n-2):2$-fache, drei $(n+1):3$-fache, vier $(n-2):4$-fache Punkte haben, $[(A)_6$ ist wieder nicht möglich], was

$$9\,(n-2)^2 + 4\,(n+1)^2 = 12\,(n^2-1),$$

also neben $n=2$, $n=26$ gibt, das ist

$$\left(\overbrace{A_1^{12}}\, A_2^{12}\, \overbrace{A_3^9\, A_4^9}\, A_5^9\, \overbrace{A_6^6 \cdots A_9^6}\right)^{26}$$

mit den transformierten Fundamentalcurven der vorhergehenden.

Diese T_{26} ist als Fundamentalsystem allerdings zerlegbar, indem $(A_3\, A_4\, A_5)^2$, T_{25} Factoren sind. Aber sie begegnet als involutorischer Typus. Siehe hier über die vorhergende Arbeit.

Die Fälle, wo $A_6 \cdots A_{11}$ sei es $(A)_4\,(A)_2$, sei es $(A)_3\,(A)_3$, $(A)_2\,(A)_2$ bilden, werden wie unter 8. behandelt.

Hiemit sind $n.13$—16 des Fundamentalsatzes bewiesen.

Cap. II. Zweiter Beweis des Theorems.

Theorem I. In keinem homaloidalen Curvensysteme kann die Gruppe höchster Vielfachheit mehr als 8 Punkte enthalten.

Denn ist h_1[1]) die Vielfachheit dieser Punkte, so hat man $3h_1 > n$, also $9h_1 > 3n$, was nicht sein darf, da $\Sigma\,\alpha_i = 3n-3$.

Theorem II. Enthält die Gruppe höchster Vielfachheit nur einen Punkt, so enthält T jedenfalls einen Jonquières'schen Factor.[2])

---

[1]) Ich bezeichne in dieser Arbeit mit $\alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_\sigma$ die sämmtlichen σ vorhandenen Vielfachheiten. Von diesen können die ersten σ_1, dann die nächsten σ_2, u. s. w endlich σ_l einander gleich sein. Diese untereinander verschiedenen l Werte bezeichne ich mit $h_1 \ldots h_l$. Es ist $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_l = \sigma$.

[2]) Implicite sind diese Discussionen auch in Cap. I. enthalten, nur müssen sie dort bloß für $\sigma = 9$, hier aber für jedes willkürliche σ durchgeführt werden.

Man bemerke noch, dass, wenn $\sigma_2 = 0$, σ_1 nur 3, 6, 7, 8 sein kann; wenn aber erst $\sigma_3 = 0$, so ist $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2\,(n-1)$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 6, 7$; $\sigma_1 = 3, 4$, $\sigma_2 = 1, 5, 6, 7, 8$ $\sigma_1 = 4$, σ_2 willkürlich; $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 3, 4$; $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 3, 6, 7, 8$; $\sigma_1 = 7$, $\sigma_2 = 2, 3, 6, 7, 8$; $\sigma_1 = 8$, $\sigma_2 = 1, \ldots, 8$. Die sämmtlichen Fundamentalsysteme, welche dieselben Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_l$ besitzen, sind durch eine Anzahl Parameter ausdrückbar, welche die eben erwähnte Übereinstimmung zwischen $\sigma = 9$ und allgemeine σ bewirken. Solche Parameterdarstellungen rühren von mir her (Cr. J. CXIV).

Digitized by Google

Sind $A_2^{h_2}, \cdots, A_{\sigma_2+1}^{h_2}$ die Punkte der zweiten Gruppe, $A_{\sigma_3+2}^{h_3}$, $\cdots A_{\sigma_3+\sigma_3+1}^{h_3}$ jene der dritten Gruppe, so ist $n < h_1 + 2h_2$, also $2n < 2h_1 + 4h_2$, u. s. w. Daher wird, wenn σ_2 gerade ist, die Transformation $(A_1^{\sigma_2:2} A_2 \cdots A_{\sigma_1+1})^{(\sigma_2:2)+1}$ ein Factor T sein.

Im Falle, wo σ_2 ungerade, sei zunächst $\sigma_2 = 3$. Dann liefert die numerische Transformation $(A_1 A_2 A_3)^2$ das System $(n - h_1 - h_2, n - h_1 - h_2, n - 2h_2, h_2 h_3, \cdots)^{2n-h_2-2_2}$ und nun ist jedenfalls $n - h_1 - h_2 < h_2$ und auch $< n - 2h_2$; wenn ferner $n - h_1 - h_2 > h_3$, so sind h_2, $n - 2h_2$, $n - h_1 - h_2$ die höchsten Punkte in E', also müsste ihre Summe $2n - h_1 - h_2 >$ als die Ordnung in E' sein, was aber nicht ist, also — und dies gilt nun, wie die gleiche Rechnung lehrt, auch für $\sigma_2 = 2\mu + 1 > 3$, — ist entweder $n < h_1 + h_2 + h_3$ oder ist noch ein h_2 vorhanden. Im letzteren Falle aber wird σ_2 gerade. Im ersteren Falle wendet man, falls σ_3 ungerade, eine Transformation $(A_1^{(\sigma_2+\sigma_3):2} A_2 \cdots A_{\sigma_2+\sigma_3+1})^{(\sigma_2+\sigma_3):2+1}$ an, um hiemit einen Factor von T zu haben. Ist aber σ_3 gerade und auch $n < h_1 + h_2 + h_3$ mit σ_2 ungerade[1]), so lehrt eine einfache numerische Transposition, dass entweder die Transposition $(A_1^{(\sigma_2+1):2} A_2 \cdots A_{\sigma_2+1})^{(\sigma_2+1):2+1}$ oder jene über $A_1 (A)_{\sigma_2} (A)_{\sigma_3}$ hinreicht oder ein weiterer Punkt mit h_3 vorhanden sein muss. Übrigens wirkt, wenn $n - \alpha_1$ hinreichend klein, auch $(A_1^{s-1} A_2 \ldots A_\sigma)^s$. Je größer aber $n - \alpha_1$, desto kleiner wird $\alpha_1 - \alpha_2$.

Lemma I. Sind genau zwei Fundamentalpunkte höchster Vielfachheit h_1 vorhanden, so kann σ_2 nicht > 7 sein.

1. Beweis. Durch die numerisch mögliche Transformation $(A_1 A_2 A_3)^2$ entsteht das Fundamentalsystem $(n - h_1 - h_2, n - h_1 - h_2, n - 2h_1, h_2, \ldots)^{2n-2h_1-h_2}$, wo man $n - h_1 - h_2 < h_2$ und auch $n - 2h_1 < h_2$ hat; daher können jedenfalls wegen Theorem I nicht mehr als $8h_2$ vorhanden sein. Aber es ist für die transformierten Curven $n' = 2n - 2h_1 - h_2$, also $n - h_1 - h_2 = (n' - h_2) : 2$, daher, wenn auch nur noch $7h_2$ übrig wären, die Gesammtsumme der Punkte $n - h_1 - h_2$, $n - h_1 - h_2, h_2, \cdots h_2$ geben würde $n' - h_2 + 7h_2 = n' + 6h_2$, was wegen $h_2 > (n' : 3)$ im Widerspruch mit der Relation $\Sigma h = 3n' - 3$ wäre. Dass die obere Grenze 7 wirklich existiere, habe ich gelegentlich in Capitel I bewiesen.

2. Beweis. Es besteht eine Gruppe von zwei Fundamentalcurven, welche $A_1^{\alpha_i} A_2^{\alpha_i - 1}$ und $A_1^{\alpha_i - 1} A_2^{\alpha_i}$ enthalten und durch die $\sigma_2 h_2$-fachen Punkte gleich vielfach gehen, α_i muss ihre höchste Vielfachheit sein. Für diese Curven $C_\nu u = 0$, $p = 0$ hat man die σ_2 Punkte als Gruppe 2., resp. 3. Vielfachheit, wobei $\sigma_1' = 1$,

[1]) Cf. die Anmerkung zum Ende des Cap. III.

Digitized by Google

$\sigma_2' = 1$, $\sigma_3' = 2$ oder $\sigma_1' = 1$, $\sigma_3' = \sigma_2 + 1$ wird.[1]) Da sich das Lemma gleichzeitig für $u = 0, 1, 2$ beweist, so ist der Beweis auf das für eine niedere Ordnung reduciert, denn wenn dann σ_3 für die Fundamentalcurve nicht > 7 sein kann, so ist es auch für T nicht möglich.

Theorem III. Sind genau zwei Fundamentalpunkte höchster Vielfachheit vorhanden, so ist T zerlegbar.

Ist $\sigma_2 = 1$, so ist $(A_1 A_2 A_3)^2$ ein quadratischer Factor. Ist $\sigma_2 = 2$, so liefert die Transformation $(A_1 A_2 A_3)^2$ die Vielfachheiten $n - h_1 - h_2$, $n - h_1 - h_2$, h_2, $n - h_1$, h_3, $\cdots$ woraus, damit die Summe der drei höchsten $> 2n - h_1 - h_2$ (die neue Ordnung) werde, folgt, dass $n < h_1 + 2h_2$ und $\sigma_2 > 2$, das letztere, wenn $n > h_1 + h_2 + h_3$. Ist aber $n < h_1 + h_2 + h_3$, so reduciert die Transformation 2. des Fundamentaltheoremes, welche also Factor wird. Ist $\sigma_2 = 3$ und A_1 rational, so muss die aus $(A_1 A_4 A_5)^2$ (wegen $h_1 + 2h_2 > n$) und $A_1 A_4 A_5$ zusammengesetzte cubische Transformation ein Factor sein, also ist auch $2n - 3h_1 - 3h_3 > 0$. Wenn nun $h_1 + h_2 + h_3 > n$, so wird wie in Lemma I bewiesen, dass σ_3 nicht > 5 sein kann. Ist $\sigma_3 = 5$, so reduciert T_{61}[2]), weil $61n - 2 \cdot 30\alpha_1 - 3 \cdot 20\alpha_2 - 5 \cdot 12\alpha_3 < n$. Ist $\sigma_3 = 4$, so reduciert T_{25}, weil $25n - 2 \cdot 12\alpha_1 - 3 \cdot 8\alpha_2 - 4 \cdot 6\alpha_3 < n$. Ist $\sigma_3 = 3$, so reduciert T_{17}, weil $17n - 6(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3) < n$. Ist $\sigma_3 = 2$, so reduciert T_8, weil $8n - 3(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3) < n$. Ist $\sigma_3 = 1$, so reduciert T_5, weil $5n - 2(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3) < n$.

Ist $\sigma_2 = 4$, so folgt aus dem eben gefundenen $h_1 + 2h_2 > n$, dass $4h_1 + 8h_2 > 5n - n$, also ist $(A_1^2 \cdots A_6^2)^5$ ein Factor. — Ist $\sigma_2 = 5$, so folgt $6h_1 + 15h_2 > 8n - n$, also ist $(A_1^3 \cdots A_7^3)^8$ ein Factor. — Ist $\sigma_2 = 6$, so folgt $12h_1 + 36h_2 > 17n - n$, also ist $(A_1^6 \cdots A_8^6)^{17}$ ein Factor. — Ist $\sigma_2 = 7$, so folgt $14h_1 + 56h_2 > 29n - n$, also ist T_{29} Factor.

— Wenn $\sigma_1 = 3$, so ist ein quadratischer Factor $(A_1 A_2 A_3)^2$ evident. —

Theorem IV. Ist die Anzahl der höchsten Fundamentalpunkte genau 4, so ist T zerlegbar.

$(A_1 A_2 A_3)^2$ liefert $(n - 2h_1, n - 2h_2, h_1, h_2, \cdots)$; damit die Summe der drei höchsten Vielfachheiten $> 2n - 3h_1$ sei, muss $n - 2h_1 < h_2$ sein.

Ist $\sigma_2 = 1$, so liefert $2n - 4h_1 < 2h_2$, dass $3n - 4h_1 - 2h_2 < 0$, also $(A_1 \cdots A_4 A_5^2)^3$ Factor ist. Ist $\sigma_2 = 2$, liefert T_5 die Ordnung $5n - 8h_1 - 4h_2 < n$. Ist $\sigma_2 = 3$, liefert $(A_1^3 \cdots A_7^3)^8$ die Ordnung $8n - 12h_1 - 9h_2 < n$. Ist $\sigma_2 = 4$, liefert T_{17} die Ordnung $17n - 24h_1 - 24h_2 < n$. Ist $\sigma_2 > 4$, liefert $(A_1^{\sigma_2} \cdots A_4^{\sigma_2})^{2\sigma_2+1} A_5^2 \cdots A_{\sigma_2+4}^2$

[1]) Cf. die Anmerkung zum Ende des Cap. III.

[2]) T_f bedeutet in diesem Capitel einen der im Fundamentaltheoreme auftretenden Primfactoren und präcise jenen vom Grade f.

Digitized by Google

die Ordnung $(2\sigma_2+1)n-4\sigma_2 h_1-2\sigma_2 h_2<n$, ist also Factor von T.

Lemma II. Sind fünf höchste Fundamentalpunkte vorhanden, so ist σ_2 nicht >4.

Durch $(A_1 A_2 A_3)^2$ wird zunächst bewiesen, dass $n<2h_1+h_2$, $2n<5h_1+h_2$, $n<3h_1$, und hieraus $h_1-h_2>1$. Die höchsten Fundamentalcurven haben also die σ_1, $\sigma_2=1$, 4 oder 4, 1 und $\sigma_3>4$, was nicht möglich ist, oder aber ebenfalls $\sigma_1=5$, $\sigma_1>4$, so dass der Beweis auf ein niederes n reduciert wird.[1])

Übrigens gilt auch, dass wenn mit $\sigma_1+\sigma_2>9$ eine Vertheilung σ_1, σ_2; $\sigma_3=\sigma_4=\cdots=0$ unmöglich ist, auch jede Vertheilung $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_l$ mit denselben beiden σ_1, σ_2 unmöglich ist, $\sigma_1=5$, $\sigma_2=5$, $\sigma_3=\cdots=0$ ist aber in dem vorigen Capitel als unmöglich bewiesen worden.

Theorem V. Sind genau fünf höchste Fundamentalpunkte vorhanden, so ist T zerlegbar.

Ist $\sigma_2=1$, so liefert T_5 die Ordnung $5n-10h_1-2h_2$, was $<n$, weil $2n-5\alpha_1-\alpha_2$ die Summe von $n-2h_1-h_2$ und $n-3h_1$ ist. Ist $\sigma_2=2$, so liefert T_8 die Ordnung $8n-5h_1-6h_2$, was $<n$, weil $7n-15h_1-6h_2$ die Summe von $n-3h_1$ und $3(2n-4h_1-2h_2)$ ist. Ist $\sigma_2=3$, liefert T_{17} die Ordnung $17n-30h_1-18h_2<n$, weil $16n-30h_1-18h_2=3(5n-10h_1-2h_2)+n-12h_2$ oder auch $=2(7n-14h_1-7h_2)+2(n-h_1-2h_2)$. Ist $\sigma_2=4$, so ist T_{41} Factor, weil $41n-80h_1-40h_2<n$.

Theorem VI. Sind genau sechs höchste Fundamentalpunkte vorhanden, so ist T zerlegbar.

Denn es ist $3h_1>n$, $12h_1>4n$, daher liefert T_5 die Ordnung $5n-12h_1<n$.

---

[1]) Anmerkung I. Wenn T Fundamentalgeraden in E besitzt, so können entweder 1. $\delta>1$ vorhanden sein, welche sich in einem (α_1-1)-fachen Punkte schneiden, oder 2. drei, welche sich in drei $(n:2)$-fachen Punkten schneiden, oder 3. eine, welche zwei $(n:2)$-fache Punkte verbindet. Im ersten Falle ist $\delta=\sigma_2$ und $\alpha_1+\alpha_2=n$, daher liefert eine Transformation $(A_1^{\nu-1} A_2 \ldots A_{\sigma_2+1})^\nu$ die Ordnung $\nu n-(\nu-1)h_1-\sigma_2 h_2$. Ist nun $\nu=(\sigma_2:2)+1$, so wird dies $n+(\sigma_2:2)n-\sigma_2(h_1+2h_2):2$. Wegen $n<h_1+2h_2$ ist dies $<n$. Ist $\nu=(\sigma_2+1):2+1$, so ist die Ordnung $n+(\sigma_2+1)n:2-((\sigma_2+1)h_1+2\sigma_2 h_2):2=3n:2-(h_1:2)+(\sigma_2:2)(n-h_1-2h_2)<n_1$, wenn $h_2>1$. — Im zweiten Falle ist $(A_1 A_2 A_3)^2$ ein Factor. — Im dritten Falle werde auch eine Fundamentalgerade in E' supponiert, also in Σ ein einfacher Fundamentalpunkt A_σ; dann ist $(A_1 A_2 A_3)^2$ ein Factor. Die anderen Unterfälle von 3. wie oben.

Anmerkung II. Wenn T keine Fundamentalgeraden, aber Fundamental C_2 besitzt, so sei entweder nur 1 vorhanden: $(A_1 \ldots A_1)^2$ oder δ eines Büschels $(A_1 \ldots A_4)$ oder 6 durch $A_1 \ldots A_6$. Im 3. Falle sind sie h_1-fache Punkte und $(A_1^2, \ldots A_6^2)^5$ reduciert. Im 2. Falle ist die 3. Transformation des Theoremes ein Factor. Der 1. Fall muss wie im Texte behandelt werden.

Diese Anmerkungen können fortgesetzt werden bis zu Transformationen, welche keine Fundamentalpunkte höherer Vielfachheit als λ und keine Fundamentalcurven niederer Ordnung als λ besitzen.

Digitized by Google

Theorem VII. Sind genau sieben höchste Fundamentalpunkte vorhanden, so ist T zerlegbar.

Denn es ist $8n - 21h_1 < n$ und T_3 ein Factor.

Theorem VIII. Sind genau acht höchste Fundamentalpunkte vorhanden, so ist T zerlegbar.

Denn T_{17} liefert die Ordnung $17n - 48h_1 < n$.

Somit sind in den 8 discutierten Fällen Factoren mit den Ordnungen $< n$ herausgehoben und das Zerlegungstheorem ist bewiesen.

Cap. III. Über eine dritte Beweismethode. Folgerungen.

Im vorigen Beweise sind die extrahierten Factoren sofort Primfactoren gewesen. Man kann noch in anderer Weise, als ich im Cap. I gethan, zuerst eine Zerlegung in zusammengesetzte Factoren suchen, die aber wenigstens ihre Ordnung $< n$ haben.

Solche Factoren müssen sämmtlich aus der Reihe der Curvensysteme $C_{n-\Delta}\,(\alpha_1 - \delta_1, \cdots, \alpha_1 - \delta_1;\ \alpha_2 - \delta_2, \cdots, \alpha_2 - \delta_2, \cdots;\ \alpha_\sigma - \delta_\sigma, \cdots \alpha_\sigma - \delta_\sigma$ hervorgehen, indem eines dieser Curvensysteme stets entweder homaloidal ist oder ein homaloidales System enthält, das durch Hinzufügung vielfacher Punkte aus ihm ausgeschieden werden kann. Ausgenommen sind indessen die Primtransformationen des Fundamentaltheoremes.

Unter diesen Curvensystemen ist auch die Reihe der successiven adjungierten Curven (und besonders für $\Delta = 2, \delta_1 = \cdots = \delta_\sigma = 1$ das System C_{n-1}, das schon zu anderem Zwecke von Nöther Gött. Nachr. 1871 verwendet wurde), nämlich $C_{n-3h+h_1}\,(\alpha_i - h)$.

Damit die neue Ordnung $< n$ sei, wenn $n\Delta - \Sigma\alpha_i\delta_i < n$ sein. Damit ein Curvensystem ein homaloidales enthalte, ist nothwendig, dass p als Summe von Triangularzahlen dargestellt werden könne, deren Basen y_i eine Summe $\leq u - p - 2$ haben. Hiezu tritt die Bedingung, dass y_i-fache Punkte kein Zerfallen der Curven bewirken. Es gibt außer den Primfactoren noch die Fälle $\sigma = 9, 10$, wo die C_{n-2} nicht genügen. Für die C_{n-2} ist $u - p = \sigma - 4$. Daher ist es nützlich, genaueres über σ zu wissen.

Ausgenommen die Jonquières'sche Transformation ist $\sigma < n + 2$.

Denn ich habe oben bewiesen, dass die C_{n-2} nur für jene T zerfallen, also außerdem ist $p = n + 2 - \sigma > 0$.

Enthält T zwar Fundamental-C_2, aber keine Fundamentalgerade, so ist $3\sigma < n + 14$.

Denn C_{n-5} des Theoremes II, Cap. I, zerfällt nur, wenn Fundamentalgeraden da sind, also ist andernfalls $p = n + 14 - 3\sigma > 0$.

Jede Fundamentalcurve λ. Ordnung sondert sich nach dem $(\lambda + 1)$. Schritte in der Bahn der adjungierten Systeme des Cap. I.

Digitized by Google

ab. Denn ist λ, λ_i der Complex der Curven, so hat man $(n-3h+1)\lambda - \Sigma(\alpha_i - h)\lambda_i = n\lambda - \Sigma\alpha_i\lambda_i + \lambda - h(3\lambda - \Sigma\lambda_i) = n\lambda - \Sigma\alpha_i\lambda_i + \lambda - h_1$ und dies wird <0, sobald $h > \lambda$. Ich setzte (cf. Cr. J. CXIV) $n\lambda - \Sigma\alpha_i\lambda_i = F_{n\lambda}$. Die Curven, welche $u=0$, $p=0$, $F_{n\lambda_3} > 0$ machen, sondern sich bei den späteren Schritten ab. Andere als rationale Curven können sich nicht absondern (obzwar $3\lambda - \Sigma\lambda_i = u - p + 1$, also der vorige Wert $= F_{n\lambda} + \lambda - h(u-p+1)$ ist, also rein numerische für $u=0, p>0$ stets Absonderung eintreten müsste).

Nach dem λ^{ten}-Schritte hat das Curvensystem $C_{n-3\lambda+1}$, sofern das homaloidale Ausgangssystem weder Fundamentalpunkte höherer Vielfachheit als λ noch Fundamentalcurven niederer Ordnung als λ hatte,

$$p = n - 1 - 6\lambda - (\sigma - 9)\lambda(\lambda+1):2 \quad u = n + 4 - 6\lambda - (\sigma - 9)\lambda(\lambda-1):2.$$

Hieraus ziehe ich den Schluss:

Besitzt ein homaloidales System weder Fundamentalpunkte einer Vielfachheit $>\lambda$ noch Fundamentalcurven einer Ordnung $<\lambda$, so gilt für die Anzahl σ ihrer Fundamentalpunkte

$$\sigma < 2(n-1-6\lambda):(\lambda+1)\lambda + 9.$$

Es bleibt die Frage, ob dieses Maximum unter jenen Voraussetzungen auch erreicht werden könne.[1])

Cap. IV. Zusammenhang mit der Idealtheorie.

Im ersten Stadium jedes der Probleme, auf welche die Untersuchungen dieser beiden Arbeiten Anwendung finden, sind nicht

[1]) Wegen der im zweiten Beweise zum Lemma II. des Cap. II gemachten Behauptung möche ich hier noch über die σ_i sprechen. Es sind im Cap. II implicite mehrere neue Eigenschaften der Fundamentalpunkte einer Transformation sowohl der Zahlen α_i als der Zahlen σ_i enthalten. Eigentlich sind dies Eigenschaften der Zahlensysteme, welche Lösungen der Gleichungen $n^2 - \Sigma\alpha^2 = 1$, $3n - \Sigma\alpha = 3$ bilden. Man kann nun auch — und dies ist bisher nicht geschehen — sich zum Gegenstande der Untersuchung die Zahlen α_i und σ_i (Anzahlen gleicher α_i) für Singularitätencomplexe machen, deren $u=1, p=0$ oder $u=0$, $p=0$ ist, also für die Büschel rationaler Curven und die sogenannten Fundamentalcurven ($p=0$). Meine Behauptung sagt nun eben aus, dass die obersten Zahlen σ_i (nicht die α_i) für diese drei Fälle mit wenigen Ausnahmen übereinstimmen. Eine genaue Discussion bleibt immerhin nicht überflüssig. Aber man kann noch weiter gehen und neben die Clebsch-, Bertini'schen und meine eigenen Untersuchungen von oben und aus Cr. J. CXIV entsprechende Fragen über die Zahlen α_i und besonders σ_i bei Singularitätencomplexen stellen, welche willkürliche p, u besitzen. Dass diese Frage auf das Engste mit §§ 6—8 der Abhandlung von Frobenius „Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten" in Cr. J. LXXXVI zusammenhängt, geht schon aus meiner hier mehrfach erwähnten Arbeit hervor. Hiezu auch meine Abhandlung in Act. Math. Bd. XXI. p. 1, v. o.

Digitized by Google

die Punkte, sondern die Coefficienten in den Curvengleichungen als Elemente des Rationalitätsbereiches zu betrachten. Wenn ich dann über dieseine Mannigfaltigkeit mit der Gleichung $\Sigma A_i X_i = 0$, wo die X_i Producte von Potenzen der Variabeln einer oder mehrerer Reihen (sei es auch von R_i-Coordinaten) sind, als ein lineares System mit den Parametern A_i auffasse, dessen Constituenten die zerfallenden Mannigfaltigkeiten sind, welche aus den linearen Coordinatenräumen zusammengesetzt sind, so sind die Parameter A_i dieses linearen Systemes die Elemente des ursprünglichen Rationalitätsbereiches.

Sind N Punkte, deren Coordinaten in einem Gattungsbereiche $(\xi, R', \cdots R^{(\nu)})$ enthalten sind, so beschaffen, dass sie alle zu jedem ihrer Punkte conjugierten Punkte enthalten, so kann die Gruppe der N Punkte als Schnitt zweier Curven dargestellt werden, deren Coefficienten dem Bereiche $(R', \cdots R^{(\nu)})$ angehören. Hierunter können wohl einzelne R selbst wieder aus vorher gelösten geometrischen Problemen herstammende Irrationalitäten sein.

Die N Punkte dieser Art bilden eine rationale Gruppe g_N. Alle Curven, welche durch sie hindurchgehen, bilden ein Modulsystem. Sollen aber ihre Coefficienten von der durch $P_1, \cdots, P_N$ bestimmten Irrationalität ξ frei sein, so müssen sie alle N Punkte gleich viel-fach enthalten, falls g_N irreductibel ist.[1]) Es ist dann stets möglich, sie durch zwei Curven zu ersetzen, die sich in den N Punkten nur einfach schneiden. Das durch sie bestimmte Modulsystem sei (f, φ).

Sind nun l Gruppen von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ Punkten gegeben und

$$(f_1, \varphi_1), (f_2, \varphi_2, \ldots, (f_l, \varphi_l) \tag{2}$$

die entsprechenden Modulsysteme, so ist

$$(f_1, \varphi_1)^{h_1} \cdot (f_2, \varphi_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (f_l, \varphi_l)^{h_l} \tag{3}$$

ein Modulsystem, dessen Curven mindestens $h_1, h_2, \ldots, h_l$-fach resp. durch die $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ Punkte der l Gruppen hindurchgehen.

Stimmen die Zahlen σ_i, h_i genau mit den in dieser Arbeit definierten Zahlen für ein birationales Fundamentalsystem überein und werden überdies die componierenden Factoren für die f_i, φ_i so bestimmt, dass die Ordnung der Functionen n wird, so beschränkt sich (3) auf die homaloidalen Curven eines Netzes.

Es ist nun leicht, eine Transformation unter E, E' herzustellen. Man nehme in E' vier Geraden, lasse sie vier Curven jenes

[1]) In der That muss die Kronecker'sche Resolvente (cf. Molk Act. Math. VI) für die Schnittpunkte zweier Curven im Rationalitätsbereiche ihrer Coefficienten zerfallen, wenn die Schnittpunkte ungleiche Vielfachheiten auch nur in einer der Curven besitzen. Cf. hiezu Nöther M. A. XXIII.

Digitized by Google

Netzes entsprechen und vervollständige die collineare Beziehung unter den Geraden und den Curven. So entsteht eine birationale Transformation T unter E, E', welche rational in $(R', \ldots R^{(\nu)})$ bestimmt ist und jedem Punkte (x, y) von E einen Punkt (x', y') entsprechen lässt, dessen Coordinaten in $(x, y, R', \ldots R^{(\nu)})$ rational sind. T lässt sich nun gewiss nicht in Nöther'scher Art zerlegen, ohne Irrationalität einzuführen, nämlich eben jene oben erwähnten ξ.

Es sei eine der Curven (3) zum Grunde gelegt, $f(r, s)$ die Grundgleichung des durch sie bestimmten algebraischen Körpers. Bereits bei Dedekind und Weber (Cr. J. Bd. XCII) sind Scharen ganzer algebraischer Functionen erwähnt, die aus den Basiselementen eines Moduls nur mittelst constanter Coefficienten gebildet werden. Es ist nöthig, diese auch für ein Ideal zu bilden. Man wird also die Curven eines linearen Systemes, welche keinen anderen Bedingungen genügen, als durch σ Punkte $A_1, \ldots A_\sigma$ auf $f(z, s)$ mit bestimmten Vielfachheiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ zu gehen, als ein Scharideal bezeichnen können. Sind $\alpha_1, \ldots \alpha_\sigma$ genau die obigen Zahlen $h_1, \ldots h_t$ (und $A_1 \ldots A_\sigma$ die vielfachen Punkte einer homaloidalen Curve), so kann die durch sie zwischen E, E' entstehende Transformation als ein Transformationsideal bezeichnet werden. Der Unterschied zwischen dem älteren Theoreme und meinem Fundamentaltheoreme besteht nun darin, dass

bei der älteren Zerlegung für eine rational bestimmte Transformation zu Transformationsidealen also Factoren geschritten werden muss.

Ganzzahlige birationale Transformationen.

Bisher sind von Niemandem ganzzahlige Systeme von Functionen höherer Ordnung untersucht worden, noch weniger rational umkehrbare rationale Transformationen mit ganzzahligen Coefficienten.[1]) Nach dem Obigen lässt sich bereits eine vollständige Theorie derselben geben, auch wenn die Coefficienten algebraische (Kummer'sche) ganze Zahlen sind.

Eine ganzzahlige birationale Substitution

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

kann mit rationalen Coefficienten umkehrbar sein, also in den Formeln

$$M x_i = \varphi_i(x_1', x_2', x_3') \qquad (i = 1, 2, 3)$$

[1]) Quadratische ganzzahlige Transformationen sind von Herrn Picard in Liouv. Journ. 1888 bei seinen Untersuchungen über hyperabelsche Functionen angetroffen worden.

Wie wenig man über den Gegenstand und was damit zusammenhängt weiss, kann man aus dem Lehrbuche der Algebra von H. Weber ersehen.

Digitized by Google

die φ_i mit ganzzahligen Coefficienten liefern. Die Curven $\Sigma \lambda_i f_i$ und $\Sigma \mu_i \varphi_i$ sind also für ganzzahlige λ_i, μ_i ganzzahlige Functionen und haben $p = 0, u = 2$, wenn diese Zahlen nur für die gemeinsamen Wurzelwerte von f und φ berechnet werden.

Die Discriminante einer ternären Form $f_i(x_1, x_2, x_3)$ gebildet in Bezug auf $x_2 : x_1$ ist eine ganzzahlige Function ihrer Coefficienten. Man sieht aber, dass sie in dem durch die Coefficienten constituierten Rationalitätsbereiche in rationale Factoren zerfällt, wenn Gruppen vielfacher Punkte, also σ_2 α_2-fache, σ_3 α_3-fache, ... σ_l α_l-fache Punkte in f_i existieren und es sind die Factoren Potenzen rationaler Polynome der Coefficienten. In der That, sucht man die Discriminante mit Bezug auf x_3 und trennt rational den Verzweigungsfactor ab, so zerfällt der Quotient $R(x_1, x_2)$ in Potenzen rationaler Polynome von $x_1 : x_2$ wozu im Falle unseres Netzes noch ein bestimmter rationaler Factor von der Potenz 1 treten kann.

In unserem Falle ist die Basis eines solchen rationalen Factors von $R(x_1, x_2)$ sowie der entsprechende von $R(x_1, x_3)$, oder $R(x_2, x_3)$ ein ganzzahliges Polynom und wir kennen also die elementaren symmetrischen und alternierenden Functionen. Diese alle sind ganze Zahlen.

Stellen wir daher die Determinante auf, welche eine Curve bestimmt, die in diesen Punkten die Vielfachheit i hat, wobei wir noch eine beliebige Anzahl von Punkten mit ganzzahligen Coordinaten nehmen können, so sehen wir die Richtigkeit des Theoremes:

Sind σ_i Punkte ein rationaler Bestandtheil des Schnittes zweier ganzzahliger Curven, so können die Netze von Curven, welche die σ_i Punkte zu α_i-fachen Punkten haben, stets durch drei ganzzahlige Curven constituiert werden.

Dasselbe gilt dann für die Systeme von Curven, welche durch mehrere dieser σ_i-punktigen Gruppen bestimmt sind.

Indem ich mich auf die Beweismethode des II. Cap. stütze, kann ich also behaupten:.

Für ganzzahlige homaloidale Systeme können alle in II. Cap. verwendeten homaloidalen Curvensysteme durch ganzzahlige Curven constituiert werden, also als Leiter ganzzahliger Substitutionen betrachtet werden.

Demnach können die Schritte des Cap. II mit dem Vorbehalte verfolgt werden, dass die elementaren Substitutionen ganzzahlige sind und wir gelangen zum

Fundamentaltheoreme.

Jede in einem Dedekind'schen Körper ganzzahlige birationale Substitution der Ebene kann ohne Zuhilfenahme neuer algebraischer Zahlen, also rational, in ganzzahlige Transformationen einer der im Fundamentaltheoreme der Einleitung ausgesprochenen Arten zerlegt werden.

Digitized by Google

Wollte man eine solche Transformation in quadratische Transformationen zerlegen, so müssten die rationalen σ_i-punktigen Gruppen der erhaltenen Factoren zerlegt werden, es müssten also auch vorerst die oben erwähnten rationalen Polynome $R(x)$ in Factoren zerlegt werden. Da sie ganzzahlig sind und da mit Ausnahme Jonquières'scher Factoren σ_i nicht > 8 ist, so folgt:

Um eine ganzzahlige birationale Transformation der Ebene in quadratische Transformationen zu zerlegen, hat man die ganzen algebraischen Zahlen von Körpern 2. bis 8. Grades zu adjungieren, mit Ausnahme allein derjenigen, welche Jonquières'sche Factoren enthalten, wo Körper irgend hohen Grades nothwendig werden können.

Es bleiben also nur die ganzzahligen Primtransformationen aufzustellen. Dieses kann aber eben nach der hier im Beweise bereits verwendeten Methode leicht geschehen. Um etwa T_{17} mit ganzzahligen Coefficienten zu erhalten, hat man zwei ganzzahlige C_3 aufzustellen, welche einen bekannten Punkt mit willkürlichen ganzzahligen Coordinaten gemeinsam haben, etwa den Punkt $x=1$, $y=1$, und dann drei Polynome 17. Ordnung mit ganzzahligen Coefficienten zu bilden, welche die übrigen 8 Punkte je 6-fach erhalten.

Was den „durch die Coefficienten constituierten Rationalitätsbereich" betrifft, so meine ich damit, dass vermöge des Vorhandenseins der vielfachen Punkte von f_i unter den zunächst als allgemein gedachten Coefficienten a_{ikl} von f algebraische Relationen bestehen. Diese Relationen sind ausgedrückt durch das Verschwinden der Discriminante von f, welche ja ein ganzzahliges Polynom der a_{ikl} ist und durch das Verschwinden ihrer „Unterdiscriminanten". Nenne ich die Gesammtheit dieser algebraischen Relationen oder den durch sie constituirten Modul $\Omega=0$, so heißt das also, dass mit Hilfe dieser identischen Relationen $\Omega=0$ die zur gegebenen Transformation gehörigen Primtransformationen rational gebildet werden können. Hiebei ist die Basis der singulären Punkte als fest gedacht.

Man könnte auch mittelst Ω einzelne Coefficienten a_{ikl} durch eine bestimmte Anzahl der übrigen ausdrücken und hat dann die in den f_i nothwendig entstehenden Irrationalitäten explicite in Evidenz gesetzt. Aber ich glaube, dass so lange man es nicht mit transcendenten Relationen Ω zu thun hat, es weit mehr der Art sowohl von Abel, Galois als weiterhin von Kronecker, den Begründern dieser Begriffsbildungen, entspricht, mit den Identitäten $\Omega=0$ zu rechnen. Denn die Beibehaltung dieser Identitäten hat ja Kronecker zu seiner Theorie der Modulsysteme geführt.[1])

[1]) Cf. besonders seine Abh. im 99. Bande des Journals von Crelle, aber auch Dedekind: Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen ib. Bd. 54, p. 1, und dessen späteren, wenn auch zahlentheoretischen Abhandlungen in den Gött. Abhandlungen.

Digitized by Google

Nun ist aber die durch die Ω im R_r der a_{ikl} definierte Mannigfaltigkeit eine abbildbare[1]), also lassen sich die a_{ikl} unserer f_i durch eine Anzahl Parameter ω in rationaler Weise, und zwar ganzzahlig ausdrücken und aber auch diese ω durch die a_{ikl}. Also ist der Rationalitätsbereich der a_{ikl} identisch mit dem Rationalitätsbereiche dieser Parameter ω und auch die beiden Integritätsbereiche sind identisch und wir können zusammenfassend aussprechen:

Die in den beiden Fundamentaltheoremen dieser Arbeit (Einl. und dieses Cap.) angegebenen Zerlegungen lassen sich überhaupt ohne jede Irrationalität durch führen.

[1]) Über die Discriminantenmanigfaltigkeit der binären, sowie r-ären Form hat Sylvester in Phil. Magazine ser. IV. t. 3. 1852 „On a remarkable Theorem in the Theory of Equal Roots and Multiple Points" gehandelt; die Eigenschaft der Abbildbarkeit ist aber von ihm nicht bemerkt worden. Es scheint mir zweifelhaft, dass Kronecker diese Eigenschaft erwähnt hätte; jedenfalls findet sich in dem neuesten Aufsatze über den Gegenstand Hilbert Math. Ann. XXX. p. 440: „Über die Singularitäten der Discriminantenfläche", welcher übrigens sich ausschließlich auf binäre Formen beschränkt, keine Erwähnung davon.

Digitized by Google

Eine Abbildung der Kugel auf den Rotationskegel.

Von **A. Klingatsch** in Leoben.

1.

Unter den Bedingungen, welche eine Abbildung zweier Flächen auf einander zu erfüllen hat, bietet diejenige in mathematischer Hinsicht ein gewisses Interesse, wo den geodätischen Linien der einen Fläche, ebensolche in der Abbildung auf der zweiten Fläche entsprechen sollen. Allgemein kommen bei dieser Aufgabe mehr Bedingungsgleichungen in Betracht, als zu bestimmende Größen vorhanden sind und gelingt es daher, von speciellen Fällen abgesehen, nur ein Büschel geodätischer Linien auf der einen Fläche in ein solches auf der zweiten Fläche darzustellen, wobei unter Umständen noch weitere Bedingungen hinzutreten können.

Für Rotationsflächen lässt sich bekanntlich die Gleichung der geodätischen Linie in endlicher Gestalt geben. Nach dem Clairaut'schen Satze ist in jedem Punkte einer auf einer Rotationsfläche gezogenen geodätischen Linie das Product aus dem Radius des betreffenden Parallelkreises und dem Sinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen den betreffenden Meridian constant.

Ist daher ρ der Halbmesser eines Parallelkreises, ψ der erwähnte Winkel, so lautet die Gleichung derselben

$$\rho \sin \psi = k,$$

wo k eine Constante bedeutet.

Für jede reelle geodätische Linie muss der Wert der Constanten k kleiner sein als der Halbmesser des größten Parallelkreises; die Curve verlauft dann innerhalb der Zone in der die Radien der Parallelkreise nicht größer sind als k.

Sind $d\varphi$ und $\rho d\lambda$ die Componenten eines Curvenelementes ds in Bezug auf den betreffenden Meridian und Parallelkreis, so folgt wegen

Digitized by Google

$$ds^2 = d\varphi^2 + \rho^2 d\lambda^2 \text{ und } \sin\psi = \frac{\rho\, d\lambda}{ds},$$

$$\lambda = \pm k \int \frac{d\varphi}{\rho \sqrt{\rho^2 - k^2}} + C$$

als Gleichung der geodätischen Linie in endlicher Gestalt.

Das System geodätischer Linien einem bestimmten Werte von k und den veränderlichen der Integrationsconstanten C entsprechend, besteht aus congruenten Curven, welche durch Drehung um die Rotationsaxe zur Deckung gebracht werden können.

2.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, ein auf einer Kugel gegebenes Büschel größter Kreise auf einen Rotationskegel in ein Büschel geodätischer Linien abzubilden. Dabei soll dem einen Scheitel O des Kreisbüschels auf der Kugel, ein beliebiger Punkt O_1 der Mantelfläche des Kegels als entsprechender zugewiesen werden.

Zur Bestimmung eines Punktes P der Kugel durch sphärische Coordinaten φ und λ wird ein beliebiger größter Kreis des Büschels als Grundkreis für die Zählung der φ und der auf diesem senkrecht stehende größte Kreis durch O als Ausgangsmeridian für die Zählung der λ angenommen. Dabei soll φ vom Grundkreis gegen den einen Pol S desselben positiv gerechnet werden.

Für den Rotationskegel wählen wir den Kreisschnitt durch O_1 als Grundkreis und nehmen für den entsprechenden Punkt P_1 die Größen $\varphi_1\ \lambda_1$ vom Grundkreis gegen die Kegelspitze S_1, bezw. vom Meridian der Kegelerzeugenden $O_1 S_1$.

Der Kugelhalbmesser werde gleich der Einheit gesetzt; der Halbmesser des Grundkreises am Kegel, in Einheiten des Kugelhalbmessers ausgedrückt, sei r und die ebenso verstandene Länge der Kegelerzeugenden von der Spitze S_1 bis zum Grundkreis sei s.

Mit Rücksicht auf die frühere Bezeichnung hat man für die Kugel

$$\rho = \cos\varphi$$

somit

$$(1) \quad \lambda = k \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{\cos^2\varphi - k^2}} + C = \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{tg}\varphi\right) + C.$$

Für den Kegel wegen

$$\rho = \frac{r(s-\varphi_1)}{s},$$

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{k_1}{r} \int \frac{d\varphi_1}{(s-\varphi_1)\sqrt{r^2(s-\varphi_1)^2 - k_1^2 s^2}} + C_1 = \frac{s}{r} \arcsin\left(\frac{k_1 s}{r(s-\varphi_1)}\right) + C_1.$$

Digitized by Google

Für alle größten Kugelkreise durch O ist daher

$$\sin\lambda = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\operatorname{tg}\varphi, \quad k \leqq 1; \tag{3}$$

da dem Punkte O der Kugel der Punkt O_1 am Kegel zugewiesen wurde, lautet die Gleichung eines Büschels geodätischer Linien durch diesen Punkt

$$\sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right) = \frac{k_1}{r^2(s-\varphi_1)}\left[s\sqrt{r^2-k_1^2} - \sqrt{r^2(s-\varphi_1)^2 - k_1^2 s^2}\right] \tag{4}$$

dabei

$$r < s, \; k_1 \leqq r.$$

Wir setzen noch

$$\varphi_1 = f(\varphi, \lambda) \tag{5}$$

$$k_1 = F(k) \tag{6}$$

wobei die erste Function für $\varphi = 0$ und $\lambda = 0$ verschwinden, während die zweite Function für alle in Betracht kommenden Werte $k \leqq 1$, die Werte $k_1 \leqq r$ geben soll. Fügen wir als weitere Bedingung hinzu, dass beide Functionen eindeutige Werte liefern sollen, so ist durch die Gleichungen (4), (5) und (6) eine Abbildung der Kugel auf dem Kegel derart gegeben, dass dem Büschel O geodätischer Linien auf der Kugel ein ebensolches O_1 auf dem Kegel entspricht.

Sind nämlich φ, λ die Coordinaten eines Punktes P der Kugel und bezeichnen $\varphi_1 \lambda_1$ die Coordinaten für die Abbildung P_1 auf dem Kegel, so bestimmt sich die Constante k der durch P gehenden geodätischen Linie vermöge (3) aus

$$k = \frac{\sin\lambda}{\sqrt{\sin^2\lambda + \operatorname{tg}^2\varphi}}. \tag{7}$$

Die Gleichungen (5) und (6) liefern φ_1 sowie die Constante k_1 einer durch O_1 und P_1 gehenden geodätischen Linie auf dem Kegel, wodurch nach (4) λ_1 gegeben ist.

Jedem Punkte P der Kugel ist daher im Allgemeinen ein Punkt P_1 am Kegel zugeordnet und dadurch eine Abbildung bestimmt.

Für denselben Wert k bilden λ und φ die Coordinaten für alle Punkte einer geodätischen Linie auf der Kugel und für den aus (6) folgenden constanten Wert k_1 ebenso λ_1 und φ_1 die Coordinaten der der ersteren entsprechenden geodätischen Linie am Kegel.

Jeder andere nicht durch O gehende größte Kreis der Kugel wird auf dem Kegel auch nicht mehr als geodätische Linie abgebildet.

Digitized by Google

3.

Die außer den angegebenen Einschränkungen im Übrigen noch unbestimmt gelassenen Functionen in (5) und (6) sollen nun so bestimmt werden, dass die Abbildung in Nr. 2 weiteren Bedingungen genügt. Wir setzen zunächst fest, dass in Gleichung (6) für $k = 0$, auch $k_1 = 0$ werden soll. Dann entspricht dem Meridian OS in der Abbildung die Kegelerzeugende $O_1 S_1$, da für jeden Wert φ_1, sowie $k_1 = 0$, vermöge (4) $\lambda_1 = 0$ wird.

Nennt man ferner wie früher ψ den veränderlichen Schnittwinkel des durch P gelegten größten Kreises mit den einzelnen Kugelmeridianen, hingegen ψ_1 den veränderlichen Schnittwinkel der durch P_1 gehenden geodätischen Linie mit den einzelnen Kegelerzeugenden, wobei sich ψ und ψ_1 auf entsprechende Punkte beider Curven beziehen sollen, so hat man

$$k = \cos\varphi . \sin\psi, \quad k_1 = \frac{r\,(s - \varphi_1)}{s} . \sin\psi_1$$

oder

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi_1} = \frac{k\,r\,(s - \varphi_1)}{k_1\,s\,.\,\cos\varphi}.$$

Sollen die sich entsprechenden Schnittwinkel gleich werden, so folgt wegen $\psi = \psi_1$,

$$\varphi_1 = s\left(1 - \frac{k_1}{k_r}\cos\varphi\right). \tag{8}$$

Für alle abzubildenden Punkte ist wegen (7) k und wegen (6) auch k_1 somit gemäß (5) auch φ_1 eine Function von φ und λ; da für jeden gegebenen Punkt P der Kugel aus (7) k und aus (6) k_1 bestimmt ist, so wäre vorbehaltlich der für die Gleichung (5) gestellten Forderung für die Abbildung P_1 aus (8) φ_1 und damit aus (4) λ_1 gegeben.

Da aber (8) für $\varphi = 0$ verschwinden muss, da nur unter dieser Bedingung sich die Punkte O und O_1 der Gleichung (4) gemäß entsprechen, so ist durch die letztgenannte Bedingung auch die Form der Function (6) bestimmt, indem der Factor von $\cos\varphi$ in (8) gleich der Einheit sein muss.

Sollen daher die auf entsprechende Punkte PP_1 sich beziehenden Schnittwinkel $\psi\,\psi_1$ der kürzesten Linien gleich sein, so hat die Gleichung (6) die Form

$$k_1 = k\,r, \tag{9}$$

woraus

$$\varphi_1 = s\,(1 - \cos\varphi), \tag{10}$$

Digitized by Google

und mit diesen beiden Werten aus (4) sich

$$(11) \qquad \sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right) = \frac{k}{\cos\varphi}\left[\sqrt{1-k^2} - \sqrt{\cos^2\varphi - k^2}\right]$$

ergibt.

Die durch (7) (9) (10) und (11) definierte Abbildung genügt zunächst folgenden Bedingungen:

1. Jede durch O_1 gehende geodätische Linie als Abbild eines größten Kugelkreises durch O schneidet die einzelnen Kegelerzeugenden unter demselben Winkel, wie jener die einzelnen Kugelmeridiane, wobei sich die Kegelerzeugenden und Kugelmeridiane auf entsprechende Punkte beziehen. Folglich sind auch die Winkel, welche die einzelnen geodätischen Linien in O_1 untereinander bilden, dieselben, welche die entsprechenden größten Kugelkreise in O mit einander bilden.
2. Die Kreise der Kugel, welche parallel zum Grundkreis sind, werden als Kreisschnitte des Kegels dargestellt. Dem Pol S des Grundkreises $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ entspricht die Kegelspitze S_1. Alle Punkte des Grundkreises der Kugel werden in dem Punkte O_1 des Kegels abgebildet, da unabhängig von λ mit $\varphi = 0$ sowohl aus (10) $\varphi_1 = 0$ als auch aus (11) $\lambda_1 = 0$ wird.

Das letztere Resultat erklärt sich dadurch, dass der Grundkreis der Kugel sowohl Parallelkreis als auch geodätische Linie ist, somit als zwei zusammenfallende Curven betrachtet werden muss. Das Abbild des ersteren auf dem Kegel ist wegen (10) dessen Grundkreis, das Abbild der letzteren eine geodätische Linie, welche in O_1 den Grundkreis berührt.

4.

Zum Zwecke der Darstellung der Abbildung denken wir uns den Kegelmantel in umstehender Figur längs der Erzeugenden $S_1\ O_1$ in eine Ebene ausgebreitet.

Bezeichnen wir nunmehr mit ψ speciell die Winkel aller grössten Kreise durch O mit dem Meridian SO, so ist für jeden darzustellenden Punkt P der Kugel nach (7) k und wegen

$$k = \sin\psi$$

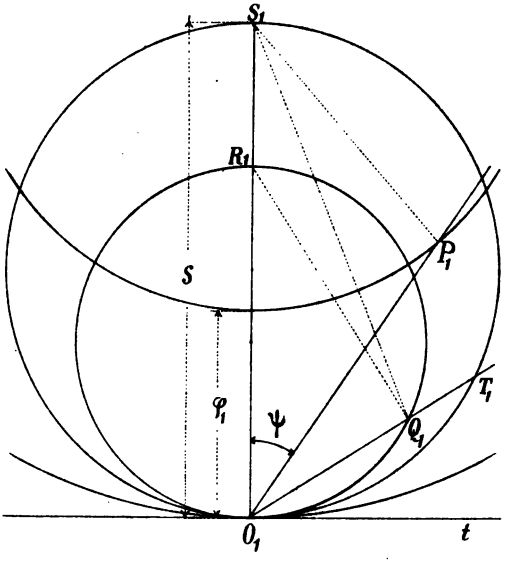
der in die Abbildung unverändert übergehende Winkel ψ des durch P gehenden größten Kreises mit SO gegeben.

Da φ_1 aus (10) folgt, erhält man die Darstellung in der Ebene im Schnitt P_1 eines durch O_1 unter ψ mit $O_1\ S_1$ gezogenen Strahles mit dem um S_1 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $s - \varphi_1 = s\cos\varphi$ beschriebenen Kreises. Im Schnitt des Strahlenbüschels O_1 mit den concentrischen Kreisen um S_1 erfolgt daher die Abbildung der einzelnen Punkte der Kugel im Devellopement des Kegels.

Digitized by Google

Die Abbildung des Grundkreises der Kugel, als geodätische Linie betrachtet, ist die Tangente t im Punkte O_1 an den develloppierten Grundkreis des Kegels.

Damit ein Kugelquadrant, entsprechend $\varphi \lessgtr \frac{\pi}{2}, \lambda \lessgtr \pm \frac{\pi}{2}$, auf dem Kegel Platz findet, muss $r \gtrless \frac{s}{2}$ sein.



Für die Abbildungen der Meridiane ist k und demgemäss auch k_1 eine Function von φ, woraus also, wie schon erwähnt, folgt, dass dieselben nicht als geodätische Linien, den ersten ausgenommen, abgebildet werden können.

Aus Gleichung (7) hat man bei Einführung des Winkels ψ statt k,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \lambda}{k} \sqrt{1 - k^2} = \sin \lambda \, . \operatorname{cotg} \psi,$$

wobei λ für die Darstellung eines bestimmten Meridians constant ist.

Mit Rücksicht auf den obigen Wert von φ wird aus (10)

$$s - \varphi_1 = s \cdot \frac{\sin \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 \lambda \cos^2 \psi}}. \tag{12}$$

Ist P ein Punkt des abzubildenden Meridians der Kugel, P_1 der entsprechende Punkt im Develloppement des Kegels, so ist der aus (11) sich ergebende Winkel $\frac{r\lambda_1}{s}$ jener, den die durch P_1 gehende Kegelerzeugende $S_1 P_1$ in der Abwickelung mit $S_1 O_1$ bildet.

Digitized by Google

Das Dreieck $O_1 S_1 P_1$ gibt daher wegen $S_1 P_1 = s - \varphi_1$ und $O_1 S_1 = s$,

$$O_1 P_1 = \frac{s - \varphi_1}{\sin \psi} . \sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right)$$

und mit (12)

$$O_1 P_1 = \frac{s}{\sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 \lambda \cos^2 \psi}} . \sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right).$$

Drückt man ebenso in (11) φ durch ψ und λ aus, so wird

$$\sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right) = \cos\psi \left[1 - \frac{\sin\psi \cos\lambda}{\sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 \lambda \cos^2 \psi}}\right] . \sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 \lambda \cos^2 \psi}$$

und damit

$$O_1 P_1 = s . \cos\psi \left[1 - \frac{\sin\psi \cos\lambda}{\sqrt{\sin^2 \psi + \sin^2 \lambda \cos^2 \psi}}\right]$$

als Polargleichung für die Abbildung des Meridians λ erhalten.

Für jeden unter ψ durch O_1 gezogenen Strahl ist der Radius rector $O_1 P_1$ durch die obige Gleichung bestimmt, welche im Übrigen auch eine punktweise Construction ermöglicht.

Für jenen Meridian, welcher senkrecht zur Axe des Kreisbüschels steht, hat man wegen $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$O_1 P_1 = s . \cos\psi.$$

Die Abbildung ist für diesen Meridian ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Halbierungspunkte der Strecke $O_1 S_1$ zusammenfällt. Dieser Kreis berührt daher den Grundkreis des Kegels, er gibt die Abbildung der einen Hälfte des betreffenden Kugelmeridians, entsprechend positiven Werten von φ.

Dieses Resultat lässt sich auch dadurch begründen, dass alle größten Kugelkreise durch O auf diesem Meridian senkrecht stehen, und nach den in der vorigen Nummer angegebenen Eigenschaften der Abbildung die Winkel der entsprechenden Geraden in der Abbildung mit den durch die abgebildeten Punkte gehenden Kegelerzeugenden ebenfalls rechte sein müssen.

5.

Wir betrachten noch ein zweites System von Parallelkreisen, nämlich jenes, dessen Ebenen senkrecht stehen auf der Axe unseres Büschels größter Kugelkreise.

Alle geodätischen Linien durch O, welche nach den Punkten eines dieser Kreise gezogen werden können, haben dieselbe Länge φ'.

Digitized by Google

Dabei bedeutet φ' die sphärische Coordinate für den Schnitt R eben dieses Kreises mit dem Ausgangsmeridian SO.

Ist Q ein beliebiger Punkt dieses Kreises, so ist durch O und Q ein größter Kreis bestimmt, welcher den Kugelmeridian $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ in einem Punkte T schneidet.

Der Pol S des Grundkreises bildet mit Q und T die Ecken eines bei T rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes, wobei $QT = 90 - \varphi'$, $ST = \psi$ und der Winkel bei S, $90 - \lambda$ ist.

Für dieses Dreieck hat man zunächst:

$$\operatorname{tg} \lambda = \sin \psi . \operatorname{tg} \varphi' . \tag{13}$$

Wegen $k = \sin \psi$ folgt aus (7) mit Rücksicht auf (13)

$$k^2 = \sin^2 \psi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi' - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi'} . \cos^2 \varphi, \tag{14}$$

während (11) wegen (10) auch in der Form geschrieben werden kann

$$\sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right) = \frac{s . \sin\psi . \cos\psi}{s - \varphi_1}\left[1 - \frac{1}{\cos\psi} . \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\psi}\right].$$

Nun hat man wegen (14)

$$\frac{1}{\cos\psi} . \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\psi} = \cos\varphi'$$

und daher für alle Punkte der Abbildung jenes Kugelkreises die Relation

$$\sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right) = \frac{\varphi'_1 . \sin\psi . \cos\psi}{s - \varphi_1}, \tag{15}$$

wobei im Devellopement des Kegels wegen (10). φ'_1 den Abstand der Abbildung R_1 des Punktes R von O_1 bedeutet.

Nachdem in dem Dreiecke $O_1 S_1 Q_1$ der Winkel bei S_1 wie erwähnt $\frac{r\lambda_1}{s}$ ist, hat man wegen $S_1 Q_1 = s - \varphi_1$ und $O_1 S_1 = s$,

$$O_1 Q_1 = \frac{s - \varphi_1}{\sin\psi} \cdot \sin\left(\frac{r\lambda_1}{s}\right)$$

und mit (15)

$$O_1 Q_1 = \varphi'_1 . \cos\psi = O_1 R_1 . \cos\psi,$$

woraus folgt, dass die Abbildungen Q_1 aller Punkte Q des in Betracht gezogenen Kugelkreises im Devellopement des Kegels auf einem Kreise durch R_1 liegen, welcher das Abbild t des Grundkreises der Kugel in O_1 zur Tangente hat.

Digitized by Google

Wir können daraus schließen, dass alle Kreise der Kugel, deren Ebenen senkrecht auf der Axe des Büschels stehen, sich in der Abwicklung des Kegelmantels als Kreise darstellen, welche sämmtlich in O_1 die gemeinsame Tangente t besitzen; die Mittelpunkte derselben fallen demzufoge in die Erzeugende $O_1 S_1$.

Innerhalb des Kreises durch S_1 und O_1 erfolgt daher unter der früheren Voraussetzung die Darstellung aller Punkte des in Betracht gezogenen Kugelquadraten.

Auf dem Kegelmantel selbt sind daher die Abbidungen der erwähnten Parallelkreise geodätische Kreise, deren Mittelpunkte auf $O_1 S_1$ liegen und welche den Grundkreis berühren.

Einen speciellen Fall der hier abgehandelten Kegelprojection bildet die Forderung, dass die Kugelmeridiane durch S als kürzeste Linien durch S_1 also als Kegelerzeugende abgebildet werden. In diesem Falle entsprechen sich die Meridiane gegenseitig. Für

$$\frac{r\lambda_1}{s} = \lambda \text{ und } \varphi_1 = f(\varphi)$$

erhält man dieselbe Relation wie unter Nr. 3; nur werden in diesem Falle alle Parallelkreise, deren Ebenen auf dem durch S gehenden Kugeldurchmesser — der Axe des Büschels — senkrecht stehen nicht wie früher allgemein als geodätische Kreise des Kegels, sondern als Parallelkreise auf dem Kegelmantel abgebildet.

Die Willkür der Function von φ bietet dann kekanntlich Gelegenheit weiteren Anforderungen gerecht zu werden.

Digitized by Google

Die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n-dimensionalen Raum.

Von **L. Klug** in Klausenburg.

Zieht man durch einen Punkt O zwei auf einander senkrecht stehende Geraden OA_1, OA_2, so besteht zwischen den Seiten des rechtwinkeligen Dreieckes OA_1A_2 die Relation

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2,$$

welche den Pythagoräischen Lehrsatz ausdrückt.

Steht die Gerade OA_3 im Punkte O senkrecht auf die Ebene OA_1A_2, so kann man bekanntlich das Quadrat der Fläche des Dreieckes $A_1A_2A_3$, durch die Quadrate der Flächen der Dreiecke OA_iA_k, so wie die Summe der Quadrate der Strecken A_iA_k, durch die Quadrate der Strecken OA_i ausdrücken.

Wählen wir dabei folgenden Vorgang der auch für höhere Räume anwendbar ist.

Bezeichnet man den Fußpunkt der Senkrechten von A_3 auf A_1A_2 mit A'_3, dann ist

$$(A_1A_2A_3)^2 = (A_1A_2)^2.(A'_3A_3)^2 = (A_1A_2)^2[(OA'_3)^2 + (OA_3)^2] =$$
$$= (A_1A_2)^2.(OA'_3)^2 + [(OA_1)^2 + (OA_2)^2].(OA_3)^2,$$

also

$$(A_1A_2A_3)^2 = (OA_1A_2)^2 + (OA_1A_3)^2 + (OA_2A_3)^2,$$

welche Gleichung wir auch derart schreiben können

$$(A_1A_2A_3)^2 = \sum_{(1)}^{(3)} (OA_1A_2)^2.$$

Es ist ferner

$$\sum_{(1)}^{(3)} (A_1A_2)^2 = (A_1A_2)^2 + (A_1A_3)^2 + (A_2A_3)^2 =$$
$$= (OA_1)^2 + (OA_2)^2 + (OA_1)^2 + (OA_3)^2 + (OA_2)^2 + (OA_3)^2 =$$
$$= 2[(OA_1)^2 + (OA_2)^2 + (OA_3)^2],$$

Digitized by Google

oder

$$\sum_{(1)}^{(3)} (A_1 A_2)^2 = 2 \sum_{(2)}^{(3)} (O A_1)^2.$$

Durch die Eckpunkte $O A_1 A_2 A_3$ des früheren Tetraeders ist eine Ebene des 4 dimensionalen Raumes bestimmt, nämlich diejenige, welche durch die Eckpunkte geht. Im Punkte O errichten wir auf dieser Ebene eine Senkrechte $O A_4$. Alle Punkte derselben außer O liegen außerhalb des uns bekannten 3 dimensionalen Raumes, so auch der Punkt A_4. Die Gerade $O A_4$ hat aus Rücksichten der Analogie die Eigenschaft auf alle Geraden und Ebenen der Ebene $O A_1 A_2 A_3$, d. h. des 3 dimensionalen Raumes senkrecht zu stehen.

Aus dem Punkte A_4 kann man unendlich viele senkrechte Gerade fällen auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$; davon schneidet nur eine $A_4 A'_4$ diese Ebene im Punkte A'_4, so dass die Strecke $A_4 A'_4$ die kürzeste Verbindungsgerade der Punkte der Ebene $A_1 A_2 A_3$ mit dem Punkte A_4 ist.

Nachdem zwei Geraden $A_4 O$, $A_4 A'_4$ der Ebene $A_4 A'_4 O$ auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$ senkrecht stehen, so sagen wir, dass sowohl die Ebene $A_4 A'_4 O$, wie auch alle in ihr liegenden Geraden, z. B. $O A'_4$, auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$ senkrecht stehen. Der Punkt A'_4 ist daher der Fußpunkt der vom Punkte O auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$ gefällten Senkrechten.

Wenn wir die Volumina der Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$, $O A_i A_k A$ dadurch bezeichnen, dass wir ihre Eckpunkte in Klammern setzen, so haben wir

$$(A_1 A_2 A_3 A_4)^2 = (A_1 A_2 A_3)^2 . (A'_4 A_4)^2 = (A_1 A_2 A_3)^2 [(O A'_4)^2 + (O A_4)^2] =$$
$$= (A_1 A_2 A_3)^2 . (O A'_4)^2 + [(O A_1 A_2)^2 + (O A_1 A_3)^2 + (O A_2 A_3)^2] (O A_4$$
$$= (O A_1 A_2 A_3)^2 + (O A_1 A_2 A_4)^2 + (O A_1 A_3 A_4)^2 + (O A_2 A_3 A_4)^2,$$

oder

$$(A_1 A_2 A_3 A_4)^2 = \sum_{(1)}^{(4)} (O A_1 A_2 A_3)^2.$$

Ferner ist

$$\sum_{(1)}^{(4)} (A_1 A_2 A_3)^2 = (A_1 A_2 A_3)^2 + (A_1 A_2 A_4)^2 + (A_1 A_3 A_4)^2 + (A_2 A_3 A_4)^2$$
$$= \begin{cases} (O A_1 A_2)^2 + (O A_1 A_2)^2 + (O A_1 A_3)^2 + (O A_2 A_3)^2 + \\ (O A_1 A_3)^2 + (O A_1 A_4)^2 + (O A_1 A_4)^2 + (O A_2 A_4)^2 + \\ (O A_2 A_3)^2 + (O A_2 A_4)^2 + (O A_3 A_4)^2 + (O A_3 A_4)^2 \end{cases}$$

oder

$$\sum_{(1)}^{(4)} (A_1 A_2 A_3)^2 = 2 \sum_{(2)}^{(4)} (O A_1 A_2)^2.$$

Schließlich hat man

$$(A_1 A_2)^2 + (A_1 A_3)^2 + (A_2 A_3)^2 = 2 [(O A_1)^2 + (O A_2)^2 + (O A_3)^2],$$
$$(A_1 A_4)^2 + (A_2 A_4) + (A_3 A_4)^2 =$$
$$= (O A_1)^2 + (O A_4)^2 + (O A_2)^2 + (O A_4)^2 + (O A_3)^2 + (O A_4)^2;$$

Digitized by Google

welche Gleichungen addiert

$$\sum_{\binom{4}{2}} (A_1A_2)^2 = 3 \sum_{\binom{4}{3}} (OA_1)^2$$

geben.

Die Punkte $OA_1A_2A_3A_4$ der früheren Figur bestimmen eine durch sie gehende Ebene des 5 dimensionalen Raumes. Wir errichten im Punkte O auf diese Ebene die senkrechte Gerade OA_5. Die Gerade $A_5A'_5$ steht im Punkte A'_5 der Ebene $A_1A_2A_3A_4$ senkrecht auf diese Ebene. Auch die Gerade OA_5, so wie jede in der Ebene $A_5A'_5O$ liegende Gerade, z. B. OA'_5, steht senkrecht auf die Ebene $A_1A_2A_3A_4$, so dass die Strecke OA'_5, die Entfernung des Punktes O von jener Ebene ist.

Dies in Betracht gezogen, lässt sich genau so wie in den zwei früheren Fällen zeigen, dass zwischen die Volumina der Tetraeder so wie der Dreiecke und Strecken mit den Eckpunkten und Endpunkten $OA_1A_2A_3A_4A_5$ die Relationen bestehen:

$$(A_1A_2A_3A_4A_5)^2 = \sum_{\binom{5}{1}} (OA_1A_2A_3A_4)^2,$$

$$\sum_{\binom{5}{1}} (A_1A_2A_3A_4)^2 = 2 \sum_{\binom{5}{2}} (OA_1A_2A_3)^2,$$

$$\sum_{\binom{5}{2}} (A_1A_2A_3)^2 = 3 \cdot \sum_{\binom{5}{3}} (OA_1A_2)^2, \quad \sum_{\binom{5}{3}} (A_1A_2)^2 = 4 \cdot \sum_{\binom{5}{4}} (OA_1)^2.$$

Kehren wir nun zum n dimensionalen Raume. Die sich im Punkte O schneidenden n Geraden $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ sollen paarweise auf einander senkrecht stehen, und da dies nur im n dimensionalen Raume möglich ist, in diesem liegen. Bezeichnet man die Volumina der verschiedenen -eder dadurch, dass man die Eckpunkte in Klammern setzt, so kann man ebenso wie in den früheren Fällen schließen, dass

$$(A_2A_2A_3 \ldots A_n)^2 = \sum_{\binom{n}{1}} (OA_1A_2 \ldots A_{n-1})^2$$

$$\sum_{\binom{n}{1}} (A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1})^2 = 2 \cdot \sum_{\binom{n}{2}} (OA_1A_2 \ldots A_{n-2})^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{\binom{n}{p}} (A_1A_2A_3 \ldots A_{n-p})^2 = (p+1) \cdot \sum_{\binom{n}{p+1}} (OA_1A_2 \ldots A_{n-p-1})^2.$$

Diese letzte Gleichung drückt den für den n dimensionalen Raum verallgemeinerten Pythagoräischen Lehrsatz aus, den man in folgende Worte fassen kann:

Ist $O(A_1A_2 \ldots A_n)$ ein rechtwinkeliges n-eder im n dimensionalen Raume, so kann man die Punkte $A_1A_2 \ldots A_n$, auf den paarweise auf einander senkrechten Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, sowohl als die Eckpunkte

Digitized by Google

von $\binom{n}{p}$ $(n-p)$-eder, wie auch als die Eckpunkte von $\binom{n}{p+1}$ $(n-p-1)$-eder betrachten. Diese letzteren sind die Basen von solchen rechtwinkeligen $(n-p)$-eder, welche den Punkt O zum gemeinsamen $(n-p)$-ten Eckpunkte haben.

Die Summe der Quadrate der ersteren $\binom{n}{p}$ $(n-p)$-eder ist gleich der $(p+1)$-fachen Summe der Quadrate der letzteren $\binom{n}{p+1}$ rechtwinkeligen $(n-p)$-eder.

Digitized by Google

Über den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes.

Von **Erwin Dintzl** in Wien.

Von den zwei Ergänzungssätzen des quadratischen Reciprocitätsgesetzes

$$\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}},\quad \left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

kann der zweite, wie Gegenbauer[1]) und Kronecker[2]) gezeigt haben auf den ersten zurückgeführt werden. Ich werde nun in den folgenden Zeilen, einer Anregung meines hochverehrten Lehrers, Professor Gegenbauer, folgend, zeigen, dass auch für die biquadratischen Reste eine analoge Zurückführung des zweiten Ergänzungssatzes

$$\left(\left|\frac{1+i}{a+bi}\right|\right)=i^{\frac{a-b-1}{4}\cdot\frac{b-1}{4}}$$

auf den ersten

$$\left(\frac{i}{a+bi}\right)=i^{\frac{a^2-b^2-1}{4}\cdot\frac{b-1}{4}}$$

unter Benutzung des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes und der Verallgemeinerung der Zeichen für beliebige ungerade Zahlen der Form $a+bi$ stammt. Ich setze hiebei voraus, dass der Nenner primär also entweder $a=4s-1$, $b=4r$ oder $a=4s-1$, $b=4r+2$ ist, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut.

---

[1] „Note über das Legendre'sche Symbol." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe, 100 B. Abth. IIa. S. 503 ff.

[2] Siehe: Kronecker: „Das Reciprocitätsgesetz in der Theorie der quadratischen Reste". Acta Mathematica 3. B. S. 161 ff.

Digitized by Google

Zu diesem Behufe will ich drei Fälle unterscheiden:

$$b>0,\ b<0,\ b=0.$$

1. Da

$$\left(\left(\frac{m}{n}\right)\right)^4=1$$

ist, hat man nach dem Multiplicationssatze der Zeichen

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2+2i}{a+bi}\right)\right)$$
$$=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2-2i}{a+bi}\right)\right)$$

und nach dem Additionssatze

$$(1)\quad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+2+(b-2)i}{a+bi}\right)\right).$$

Nun ist nach dem biquadratischen Reciprocitätssatze für zwei theilerfremde ungerade Zahlen

$$\left(\left(\frac{a+2+(b-2)i}{a+bi}\right)\right)=(-1)^{\frac{(a+2)^2+(b-2)^2-1}{4}\cdot\frac{a^2+b^2-1}{4}}\cdot$$
$$\cdot\left(\left(\frac{a+bi}{a+2+(b-2)i}\right)\right).$$

Da sowohl für

$$a=4s+1$$
$$b=4r$$

als auch für

$$a=4s-1$$
$$b=4r+2$$

$(a^2+b^2-1)\left((a+2)^2+(b-2)^2-1\right)$ durch 32 theilbar ist, kann man Gleichung (1) in die folgende verwandeln

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+bi}{a+2+(b-2)i}\right)\right),$$

welche durch Subtraction des Nenners des letzten Zeichens vom Zähler umgeformt werden kann in

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{-2+2i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$

Digitized by Google

oder unter Benützung des Multiplicationssatzes und der Relation

$$-1+i=i(1+i)$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise ergeben sich die Relationen:

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\left(\frac{1+i}{a+(b-2)+2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+b-2+2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+b-2+2i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)$$

durch deren Multiplication schließlich die Formel entsteht

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right).$$
$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

Da

$$2i=(1+i)^2 \text{ und } 2=i^3(1+i)^2$$

ist, so geht diese Formel in folgende über

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)^2\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)^3\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right)$$

oder

$$(2)\qquad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

2. Ist $b<0$ also $b=-\beta$ und $\beta>0$, so hat man

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{-2+2i}{a-\beta i}\right)\right)$$

Digitized by Google

und nach dem Additionssatze

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right).$$

Da auch in diesem Falle

$$\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)$$

ist, so ergibt sich hieraus die Formel

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\\&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2-2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\end{aligned}$$

oder

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise entstehen die Relationen

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)$$

durch deren Multiplication man schließlich die Formel

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right),$$

oder

$$(3)\quad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right)$$

erhält.

Digitized by Google

oder unter Benützung des Multiplicationssatzes und der Relation

$$-1+i=i(1+i)$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise ergeben sich die Relationen:

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\left(\frac{1+i}{a+(b-2)+2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{.2}{a+b-2+2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+b-2+2i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)$$

durch deren Multiplication schließlich die Formel entsteht

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right).$$
$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

Da

$$2i=(1+i)^2 \text{ und } 2=i^3(1+i)^2$$

ist, so geht diese Formel in folgende über

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)^2\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)^3\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right)$$

oder

$$\text{(2)}\qquad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

2. Ist $b<0$ also $b=-\beta$ und $\beta>0$, so hat man

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{-2+2i}{a-\beta i}\right)\right)$$

Digitized by Google

und nach dem Additionssatze

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right).$$

Da auch in diesem Falle

$$\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)$$

ist, so ergibt sich hieraus die Formel

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\\&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2-2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\end{aligned}$$

oder

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise entstehen die Relationen

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)$$

durch deren Multiplication man schließlich die Formel

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right),$$

oder

$$(3)\quad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right)$$

erhält.

Digitized by Google

oder unter Benützung des Multiplicationssatzes und der Relation

$$-1+i=i(1+i)$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise ergeben sich die Relationen:

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+2+(b-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+2+(b-2)i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+4+(b-4)i}\right)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\left(\frac{1+i}{a+(b-2)+2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{.2}{a+b-2+2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+b-2+2i}\right)\right)$$
$$\left(\left(\frac{2}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)$$

durch deren Multiplication schließlich die Formel entsteht

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{i}{a+bi}\right)\right)\left(\left(\frac{2i}{a+b}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right).$$
$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

Da

$$2i=(1+i)^2 \text{ und } 2=i^3(1+i)^2$$

ist, so geht diese Formel in folgende über

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)^2\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)^3\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right)$$

oder

$$(2)\qquad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a+b}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right).$$

2. Ist $b<0$ also $b=-\beta$ und $\beta>0$, so hat man

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{-2+2i}{a-\beta i}\right)\right)$$

Digitized by Google

und nach dem Additionssatze

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right).$$

Da auch in diesem Falle

$$\left(\left(\frac{a-2-(\beta-2)i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)$$

ist, so ergibt sich hieraus die Formel

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{a-\beta i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\\&=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2-2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\end{aligned}$$

oder

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-\beta i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right).$$

In derselben Weise entstehen die Relationen

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-2-(\beta-2)i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-4-(\beta-4)i}\right)\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a-(\beta-2)-2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)$$

durch deren Multiplication man schließlich die Formel

$$\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{2i}{a+bi}\right)\right)^3\left(\left(\frac{2i}{a-\beta}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\cdot\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right),$$

oder

$$(3)\quad \left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta i}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+i}{a-\beta}\right)\right)\prod_{\alpha=1}^{\frac{\beta}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(\beta-2\alpha)i}\right)\right)$$

erhält.

Digitized by Google

3. Ist endlich $b = 0$, so hat man wegen

$$\left(\left(\frac{-2}{\nu}\right)\right) = +1$$

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{-2}{\nu}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{-2-2i}{\nu}\right)\right)$$

und nach dem Additionssatze

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu-2-2i}{\nu}\right)\right).$$

Wegen

$$(-1)^{\frac{\nu^2-1}{4}\cdot\frac{(\nu-2)^2+4-1}{4}} = +1$$

ist nach dem biquadratischen Reciprocitätsgesetze

$$\left(\left(\frac{\nu-2-2i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu}{\nu-2-2i}\right)\right)$$

und daher

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu}{\nu-2-2i}\right)\right)$$

oder nach dem Additionssatze

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{2+2i}{\nu-2-2i}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{i}{\nu-2-2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{1+i}{\nu-2-2i}\right)\right)^3.$$

Indem man auf

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu-2-2i}\right)\right)$$

die Formel (3) anwendet, ergibt sich

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+i}{\nu-4}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{\nu-4}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1+i}{\nu-4}\right)\right).$$

Mithin ist

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\nu-2-2i}\right)\right)^3\left(\left(\frac{1+i}{\nu-4}\right)\right)^3$$

oder

$$1 = \left(\left(\frac{i}{\nu-2-2i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu-4}\right)\right).$$

Digitized by Google

Analog findet man

$$1 = \left(\left(\frac{i}{\nu - 6 - 2i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 8}\right)\right)$$

.....

$$1 = \left(\left(\frac{i}{\nu - 2(2s-3) - 2i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4(s-1)}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4(s-1)}\right)\right)$$

$$1 = \left(\left(\frac{i}{\nu - 2(2s-1) - 2i}\right)\right).$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen entsteht die Relation

$$1 = \left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right)\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4}\right)\right)^2\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 8}\right)\right)^2 \cdots$$

$$\cdots \left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4(s-1)}\right)\right)^2 \prod_{\alpha=1}^{s} \left(\left(\frac{i}{\nu - 2(2\alpha - 1) - 2i}\right)\right).$$

Nun ist

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu - 4\rho}\right)\right)^2 = \left(\left(\frac{2i}{\nu - 4\rho}\right)\right) = \left(\left(\frac{2}{\nu - 4\rho}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{\nu - 4\rho}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{i}{\nu - 4\rho}\right)\right).$$

Daher verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende

$$(4) \qquad \left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \left\{\prod_{\alpha=1}^{s} \left(\left(\frac{i}{\nu - 4\alpha}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{\nu - 2(2\alpha - 1) - 2i}\right)\right)\right\}^3.$$

Mit Hilfe dieser Formel verwandeln sich (2) und (3) endlich für $b > 0$ in

$$(5) \qquad \left(\left(\frac{1+i}{a + bi}\right)\right) = \prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}} \left(\left(\frac{-1}{a + 2\alpha + (b - 2\alpha)i}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\alpha=1}^{\frac{a+b-3}{2}} \left(\left(\frac{i}{a + b - 4\alpha}\right)\right)^3 \left(\left(\frac{i}{a + b - 2(2\alpha - 1) - 2i}\right)\right)^3$$

$$(6) \qquad \left(\left(\frac{1+i}{a - bi}\right)\right) = \prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}-1} \left(\left(\frac{-1}{a - 2\alpha - (b - 2\alpha)i}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\alpha=1}^{\frac{a-b-3}{2}} \left(\left(\frac{i}{a - b - 4\alpha}\right)\right)^3 \left(\left(\frac{i}{a - b - 2(2\alpha - 1) - 2i}\right)\right)^3.$$

Damit ist unsere eigentliche Aufgabe gelöst, da durch diese Relation das Zeichen

$$\left(\left(\frac{1+i}{n}\right)\right)$$

Digitized by Google

auf das Zeichen

$$\left(\left(\frac{i}{m}\right)\right)$$

zurückgeführt ist.

Wir wollen aber noch durch Ausrechnung der Producte die bekannten Werte von

$$\left(\left(\frac{1+i}{n}\right)\right)$$

ableiten.

Nach der Definition des Zeichens ist

$$\left(\left(\frac{-1}{m}\right)\right)=(-1)^{\frac{Nm-1}{4}}$$

und daher

$$\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right)=(-1)^{\frac{1}{4}S_1}$$

wo

$$S_1=\sum_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\{(a+2\alpha)^2+(b-2\alpha)^2-1\}=$$

$$=\frac{b}{2}\{(a+b)^2-1\}-4(a+b)\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}+1\right)}{2}+8\left(1^2+\cdots+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$$

also

$$S_1\equiv\frac{b}{2}\{(a+b)^2-1\}-4(a+b)\frac{b(b+2)}{8}\pmod 8$$

oder wegen

$$a+b=4s+1$$

$$S_1\equiv-4\cdot\frac{b(b+2)}{8}\pmod 8$$

ist. Daher hat man

$$\prod_{\alpha=0}^{\frac{b}{2}-1}\left(\left(\frac{-1}{a+2\alpha+(b-2\alpha)i}\right)\right)=(-1)^{\frac{b(b+2)}{8}}.$$

Ebenso hat man

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}}\left(\left(\frac{-1}{a-2\alpha-(b-2\alpha)i}\right)\right)=(-1)^{\frac{1}{4}S_2}$$

Digitized by Google

wo

$$S_2 = \sum_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}} \{(a-2\alpha)^2 + (b-2\alpha)^2 - 1\}$$

also

$$S_2 \equiv \frac{b}{2}(a^2+b^2-1) - 4(a+b)\cdot\frac{b(b+2)}{8} \pmod 8$$

oder

$$S_2 \equiv \frac{b^3}{2} - 4\cdot\frac{b(b+2)}{8} = \frac{b^3}{2} + \frac{b(b+2)}{2} \pmod 8$$

ist, so dass

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{b}{2}} \left(\left(\frac{-1}{a-2-\alpha(b-2\alpha)i}\right)\right) = (-1)^{\frac{b^3+b(b+2)}{8}}$$

wird. Ferner ist wegen

$$\left(\left(\frac{1+i}{\nu}\right)\right) = \prod_{\alpha=1}^{\frac{a\pm b-1}{4}} \left\{ i^{\frac{(\nu-4\alpha)^2-1}{4}} \cdot i^{\frac{(\nu-2(2\alpha-1))^2+4-1}{4}} \right\}^3$$

$$= i^{\frac{3}{4}S^1}$$

wo

$$S^1 = \sum_{\alpha=1}^{\frac{a\pm b-1}{4}} \{(\nu-4\alpha)^2 + (\nu-4\alpha+2)^2 + 2\}$$

ist. Da nun

$$A = (\nu-4\alpha)^2 + (\nu-4\alpha+2)^2 + 2 = 2\{(\nu-4\alpha)(\nu-4\alpha+2)+3\}$$

also wegen

$$\nu = a \pm b = 4s+1 \quad A \equiv 2 \pmod{16}$$

ist, so ergibt sich

$$S^1 \equiv -(a \pm b - 1) \pmod{16}$$

und daher

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{a\pm b-1}{4}} \left\{ \left(\left(\frac{i}{\nu-4\alpha}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{\nu-2(2\alpha-1)-2i}\right)\right) \right\}^3 = i^{\frac{a\pm b-1}{4}}.$$

Durch Benützung dieser Relationen verwandelt man (5) und (6) in folgende Formeln

(7) $$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{a+b^2+3b-1}{4}}$$

und

(8) $$\left(\left(\frac{1+i}{a-bi}\right)\right) = i^{\frac{a+b^3+b^3+b-1}{4}}$$

Digitized by Google

Da sowohl für $b = 4\nu$, als auch für $b = 4\nu + 2$,

$$b^2 + 3b \equiv -b^2 - b \pmod{16}$$

und

$$b^3 + b^2 + b \equiv -b^2 + b \pmod{16}$$

ist, so kann man die beiden Gleichungen (7) und (8) in eine einzige Gleichung, zusammenfassen

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{a-b^2-b-1}{4}} \tag{9}$$

die sowohl für positives als auch negatives b gilt.

Berichtigung.

Band IX. Seite 322 Zeile 15 ist „in“ zu streichen. Seite 325 Zeile 5 statt „1“ ist „I“, Literatur-Berichte Seite 51 Zeile 10 statt „wichtig“ ist „richtig“ zu setzen.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

La maison Gauthier-Villars (Paris, 55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l' *Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1899. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur-constructeur P. GAUTIER, *sur* **le Sidérostat à lunette de soixante mètres** *de foyer et de 1^m, 25 d'ouverture*, qu'il construit pour l'Exposition de 1900; la *Notice sur les ballons-sondes*, par M. BOUQUET DE LA GRYE, et la *Notice sur la Géodésie moderne en France*, par le Colonel BASSOT. In-18 de VI-784 pages, avec 2 Cartes magnétiques: 1^fr, 50 (franco, 1^fr, 85).

Digitized by Google

Verlag von Louis Nebert in Halle a. S.

Thomae, Prof., Dr. A., **Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complex. Veränderlichen.** Zweite Auflage gr. 4°. geh. 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen.** Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Prof. Felix Müller. Lex. 8. geh. 18 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss einer Theorie der Functionen einer complex. Veränderlichen und der Thetafunctionen.** Dritte erheblich vermehrte Auflage. gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhein'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Über eine specielle Classe Abel'scher Functionen.** 2 Hefte gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Über eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung IV. Ordnung Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Übungsbuch für den geometrischen Theil der Functionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projectivischen Geometrie.** Auf Grund neuer von Prof. Karl Küpper herrühr. Definitionen und Beweise leichfasslich zusammengestellt. gr. 8. geh. 2 M. 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale.** Zweite verb. und verm. Auflage gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton-schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfi fil Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhi.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Über die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8 geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A, **Über Pole und Polaren der parabolischen Curven dritter Ordnung.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8 geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. J. A., **Über Beta- und Gammafunctionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Soeben wurde ausgegeben:

Lager-Katalog Nr. 16

enthaltend 7000 wertvolle Werke aus allen Wissenschaften.

☞ An wirkliche Bücherkäufer wird dieser reichhaltige Katalog gratis und franco abgegeben.

J. Eisenstein & Co.

Buchhandlung und Antiquariat

in Wien, IX/3, Währingerstrasse 2.

Digitized by Google

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

X. Jahrgang 1899. *2. Vierteljahr.*

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 1 1899

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR CULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. G. v. ESCHERICH und Prof. L. GEGENBAUER

IN WIEN.

WIEN, 1899.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Bezugspreis: Jährlich 7 fl.

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Wendt, Cäcilie, Note über die Kreisfunctionen 97
Internationaler Mathematiker-Congress 101
Igel, B., Zur Theorie der Formen vierter Ordnung 102
Bobek, Karl, Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen 122
Janisch, Eduard, Neue Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für Kegelschnitte 182
Gegenbauer, Leopold, Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art . 189

Literatur-Berichte.

Junker, Friedrich, Dr., Höhere Analysis 15
Neumann, Anton, Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 15
Picard, Emile, M., Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois 16
Braunmühl, A. v., Nassîr Êddin Tûsi und Regiomontan 16
Haussner, Robert, Dr., Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz 17
Braunmühl, A. v., Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie 18
Kutta, W., M., Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung 19
Neumann, Karl, Die elektrischen Kräfte 19
Annuaire pour l'an 1899 20
Salmon, George, Analytische Geometrie des Raumes 21
Kober, Georg, Die Grundgebilde der neueren Geometrie 22
Tierz, Ed., Les recettes du distillateur 22
Annuaire de l'observatoire 22
Sturm, Ch. Lehrbuch der Mechanik 23
Herrmann, Richard, Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen 23
Tyndall, John, In den Alpen 24
Ritter, August, Dr., Lehrbuch der höheren Mechanik. 24
Pscheidl, W., Dr., Prof., Grundriss der Naturlehre 25
Petersen, Julius, Vorlesungen über Functionstheorie 25
Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897 26
Astronomischer Kalender für 1899 26
Frolov, Michel, La théorie des parallèles 27
Neumann, Anton, Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien 27
Spielmann, Johann, Močniks Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien 27
Loria, Gino, Bolletino di bibliografia e storia 28
Aexandroff, Ivan, Problèmes de géométrie élémentaire 28
Poincaré, H., Les méthodes nouvelles 29
Arnoux, V., 2500 Problèmes d'arithmetique et de géométrie pratique . . 30
Reye, Theodor, Die Geometrie der Lage. 30

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 1 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Note über die Kreisfunctionen.

Von **Cäcilie Wendt** in Wien.

Im Jahre 1831 hat Herr Dr. Hessel, Professor an der Universität in Marburg, in seiner Krystallometrie die Behauptung ausgesprochen, dass $\cos \frac{2\pi}{n}$ nur für 5 Werte von n $(n = 1, 2, 3, 4, 6)$ rational ist. Trotz vielfacher Versuche und mannigfaltiger Umfrage bei verschiedenen Mathematikern gelangte er jedoch erst im Jahre 1868 gelegentlich einer „größeren Arbeit über die holometrischen Systeme von Punkten, Strahlen und sonstigen Raumgebilden" zu einem äußerst umständlichen Beweise derselben, welchen er im 48. Bande des Archivs der Mathematik und Physik von J. A. Grunert mittheilte.

Dass die Richtigkeit des angeführten Satzes sowohl aus der Irreductibilität der Theilungsgleichung für den Cosinus, als auch aus den Sätzen über die zur Darstellung der Wurzeln von algebraisch auflösbaren Gleichungen nothwendigen Irrationalitäten gefolgert werden kann, ist selbstverständlich; allein man reicht, wie ich einer Anregung meines hochverehrten Lehrers, Prof. Dr. Leopold Gegenbauer folgend, in den nachfolgenden Zeilen zeigen werde, zu dem Beweise desselben sowie zur Beantwortung der analogen Frage in Bezug auf den Sinus und die Tangente mit den einfachsten Mitteln aus.

Herr Prof. Dr. A. Winckler hat allerdings schon im Jahre 1869 in seiner im 59. Bande der Sitzungsberichte der math.-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien enthaltenen Abhandlung „Über einige Gegenstände der elementaren Analysis", eine mit elementaren Mitteln durchgeführte Ableitung der betreffenden Sätze gegeben. Allein da diese Fragen auch Kreise interessieren, welche mit mathematischen Untersuchungen nicht sonderlich vertraut sind, so dürfte die Winckler'sche Ableitung, welche 9 Seiten umfaßt, etwas zu umständlich erscheinen, und demnach die Veröffentlichung der folgenden weit einfacheren, manchem nicht unerwünscht sein.

Digitized by Google

I. Beachtet man, dass für jeden ganzzahligen Wert von n [1])

$$(1) \qquad 2\cos nx = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \frac{n}{n-\lambda} \cdot \binom{n-\lambda}{\lambda} (2\cos x)^{n-2\lambda}$$

ist, so erkennt man, dass $\cos\frac{2\pi}{nr}$ bei ganzzahligen n und r nur dann rational sein kann, wenn dies von $\cos\frac{2\pi}{r}$ gilt, da eine ganze Function einer rationalen Zahl nothwendig rational ist.

Man kann sich daher zunächst auf die Ermittlung derjenigen Primzahlen p beschränken, für welche $\cos\frac{2\pi}{p}$ rational ist.

Setzt man in der vorstehenden Gleichung

$$n = p, \ (p \text{ ungerade}), \ x = \frac{2\rho\pi}{p},$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{p}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \frac{p}{p-\lambda} \binom{p-\lambda}{\lambda} y^{p-2\lambda} - 2 = 0$$

wo

$$2\cos\frac{2\rho\pi}{p} = y$$

gesetzt wurde. Man erhält $\frac{p+1}{2}$ verschiedene Wurzeln dieser Gleichung p^{ten} Grades, wenn man ρ der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ gibt, da je zwei der Größen $2\cos\frac{2\rho\pi}{p}$ und $2\cos\frac{2\mu\pi}{p}$ von einander verschieden sind. Aus der Gleichung

$$\cos\frac{2\rho\pi}{p} = \cos\frac{2\mu\pi}{p} \qquad \left(\rho, \mu \leqq \frac{p-1}{2}\right)$$

würde nämlich folgen

$$\frac{2\rho\pi}{p} = \frac{2\mu\pi}{p} + 2\varkappa\pi \quad (\varkappa = \text{ganze Zahl})$$

oder

$$\rho - \mu = \varkappa p$$

was nur für $\varkappa = 0$, also $\rho = \mu$ möglich ist.

In der Gleichung (2) ist der Coefficient der höchsten Potenz von y gleich 1, die übrigen aber sind, wie sofort gezeigt werden soll, ganze Zahlen. Es ist

[1]) Lagrange „Leçons sur le calcul des fonctions." p. 114.

Digitized by Google

$$\binom{p-\lambda}{\lambda} = \frac{p-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{(p-\lambda-1)(p-\lambda-2)\ldots(p-2\lambda+1)}{(\lambda-1)!}$$
$$= \frac{p-1}{\lambda}\binom{p-\lambda-1}{\lambda-1}$$

Da die in dieser Gleichung vorkommenden Binomialcoefficienten ganze Zahlen sind, da ferner, weil $\lambda < p$ ist $p-\lambda$ und λ zu einander theilerfremd sind, so muss $\binom{p-\lambda-1}{\lambda-1}$ durch λ theilbar sein und demnach $\binom{p-\lambda}{\lambda}$ den Factor $p-\lambda$ haben und somit jeder Coefficient in der Gleichung (2) eine ganze Zahl sein.

Nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Algebra ist daher jede rationale Wurzel derselben eine ganze Zahl. Da nun aber, wenn $2\cos\frac{2\pi}{p}$ ganz ist nach (1) auch $2\cos\frac{2\rho\pi}{p}$ für jedes ganzzahlige ρ ganz ist, so müsste die Gleichung (2) bei rationalem $\cos\frac{2\pi}{p}$ mindestens $\frac{p+1}{2}$ ganzzahlige, untereinander verschiedene Wurzeln haben, welche, da der Cosinus zwischen -1 und $+1$ liegt, dem Intervalle $-2 \cdots +2$ angehören würden. Weil 0 dieser Gleichung nicht genügt und weil dieselbe ferner durch $-w$ nicht befriedigt wird, wenn $+w$ eine ihrer Wurzeln ist, so könnte die Anzahl der oben erwähnten Wurzeln höchstens gleich 2 sein und daher müsste $\frac{p+1}{2} \leqq 2$ sein, was nur für $p=3$ der Fall ist.

Jede Zahl n für welche $\cos\frac{2\pi}{n}$ rational ist, hat daher nach der im Anfange dieses Abschnittes gemachten Bemerkung die Form $2^\alpha 3^\beta$. Nun ist aber bekanntlich

$$\cos 2\pi = +1,\ \cos\pi = -1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{|\sqrt{2}|},\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

es hat ferner $\cos\frac{2\pi}{9}$ einen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ gelegenen irrationalen Wert und daher können nach der oben angeführten Bemerkung α und β nur die Werte 0, 1, 2, bezw. 0, 1 haben, wobei die Combination $\alpha=2$, $\beta=1$ wegen $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ auszuschließen ist. Hiermit ist der Satz des Herrn Hessel bewiesen.

Für den Sinus braucht die Untersuchung nicht besonders durchgeführt zu werden, da sie wegen der Beziehung

$$\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi + x\right) = (-1)^k \cos x$$

auf die eben beendete zurückkommt.

Digitized by Google

II. Ich will nun die Frage nach der Rationalität von $\operatorname{tang}\frac{2\pi}{n}$ erledigen. Zu dem Behufe soll zunächst der Vollständigkeit halber eine bekannte Tangentenrelation abgeleitet werden.

Aus der Gleichung

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \prod_{\lambda=1}^{n-1} (x - \omega^{2\lambda} y)$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n-1} (x\,\omega^{-\lambda} - y\,\omega^{\lambda}),$$

wo n eine ungerade Zahl und ω eine primitive n^{te} Einheitswurzel $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right)$ vorstellt, folgt für $x = -y = 1$ die Beziehung

$$\prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos^2\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

während sich aus ihr für $x = y = 1$ die Formel

$$\prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin^2\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

ergibt, deren Verbindung mit der ersten zu der Relation

$$\prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{2\lambda\pi}{n} = \sqrt{n}$$

führt. Die an sich leichte Bestimmung des Zeichens der Quadratwurzel ist für die gegenwärtige Untersuchung nicht nöthig.

Da nun die Tangente des Vielfachen eines Winkels sich als rationale Function der Tangente des einfachen Winkels mit ganzzahligen Coefficienten ausdrücken lässt (Multiplicationstheorem der Tangente), so ist das Product auf der linken Seite dieser Gleichung eine rationale, ganzzahlige Function von $\operatorname{tang}\frac{2\pi}{n}$ und es kann daher $\operatorname{tang}\frac{2\pi}{n}$ nicht rational sein, wenn n gleich einer ungeraden Primzahl ist, weil das genannte Product gleich $\sqrt{n}$ ist. Beachtet man, dass bei der Tangente analoge Verhältnisse bezüglich der Multiplication wie beim Cosinus bestehen, so sieht man, dass $\operatorname{tang}\frac{2\pi}{n}$ nur rational sein kann, wenn $n = 2^\alpha$ ist. Nun ist aber

$$\operatorname{tang} 2\pi = 0,\ \operatorname{tang}\pi = 0,\ \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \infty,\ \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1,\ \operatorname{tang}\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

und daher hat man den Satz:

Die Tangente des Argumentes $\frac{2\pi}{n}$ ist nur für die drei Werte $n = 1,\ 2,\ 8$ rational.

Digitized by Google

Internationaler Mathematiker-Congress.

Der nächste internationale Mathematiker-Congress findet in Paris vom 6. bis 12. August 1900 statt. Auf demselben werden mindestens zwei allgemeine Sitzungen und jeden Vormittag Sectionssitzungen abgehalten und gemeinsame Besichtigungen wissenschaftlicher Institute vorgenommen werden. Ein gemeinsames Bankett und Ausflüge in die Umgebung von Paris werden dazu dienen, die Congressmitglieder in näheren persönlichen Verkehr zu bringen.

Die Theilnehmerkarte kostet 30 Francs. Dieselbe gibt das Recht zur Theilnahme an den Arbeiten des Congresses, sowie an allen Versammlungen und gemeinsamen Besichtigungen, ferner zur Theilnahme am Bankette und zum unentgeltlichen Bezuge des Tagblattes. Für Familienmitglieder der Congresstheilnehmer werden ermäßigte Karten ausgegeben werden.

Es empfiehlt sich, möglichst bald vorläufige Anmeldungen zur Theilnahme am Congresse, welche selbstverständlich noch keine verbindliche Kraft haben, an das Organisationscomité (M. le Président de la Société mathématique de France, Paris, rue des Grands-Augustins, 7) zu richten.

Digitized by Google

Zur Theorie der Formen vierter Ordnung.

Von B. Igel in Wien.[1])

§. 1.

In keiner Theorie in der Mathematik gibt es etwas, was sich so fertig und nach allen Richtungen hin so schön abgerundet repräsentiert, wie das Capitel „Formen vierter Ordnung“ in der Theorie der binären Formen. Und wenn ich auf dasselbe dennoch zurückkomme, so geschieht es aus folgenden drei Gründen. Es ist seit Cayley bekannt, dass die invariantentheoretische Auflösung der Gleichung vierten Grades sich auf die fundamentale Formel:

$$\tau^2 = -\frac{1}{2}\{H^3 - \frac{i}{2} Hf + \frac{j}{3} f^3\} \tag{1}$$

gründet. Adjungiert man die Wurzeln der Resolvente dritten Grades, so stellt sich diese Formel in folgender Gestalt dar:

$$\tau^2 = -\frac{1}{2}(H + e_1 f)(H + e_2 f)(H + e_3 f) \tag{2}$$

und man schließt daraus, dass die quadratischen Formen

$$\sqrt{H + e_1 f} = \varphi,\ \sqrt{H + e_2 f} = \psi,\ \sqrt{H + e_3 f} = \chi \tag{3}$$

conjugierte Formen sind. Nun hat sich in neuester Zeit das Bestreben geltend gemacht,[2]) direct nachzuweisen, dass die Formen (3) conjugiert sind und daraus die Formel (2) abzuleiten. Ferner habe ich in meiner Monographie „Über die associierten Formen und deren Anwendung in der Theorie der Gleichungen“ gezeigt, dass

$$\tau(-f) = \tau . \Phi \tag{4}$$

[1]) Herr Dr. Benzion Igel, welcher an diesen „Monatsheften“ seit dem Inslebentreten derselben sich betheiligte, ist im August 1898 gestorben. Die Schriftleitung wird ihn stets in freundlicher Erinnerung behalten. Die vorliegende Arbeit, welche am 28. Mai 1893 vollendet wurde, wurde der Schriftleitung von seiner Witwe, Frau Susanne Igel, zur Veröffentlichung übergeben.

[2]) S. den § 5 in der Abh. des Herrn Frobenius, „Theorie der biquadr. Formen“ Kronecker's Journal Bd. 106.

Digitized by Google

wo

$$f = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

ist und daraus geschlossen, dass $\tau = 0$ die Wurzeln hat:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_1 - \left[\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}\right]_\alpha \\ \gamma_1 - \left[\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}\right]_\gamma \\ \lambda_1 - \left[\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}\right]_\lambda \end{cases}$$

Es entsteht nun die Frage, welche ich schon dort angedeutet habe, ob es noch Formen gibt, deren Covariante $\tau = 0$ eine solche Abel'sche Gleichung sei. Endlich lehnt sich die geometrische Interpretation der Form vierter Ordnung, welche den Endpunkt des genannten Capitels bildet, gewöhnlich an die kanonische Darstellung derselben an, und es drängt sich die Frage auf, ob man nicht direct die geometrischen Sätze ableiten könnte. Ich mache im Folgenden den Endpunkt zum Anfangspunkt, d. h. ich gehe von der geometrischen Interpretation aus, beweise die geometrischen Sätze direct, beweise dann, dass die Formen φ, ψ, χ conjugiert sind und komme dann zur Relation (2).

§. 2.

Sind φ, ψ, χ die quadratischen Factoren von τ und sind α, β; γ, δ; μ, ν die Verschwindungselemente derselben, so bestehen, wie aus (5) folgt, die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} -\left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\alpha = \beta - \left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\beta = \alpha \\ -\left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\gamma = \delta - \left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\delta = \gamma \\ -\left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\mu = \nu - \left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\nu = \mu. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass F aus den linearen Factoren von τ auf irgend eine Weise zusammengesetzt sein müsse. Anderseits folgt aber aus dem Umstande, dass schon zwei Paare der Gleichungen (6) genügen, um F zu bestimmen, dass man F durch irgend zwei der quadratischen Formen darstellen kann. Wir können also auf dreierlei Weise F darstellen:

$$(7) \quad \begin{cases} F = A\ \varphi^2 + B\ \psi^2 \\ F = A'\ \varphi^2 + B'\ \chi^2 \\ F = A''\ \psi^2 + B''\ \chi^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

Aus diesen Darstellungen folgen die Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} (A-A')\varphi^2 + b\psi^2 - B'\chi^2 = 0 \\ A\varphi^2 + (B-A'')\psi^2 - B''\chi^2 = 0 \\ A'\varphi^2 - A''\psi^2 + (B'-B'')\chi^2 = 0 \end{cases}$$

und aus diesen die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \{B''(A-A') - B'A\}\varphi^2 + \{BB'' - B'(B-A'')\}\psi^2 = 0 \\ \{(A-A')(B'-B'') + A'B'\}\varphi^2 + \{B(B'-B'') - A''B'\}\psi^2 = 0 \\ \{A(B'-B'') + A'B''\}\varphi^2 + \{(B-A'')(B'-B'') - A''B''\}\psi^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Coefficienten, gleich Null gesetzt, ergeben die zwei Gleichungen:

$$B(B'-B'') = A''B'$$
$$A(B'-B'') = -A'B''$$

oder

$$(10)\qquad \frac{A}{B} = -\frac{A'B''}{A''B'}.$$

Wählt man nun B so, dass es A proportional ist, was immer möglich ist, so folgt, dass auch B' und B'' resp. A' und A'' proportional sind und dass man B, B', B'' mit negativen Zeichen zu nehmen hat.

Es ist daher

$$(11)\qquad \begin{cases} F = A\ (\varphi^2 - \psi^2) \\ F = A'\ (\varphi^2 - \chi^2) \\ F = A''\ (\psi^2 - \chi^2). \end{cases}$$

Von den Größen A', welche für diesen §. irrelevant sind und im §. 3 bestimmt werden, wollen wir jetzt absehen. Auch wollen wir nur eine dieser Darstellungen von F zu Grunde legen und zwar möge es die erste sein. Aus derselben folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x} =$$
$$= \frac{-\alpha(x-\alpha y)(x-\beta y)^2 - \beta(x-\alpha y)^2(x-\beta y) + \gamma(x-\gamma y)(x-\delta y)^2 + \delta(x-\gamma y)^2(x-\delta y)}{(x-\alpha y)(x-\beta y)^2 + (x-\alpha y)^2(x-\beta y) - (x-\gamma y)(x-\delta y)^2 + (x-\gamma y)^2(x-\delta y)}$$

folglich ist

$$(12)\qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\alpha = \frac{\gamma(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)^2 + \delta(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)}{-(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)^2 - (\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)} = -\beta \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}\right]_\gamma = \frac{-\alpha(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)^2 - \beta(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)^2 + (\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)} = -\delta. \end{cases}$$

Digitized by Google

Entwickelt geben beide dieselbe Gleichung:

$$(13)\quad (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)+(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)\}=0,$$

d. h. die Elementenpaare α, β; γ, δ sind zu einander harmonisch. Es ist ferner

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\mu}=$$

$$=\frac{-\alpha(\mu-\alpha)(\mu-\beta)^2-\beta(\mu-\alpha)^2(\mu-\beta)+\gamma(\mu-\gamma)(\mu-\delta)^2+\delta(\mu-\gamma)^2(\mu-\delta)}{(\mu-\alpha)(\mu-\beta)^2+(\mu-\alpha)^2(\mu-\beta)-(\mu-\gamma)(\mu-\delta)^2-(\mu-\gamma)^2(\mu-\delta)}=-\nu.$$

Entwickelt gibt dies die Gleichung

$$(14)\quad \begin{aligned}&(\nu-\alpha)(\mu-\alpha)(\mu-\beta)^2+(\nu-\beta)(\mu-\alpha)^2(\mu-\beta)+\\&+(\nu-\gamma)(\mu-\gamma)(\mu-\delta)^2+(\nu-\delta)(\mu-\gamma)^2(\mu-\delta)=\\&=(\mu-\alpha)(\mu-\beta)\{(\nu-\alpha)(\mu-\beta)+(\nu-\beta)(\mu-\alpha)\}+\\&+(\mu-\gamma)(\mu-\delta)\{(\nu-\gamma)(\mu-\delta)+(\nu-\delta)(\mu-\gamma)\}=0.\end{aligned}$$

Vertauscht man μ mit ν, so ändern sich die Ausdrücke innerhalb der Klammern nicht, während die außerhalb derselben sich ändern. Wir schließen daher, dass (14) in folgende zwei Relationen zerfällt:

$$(15)\quad \begin{cases}(\nu-\alpha)(\mu-\beta)+(\nu-\beta)(\mu-\alpha)=0\\(\nu-\gamma)(\mu-\delta)+(\nu-\delta)(\mu-\gamma)=0.\end{cases}$$

Die Gleichungen (13) und (15) liefern den bekannten Satz:

„Die drei quadratischen Factoren von τ stellen drei Elementenpaare dar, von denen je zwei zu einander harmonisch sind."

Zerlegen wir F in seine linearen Factoren, setzen also

$$F=(x-Ay)(x-By)(x-\Gamma y)(x-\Delta y)$$

so folgen aus (6) die drei Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases}\begin{aligned}&(\beta-A)(\alpha-B)(\alpha-\Gamma)(\alpha-\Delta)+\\&+(\beta-B)(\alpha-A)(\alpha-\Gamma)(\alpha-\Delta)+\\&+(\beta-\Gamma)(\alpha-A)(\alpha-B)(\alpha-\Delta)+\\&+(\beta-\Delta)(\alpha-A)(\alpha-B)(\alpha-\Gamma)=0\end{aligned}\\ \begin{aligned}&(\delta-A)(\gamma-B)(\gamma-\Gamma)(\gamma-\Delta)+\\&+(\delta-B)(\gamma-A)(\gamma-\Gamma)(\gamma-\Delta)+\\&+(\delta-\Gamma)(\gamma-A)(\gamma-B)(\gamma-\Delta)+\\&+(\delta-\Delta)(\gamma-A)(\gamma-B)(\gamma-\Gamma)=0\end{aligned}\\ \begin{aligned}&(\nu-A)(\mu-B)(\mu-\Gamma)(\mu-\Delta)+\\&+(\nu-B)(\mu-A)(\mu-\Gamma)(\mu-\Delta)+\\&+(\nu-\Gamma)(\mu-A)(\mu-B)(\mu-\Delta)+\\&+(\nu-\Delta)(\mu-A)(\mu-B)(\mu-\Gamma)=0.\end{aligned}\end{cases}$$

Digitized by Google

Dieselben lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$(17)\quad \begin{cases} (\alpha-\Gamma)(\alpha-\Delta)\{(\beta-A)(\alpha-B)+(\beta-B)(\alpha-A)\} \\ +(\alpha-A)(\alpha-B)\{(\beta-\Gamma)(\alpha-\Delta)+(\beta-\Delta)(\alpha-\Gamma)\}=0 \\ (\gamma-B)(\gamma-\Delta)\{(\delta-A)(\gamma-\Gamma)+(\delta-\Gamma)(\gamma-\Delta)\} \\ +(\gamma-A)(\gamma-\Gamma)\{(\delta-B)(\gamma-\Delta)+(\delta-\Delta)(\gamma-B)\}=0 \\ (\mu-B)(\mu-\Gamma)\{(\nu-A)(\mu-\Delta)+(\nu-\Delta)(\mu-A)\} \\ +(\mu-A)(\mu-A)\{(\nu-B)(\mu-\Gamma)+(\nu-\Gamma)(\mu-B)\}=0. \end{cases}$$

Aus dem Umstande, dass bei einer Vertauschung von A mit B und Γ mit Δ die Ausdrücke innerhalb der Klammern sich nicht ändern, während diejenigen außerhalb der Klammern sich ändern, schließt man, wie oben, dass jede der Gleichungen in zwei zerfällt.

Die aus diesen folgenden Gleichungen

$$\frac{(\beta-A)(\alpha-B)}{(\beta-B)(\alpha-A)}=-1, \quad \frac{(\beta-\Gamma)(\alpha-\Delta)}{(\beta-\Delta)(\alpha-\Gamma)}=-1,$$
$$\frac{(\delta-A)(\gamma-\Gamma)}{(\delta-\Gamma)(\gamma-A)}=-1, \quad \frac{(\delta-B)(\gamma-\Delta)}{(\delta-\Delta)(\gamma-B)}=-1,$$
$$\frac{(\nu-A)(\mu-\Delta)}{(\nu-\Delta)(\mu-A)}=-1, \quad \frac{(\nu-B)(\mu-\Gamma)}{(\nu-\Gamma)(\mu-B)}=-1$$

liefern den bekannten Satz:

„In Bezug auf die Elemente eines jeden der Factoren von τ zerlegt sich die Form F in zwei Elementenpaare, welche zu jenen beiden harmonisch sind, so dass den drei quadratischen Factoren von τ die drei Zerlegungen der vier Elemente von $F=0$ entsprechen."

Bildet man die Form

$$\Phi=\varphi^2-k\psi^2$$

so stellt dieselbe eine einfach unendliche Schaar von Quadrupeln dar, wenn man k alle möglichen Werte beilegt. Für alle in Φ enthaltenen Formen gelten offenbar die Gleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\alpha=\beta & -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\beta=\alpha \\ -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\gamma=\delta & -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\delta=\gamma \\ -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\mu=\nu & -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\nu=\gamma. \end{cases}$$

Es folgt daher der bekannte Satz:

„Jedes Quadrupel der Schaar

$$\varphi^2-k\psi^2=0$$

Digitized by Google

zerlegt sich in Bezug auf die Elemente eines jeden der Factoren von τ in zwei Elementenpaare, welche zu jenen beiden harmonisch sind, so dass den drei quadratischen Factoren von τ die drei Zerlegungen der vier Elemente von $\varphi^2 - k\psi^2$ entsprechen."

Es erübrigt nun noch, den folgenden bekannten Satz zu beweisen:

„Ist ein System von drei zu einander harmonischen Elementenpaaren gegeben, so bilden alle Quadrupel, deren verschiedene Zerlegungen jedesmal zwei zu einem der gegebenen harmonische Paare liefern, eine Schaar $\varphi^2 - k^2\psi^2 = 0$, für welche die zugehörige Gleichung $\tau = 0$ die gegebenen drei Paare sind."

Dieser Satz lässt sich in folgenden umsetzen:

Wenn eine Form sechster Ordnung $F(x, y)$ sich auf folgende Weise zerlegen lässt

$$F = (x - \alpha' y)(x - \Theta(\alpha')y)(x - \gamma' y)(x - \Theta(\gamma')y)(x - \mu' y)(x - \Theta(\mu')y),$$

wo

$$\Theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

und Φ eine Form vierter Ordnung ist, so ist F die Covariante τ der Form Φ.

Beweis.

Für die Form τ von Φ bestehen die Gleichungen (13), (15) und (16). Für F bestehen der Annahme nach ebenfalls solche Gleichungen, welche aus jenen hervorgehen, wenn man an Stelle von $\alpha, \gamma, \mu, \alpha', \gamma', \mu'$ setzt. Wäre nun F nicht identisch mit τ, d. h. fielen die genannten Größen nicht zusammen, so würde folgen, dass es zu zwei Punktepaaren von $\Phi = 0$ zwei Punktepaare gibt, welche zu jenen harmonisch sind, was bekanntlich nicht der Fall sein kann; es folgt daher, dass F mit τ identisch ist.

§. 3.

Wir gehen nun dazu über, zu zeigen, wie aus den Gleichungen (6) in §. 2 die übrigen Eigenschaften von τ, von denen jede, wie (l. c.) nachgewiesen wurde, characteristisch ist, sich ergeben. Zunächst wollen wir zeigen, dass φ, ψ, χ conjugierte Formen sind, das heißt, dass die simultanen Invarianten, von je zwei gebildet, verschwinden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass H in der Schaar

$$\varphi^2 - k\psi^2$$

enthalten ist. Es kommt also darauf an, den Parameter k zu bestimmen, für welchen die Form $\varphi^2 - k\psi^2$ das H vorstellt. Bilden

Digitized by Google

wir die Hesse'sche Determinante der Form $\varphi^2 - \psi^2$, so ist dieselbe

$$(19) \qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(\varphi^2-\psi^2)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2(\varphi^2-\psi^2)}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2(\varphi^2-\psi^2)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2(\varphi^2-\psi^2)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \frac{1}{3^2.4^2}$$

$$= \frac{1}{3^2.4^2}\left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\psi^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\psi^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\psi^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} \right\}.$$

Wertet man die Determinanten innerhalb der Klammer aus, so erhält man die Formel:

$$(20) \quad \frac{1}{3^2}\{3H(\varphi)\varphi^2 + 3H(\psi)\psi^2 - 5(\varphi\psi)_2\varphi\psi + 2H(\psi)\varphi^2 + 2H(\varphi)\psi^2 - 4J(\varphi\psi)^2\} = H(F).$$

Diese Formel führt nun auf folgende Sätze:

I. Die Formen φ, ψ sind conjugiert, d. h. ihre zweite Überschiebung über einander verschwindet.

II. Das Quadrat der Jacobischen Determinante von φ und ψ lässt sich durch die Summe der Quadrate dieser Formen darstellen.

Da bekanntlich die Identität besteht:

$$J(\varphi\psi)^2 = -\frac{1}{2}\{H(\varphi)\psi^2 - 2(\varphi\psi)_2\varphi\psi + H(\psi)\varphi^2\},$$

so können sich in (20) die Producte $\varphi.\psi$ nicht wegheben; da aber infolge der obigen Bemerkung $H(F)$ sich durch die Quadrate dieser darstellen lassen muss, so müssen die Identitäten bestehen:

$$(21) \qquad \begin{cases} (\varphi\psi)_2 = 0 \\ J(\varphi\psi)^2 = a\varphi^2 + b\psi^2. \end{cases}$$

Um die endgiltige Form $H(F)$ zu erhalten, erinnere man sich an folgende Sätze: Das Verschwinden der drei simultanen Invarianten

$$(\varphi\psi)_2, \quad (\varphi\chi), \quad (\psi\chi)$$

hat zur Folge, dass die Functionaldeterminanten

$$J(\varphi\psi) = (\varphi\psi)_1, \quad J(\chi\varphi) = (\chi\varphi)_1, \quad J(\psi\chi) = (\psi\chi)_1$$

den Originalformen proportional werden, dass also die Identitäten bestehen:

$$(\psi\chi)_1 = \lambda\varphi, \quad (\chi\varphi)_1 = \mu\psi, \quad (\varphi\psi)_1 = \nu\chi.$$

Digitized by Google

Aus diesen Identitäten folgt ferner mit Berücksichtigung einer bekannten Identität die Identität

$$\lambda\varphi^2+\mu\psi^2+\nu\chi^2=0.$$

Endlich folgt aus der bekannten Identität

$$\begin{vmatrix} H(\varphi) & (\varphi\psi)_2 & (\varphi\chi)_2 & \varphi \\ (\varphi\psi)_2 & H(\psi) & (\psi\chi)_2 & \psi \\ (\varphi\chi)_2 & (\psi\chi)_2 & H(\chi) & \chi \\ \varphi & \psi & \chi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche in unserem Falle in folgende übergeht:

$$H(\psi)\,H(\chi)\,\varphi^2+H(\varphi)\,H(\chi)\,\psi^2+H(\varphi)\,H(\psi)\,\chi^2=0,$$

die Gleichung

$$H(\psi)\,H(\chi)=\rho\lambda,\quad H(\varphi)\,H(\chi)=\rho\mu,\quad H(\varphi)\,H(\psi)=\rho\nu.$$

Die Gleichung (20) lässt sich jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} H(F)&=\frac{1}{3^2}\{3H(\varphi)\varphi^2+2H(\psi)\varphi^2+3H(\psi)\psi^2+2H(\varphi)\psi^2+ \\ &\quad+\frac{4}{\rho^2}H(\varphi)H(\psi)^2H(\chi)\varphi^2+\frac{4}{\rho^2}H(\varphi)^2H(\psi)H(\chi)\psi^2\} \\ &=\frac{1}{3^2}\{3H(\varphi)+2H(\psi)+\frac{4}{\rho^2}H(\varphi)H(\psi)^2H(\chi)\}\varphi^2+ \\ &\quad+\frac{1}{3^2}\{3H(\psi)+2H(\varphi)+\frac{4}{\rho^2}H(\varphi)^2H(\psi)H(\chi)\}\psi^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Diese Formel gibt uns nun Aufschluss über die Formen $H(\varphi)$, $H(\psi)$, $H(\chi)$ und über die Größe ρ.

Der Character von $H(F)$ als Covariante verträgt es offenbar nicht, dass in ihr Glieder von verschiedenem Grade in den Coefficienten vorkommen, es muss daher ρ ebenfalls von den Coefficienten der drei Formen abhängen und zwar so, dass die Ausdrücke

$$\frac{1}{\rho^2}H(\varphi)\,H(\psi)^2\,H(\chi)$$

$$\frac{1}{\rho^2}H(\varphi)^2\,H(\psi)\,H(\chi)$$

nur Glieder vom zweiten Grade geben. In der That ergibt die Formel

$$J(\varphi\psi)^2=\nu^2\chi^2=-\{H(\varphi)\,\psi^2+H(\psi)\,\varphi^2\}$$

den Wert von ρ

$$\rho=\sqrt{H(\varphi)\,H(\psi)\,H(\chi)}.$$

Überlegt man, dass λ, μ, ν offenbar nicht irrational sein können und dass

$$H(\varphi),\quad H(\psi),\quad H(\chi)$$

Digitized by Google

nicht vollständige Quadrate sind, so schließt man, dass diese Invarianten sich aus denselben drei Größen in Gestalt von Producten aus je zwei Summen oder je zwei Differenzen ausdrücken lassen, so dass

$$H(\varphi) = A(k \pm k_1)(k \pm k_2)$$
$$H(\psi) = A(k_1 \pm k_2)(k_1 \pm k)$$
$$H(\chi) = A(k_2 \pm k_1)(k_2 \pm k)$$

ist und

$$\rho = D.(k \pm k_1)(k_1 \pm k_2)(k_2 \pm k).$$

Es ist alsdann

$$\frac{1}{\rho^2} H(\varphi) H(\psi)^2 H(\chi) = -\frac{A^4}{D^2}(k \pm k_1)(k_2 \pm k_1)$$
$$\frac{1}{\rho^2} H(\varphi)^2 H(\psi) H(\chi) = -\frac{A^4}{D^2}(k_1 \pm k)(k_2 \pm k).$$

Wenn nun zur Abkürzung

$$A^4 : D^2 = C$$

gesetzt wird, so geht die Formel (22) in folgende über:

$$\begin{aligned} H(F) = {} & \frac{\varphi^2}{3^2}\{3A(k \pm k_1)(k \pm k_2) + 2A(k_1 \pm k_2)(k_1 \pm k) - \\ & - 4C(k \pm k_1)(k_2 \pm k_1)\} + \\ & + \frac{\psi^2}{3^2}\{3A(k_1 \pm k_2)(k_1 \pm k) + 2A(k \pm k_1)(k \pm k_2) - \\ & - 4C(k_1 \pm k)(k_2 \pm k)\} \\ = {} & \frac{(k_1 \pm k)}{3^2}\{\pm 3A(k \pm k_2) + 2A(k_1 \pm k_2) \mp 4C(k_2 \pm k_1)\}\varphi^2 + \\ & + \frac{(k_1 \pm k)}{3^2}\{3A(k_1 \pm k_2) \pm 2A(k \pm k_2) - 4C(k_2 \pm k)\}\psi^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Um nun zu entscheiden, welches von den Doppelzeichen zu nehmen ist, muss man die Bedeutung der Größen k_i aufsuchen. Dieselbe findet man durch folgende Überlegung. Durch Adjungierung der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - k \\ a_1 & a_2 + \frac{k}{2} & a_3 \\ a_2 - k & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left(k^3 - \frac{i}{2}k - \frac{j}{3}\right) = 0 \tag{24}$$

lässt sich die Form F auf dreierlei Weise in zwei quadratische Factoren zerlegen. Es müssen daher, da

$$\begin{aligned} F &= A(\varphi - \psi)(\varphi + \psi) \\ &= A'(\chi - \varphi)(\chi + \varphi) \\ &= A''(\psi - \chi)(\psi + \chi) \end{aligned}$$

Digitized by Google

offenbar diese drei Zerlegungen sind, die k die Wurzeln der Gleichung (24) sein. Die Aggregate in den Klammern von (23) müssen einzeln durch 3^2 theilbar sein, und zwar muss sich jeder Factor, der mit irgend einem k multipliciert ist, durch 3^2 theilen lassen. Das Pluszeichen ist demnach zu verwerfen, da man unter dessen Annahme unmöglich die Größen A und C so bestimmen kann, dass die Klammerfactoren durch 3^2 theilbar seien. Hingegen geht die Formel (23), wenn man das Zeichen — nimmt und die Relation

$$k + k_1 + k_2 = 0$$

berücksichtigt, in folgende über:

$$H(F) = \frac{(k_1 - k)}{3^2}\{(5A - 4C)k_1 + (4A + 4C)k_2\}\varphi^2 + \tag{25}$$
$$+ \frac{(k_1 - k)}{3^2}\{(4A + 4C)k_1 + (-A + 8C)k\}\psi^2.$$

Sollen nun diese Klammerfactoren durch 3^2 theilbar sein so muss

$$A = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

sein, so dass wir die Formel erhalten

$$H(F) = -\frac{(k_1 - k)}{2}(k_1\varphi^2 - k\psi^2). \tag{26}$$

Bei der Ableitung dieser Formel sind die Constanten A^i vernachlässigt worden; wie man diese bestimmt und wie sich alsdann die Formel modificiert, wird im nächsten §. gezeigt werden.

§. 4.

In der Schaar

$$\varphi^2 - k\psi^2$$

gibt es so viele Formen, welche Doppelfactoren besitzen, als die Anzahl der linearen Factoren der Jacobi'schen Determinante beträgt. Die entsprechenden k bestimmen sich bekanntlich durch die Gleichung, welche entsteht, wenn man die Discriminante der Schaar gleich Null setzt. Nun ist

$$J(\varphi^2.\psi^2) = 2\varphi.\psi(\varphi, \psi)_1 = 2\varphi.\psi.\chi,$$

es sind daher die Doppelfactoren Factoren resp. von

$$\varphi, \psi, \chi.$$

Dem Character unserer Schaar gemäß muss diejenige Form, die einen der Factoren einer der conjugierten Formen doppelt

Digitized by Google

enthält, auch den anderen Factor derselben doppelt enthalten. Es folgt daher, dass die Discriminante der Schaar ein vollständiges Quadrat ist. Um die Gestalt derselben zu ermitteln, bemerken wir, dass den Formen φ^2, ψ^2 die Werte Null und Unendlich von k entsprechen. Daraus und mit Berücksichtigung einer schon oft erwähnten Formel folgt unmittelbar, dass die Gestalt der Discriminante folgende ist:

$$(27)\quad \text{Discrim.}\,(\varphi^2 - k\psi^2) = C.\lambda^2\{H(\psi)\,H(\chi)\,\lambda + H(\varphi)\,H(\chi)\}^2.$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun die Discriminante der Form

$$F = A\,(\varphi^2 - \psi^2)$$

$$(28)\quad \text{Discrim.}\,(F) = c\,A^2\{H(\psi)\,H(\chi) + H(\varphi)\,H(\chi)\}^2.$$

Setzen wir die Schaar aus F und H zusammen, bilden also die Form

$$H + \lambda F$$

und fragen nach denjenigen Formen, welche lineare Factoren der Functionaldeterminante von F und H als Doppelfactoren besitzen, so wissen wir, dass dieselben $\varphi^2, \psi^2, \chi^2$ sind.

Daraus resultiert zunächst, dass die Discriminante von $H+\lambda F$, von einem von λ unabhängigem Factor abgesehen, das Quadrat einer cubischen Form in λ darstellt. Bezeichnen wir dieselbe mit $\Omega(\lambda)$, so ist also

$$(29)\quad \text{Discrim.}\,(H + \lambda F) = M.\,\Omega(\lambda)^2.$$

Es handelt sich jetzt darum, diese cubische Form herzustellen und dazu führt folgende Überlegung. Sind die Verschwindungselemente derselben λ_1, λ_2, λ_3 und ist etwa

$$(k_1\,\varphi^2 + k\,\psi^2) + \lambda\,(\varphi^2 - \psi^2) = C\,\varphi^2,$$

so muss offenbar $k = \lambda$ sein. Da nun k die Wurzeln der Lagrange'schen Resolvente sind, so folgt

$$(30)\quad \Omega(\lambda) = B.\left(\lambda^3 - \frac{i}{2}\lambda - \frac{j}{3}\right).$$

Jetzt sind wir nun in der Lage, mit Hilfe der Formel (26) die Constante A in

$$F = A\,(\varphi^2 - \psi^2)$$

zu bestimmen. Da nämlich A in $H(F)$ im Quadrat erscheint, so ist es nur dann möglich, dass

$$H(F) + k\,F = C\varphi^2$$

ist, wenn

$$A = -\frac{2}{k - k_1}.$$

Digitized by Google

Wir erhalten daher die Formeln

$$(31)\qquad \begin{cases} F = -\dfrac{2}{k-k_1}(\varphi^2-\psi^2) \\ H(F) = -\dfrac{2}{k_1-k}(k_1\varphi^2 - k\psi^2) \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} H+kF = -\dfrac{2}{k_1-k}(k_1\varphi^2-k\psi^2) - \dfrac{2k}{k-k_1}(\varphi^2-\psi^2) = -2\varphi^2 \\ H+k_1F = -\dfrac{2}{k_1-k}(k_1\varphi^2-k\psi^2) - \dfrac{2k_1}{k-k_1}(\varphi^2-\psi^2) = -2\psi^2 \\ H+k_2F = -\dfrac{2}{k_1-k}(k_1\varphi^2-k\psi^2) - \dfrac{2k_2}{k-k_1}(\varphi^2-\psi^2) = -2\chi^2. \end{cases}$$

Die letzte dieser Identitäten folgt aus der schon oben citierten Identität

$$H(\psi)\,H(\chi)\,\varphi^2 + H(\varphi)\,H(\chi)\,\psi^2 + H(\varphi)\,H(\psi)\,\chi^2 = 0.$$

Da nämlich, von einem Zahlenfactor abgesehen,

$$(33)\qquad \begin{aligned} H(\psi)\,H(\chi) &= (k_2-k_1)\{(k-k_1)(k_1-k_2)(k_2-k)\} \\ H(\varphi)\,H(\chi) &= (k-k_2)\{(k-k_1)(k_1-k_2)(k_2-k)\} \\ H(\varphi)\,H(\psi) &= (k_1-k)\{(k-k_1)(k_1-k_2)(k_2-k)\} \end{aligned}$$

ist, so folgt

$$-\frac{2}{k_1-k}(k_1\varphi^2-k\psi^2) - \frac{2k_2}{k-k_1}(\varphi^2-\psi^2) = \frac{2}{k_1-k}\{(k_2-k_1)\varphi^2+(k-k_2)\psi^2\} = -2\chi^2.$$

Da ferner

$$H(\chi)^2\{H(\psi)+H(\varphi)\}^2 = C.(k-k_1)^4(k_1-k_2)^2(k_2-k)^2,$$

so folgt aus der Formel (28) die bekannte Formel

$$(34)\qquad \text{Discrim.}\,(F) = C'(k-k_1)^2(k_1-k_2)^2(k_2-k)^2.$$

Die Multiplication der drei Formeln in (32) liefert die fundamentale Formel:

$$(35)\qquad \tau^2 = -\frac{1}{2}(H+kF)(H+k_1F)(H+k_2F).$$

§. 5.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, wie aus den Gleichungen in §. 2 die fundamentale Eigenschaft von τ, dass ihre vierte Überschiebung über sich selbst verschwindet, sich ergibt. Diese Covariante muss sich durch F und H und infolge dessen durch die

Digitized by Google

conjugierten quadratischen Formen darstellen lassen. Bezeichnet man die Wurzeln von $\tau = 0$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, drückt die Covariante $(\tau\tau')_4$ durch diese Wurzeln aus und berücksichtigt die bekannte Darstellung der Covarianten gerader Ordnung durch die Wurzeln der Grundform, nämlich

$$(\tau\tau')_4 = \tau_0^e \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^{\varkappa_1} (\alpha_2 - \alpha_3)^{\varkappa_2} \ldots (x - \alpha_1 y)^{\lambda_1} (x - \alpha_2 y)^{\lambda_2} \ldots$$

so sieht man sofort, dass in der Darstellung von $(\tau\tau')_4$ durch die conjugierten Formen die Quadrate derselben nicht vorkommen können. Es muss daher

$$(\tau\tau')_4 = a\,\varphi\psi + b\,\varphi\chi + c\,\psi\chi$$

sein. Dann ist

$$\begin{aligned}
a = {} & (\alpha_5 - \alpha_6)(\alpha_6 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2) + \\
& + (\alpha_5 - \alpha_6)(\alpha_6 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2) + \\
& + (\alpha_5 - \alpha_6)(\alpha_6 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) + \\
& + (\alpha_5 - \alpha_6)(\alpha_6 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_4) \\
b = {} & (\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_5)(\alpha_3 - \alpha_6)(\alpha_1 - \alpha_2) + \\
& + (\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_6)(\alpha_3 - \alpha_5)(\alpha_1 - \alpha_2) + \\
& + (\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_6) + \\
& + (\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_6) \\
c = {} & (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_5)(\alpha_1 - \alpha_6)(\alpha_3 - \alpha_4) + \\
& + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_6)(\alpha_1 - \alpha_5)(\alpha_3 - \alpha_4) + \\
& + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6) + \\
& + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_6)
\end{aligned}$$

und man sieht sofort, dass diese Coefficienten infolge der Gleichungen (6) in §. 2 verschwinden. Daraus folgt

$$(\tau\tau')_4 = 0. \tag{36}$$

§. 6.

Und nun gehen wir an die Beantwortung der von uns in der citierten Monographie aufgeworfenen Frage: Wie beweist man, dass die Gleichungen höheren Grades in der Weise wie die Gleichung vierten Grades invariantentheoretisch nicht zu lösen sind. Zu diesem Zwecke recapituliere ich in Kürze die Methode, welche ich dort für die Lösung der Gleichung vierten Grades gegeben habe. Aus der Formel

$$\tau(-f) = \tau\{2F^3 j + HFi - H^3\} \tag{37}$$

habe ich geschlossen, dass die Nullwerte von τ auch Nullwerte von $\tau(-f)$ sein müssen, d. h. dass $\tau = 0$ eine Abel'sche Gleichung

Digitized by Google

(im engeren Sinne) sein müsse. Und dass die Periode derselben gleich 2 sei, habe ich aus der Formel:

$$f(-f) = \frac{F\frac{\partial\tau}{\partial y} - (\tau F)_1 . x}{F\frac{\partial\tau}{\partial x} + (\tau F)_1 . y} \tag{38}$$

gefolgert. Wird nämlich berücksichtigt, dass

$$\left[\frac{\partial\tau}{\partial y}\right]_\alpha = -\rho\alpha, \left[\frac{\partial\tau}{\partial x}\right]_\alpha = \rho\alpha,$$

ist, so geht diese Formel, wenn man für x und y resp. α_1 und α_2 setzt, über in

$$[f(-f)]_{\alpha_1:\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\frac{-\rho F - (\tau F)_1}{\rho F + (\tau F)_1}\right]_{\alpha_1:\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha,$$

d. h. man hat, wenn man der Kürze wegen

$$-f(xy) = \Theta$$

setzt

$$\Theta^2(xy) = \alpha. \tag{39}$$

Da man durch Adjungierung der Wurzeln einer Resolvente dritten Grades, deren Form ich später ableiten werde, die Covariante τ in drei quadratische Formen φ_1, φ_2, φ_3 zerlegen kann, so kann man F als Differenz zweier dieser Formen darstellen und somit die Gleichung $F = 0$ lösen. Nun habe ich (l. c.) bewiesen, dass immer

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(-f)}{\frac{\partial F}{\partial x}(-f)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}F + Qx}{\frac{\partial P}{\partial x}F - Qy} \tag{40}$$

ist, wo P und Q Covarianten von F sind. Für $n > 4$ kann nicht P die Covariante τ sein, denn die Gleichung

$$(n-1)^2 = 3n - 7 + n$$

hat nur die Lösungen 2 und 4. Wir haben also den Satz:

Es gibt keine algebraische Form von höherer als der vierten Ordnung, deren Covariante τ gleich Null gesetzt eine Abel'sche Gleichung von der Beschaffenheit ist, dass die rationale Function, mittelst deren sich alle Wurzeln durch eine derselben ausdrücken, gleich dem Quotienten der ersten Differentialquotienten der Grundform ist, oder, was dasselbe ist, deren Covariante τ der Gleichung

Digitized by Google

$$\tau(-f) = \tau.\Phi$$

genügt.

Nun wäre es möglich, dass die associierte Form von P den Factor P enthält, dass also die Identität besteht

$$P(-f) = P.\Psi,$$

es wäre also $P=0$ eine Abel'sche Gleichung. Aus der Formel (40) folgt aber, dass die Periode derselben gleich 2 sein müsste und dass daher

$$P = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_{\frac{\nu}{2}}$$

wäre, wenn ν die Ordnung von P ist. Würde sich F durch die Differenz zweier der φ darstellen lassen, so würde nach den obigen Auseinandersetzungen folgen, dass die φ conjugierte Formen sind und dass infolge dessen P eine specielle Form von der vierten, sechsten oder zwölften Ordnung ist. Für $\nu=6$ ist $n=4$ und für $\nu=12$ ist $n=5$, im ersten Falle ist P die Covariante τ und im zweiten kann unmöglich F als Differenz zweier φ dargestellt werden.

§. 7.

Um einige Grenzfälle behandeln zu können, die, so viel mir bekannt ist, noch nicht erledigt sind, wird es nöthig sein, neue Beziehungen zwischen den Wurzeln der Lagrange'schen Resolvente und denjenigen von $\tau=0$ herzustellen. Zu diesem Zwecke bilden wir die Resolvente, welche die Summe je zweier zu einander gehörender Wurzeln von $\tau=0$ zu Wurzeln hat. Man sieht leicht ein, dass der erste und zweite Coefficient dieser Resolvente einen gemeinschaftlichen Factor besitzen müssen, so dass der Quotient derselben $\tau_1 : \tau_0$ ist, wenn man die Coefficienten durch denselben Buchstaben mit angehängten Indices bezeichnet. Zu dieser Resolvente gelangt man offenbar durch die Substitution:

$$\frac{H_1 + 2\lambda F_1}{2(H_0 + \lambda F_0)} = -z \tag{42}$$

in die Resolvente

$$\lambda^3 - \frac{i}{2}\lambda - \frac{j}{3} = 0. \tag{42a}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind demnach, da

$$\lambda = -\frac{2H_0 z + H_1}{2(F_0 z + F_1)} \tag{42b}$$

ist, rationale Functionen der Summen je eines zusammengehörenden Paares der Wurzeln von $\tau=0$. Die Ausführungen der Substitution ergibt die Resolvente in folgender merkwürdigen Gestalt

Digitized by Google

$$(43) \qquad \text{Resolv.} = \tau_0 \left\{ \tau_0 z^3 + \tau_1 z^2 + \frac{2}{5} \tau_2 z + \frac{1}{10} \tau_3 \right\} = 0.$$

Wir sind nun in der Lage, die Grenzfälle, in welchen einige der Coefficienten von τ verschwinden zu discutieren. Rückt eine Wurzel von $\tau = 0$ ins Unendliche, so thut dies auch eine Wurzel der Resolvente (43) und eine Wurzel von (24) wird nach (42)

$$\lambda = -\frac{H_0}{F_0}.$$

Es handelt sich jetzt darum, das Verhalten der übrigen Wurzeln beider Resolventen zu ermitteln. Dazu dienen folgende Sätze:

Satz I.

Wenn $\tau_0 = 0$ ist, so ist die Resolvente (43) ein vollständiges Quadrat eines linearen Ausdruckes und dieser Ausdruck ist ein Factor von τ.

Beweis.

Für $\lambda = -H_0 : F_0$ muss

$$H F_0 - H_0 F$$

ein Quadrat sein. Nun ist, wie die Rechnung zeigt,

$$(44) \qquad H F_0 - H_0 F = \tau_0 x^3 + \tau_1 x^2 y + \frac{2}{5} \tau_2 x y^2 + \frac{1}{10} \tau_3 y^3$$

folglich ist im Falle $\tau_0 = 0$

$$H F_0 - H_0 F = \left(\tau_1 x^2 + \frac{2}{5} \tau_2 xy + \frac{1}{10} \tau_3 y^2\right) y$$
$$= (Ax + By)^2.$$

Setzen wir

$$\frac{H_1 + 2\lambda_1 F_1}{2(H_0 + \lambda_1 F_0)} = \frac{H_1 + 2\lambda_2 F_1}{2(H_0 + \lambda_2 F_0)},$$

so gibt dies entwickelt die Gleichung

$$(45) \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\{2 H_0 F_1 - H_1 F_0\} = 0,$$

welche Identität in Wirklichkeit besteht, wenn $\tau_0 = 0$ ist. Wir erhalten daher in Bezug auf die übrigen Wurzeln von $\tau = 0$ den

Satz II.

Die übrigen vier Wurzeln von $\tau = 0$ theilen sich derart in zwei Paare, dass die Summe des einen gleich ist der Summe des anderen Paares.

Digitized by Google

Satz III.

Im Falle $\tau_0 = 0$ sind entweder die übrigen vier Wurzeln alle oder es ist ein Paar derselben imaginär.

Beweis.

Die Formel

$$\tau(-f) = \tau.\Phi$$

besteht offenbar auch in diesem Falle und infolge dessen auch die Gleichungen (6) im §. 2. Die harmonische Lage der Wurzeln von $\tau = 0$ ist also in nichts Anderem alteriert, als dass ein Element ins Unendliche rückt. Das diesem zugeordnete Element muss nun in der Mitte zwischen zwei anderen Elementen liegen, wenn die vier Elemente eine harmonische Lage haben sollen. Es kann aber nicht ein Element zwei Strecken zweier zugeordneter Paare gleichzeitig halbieren, es folgt daher der Satz.

Es gibt noch eine Resolvente, welche zur Resolvente (24) in Beziehung steht und über den Fall Aufschluss gibt, wenn eine der Wurzeln von $\tau = 0$ Null ist. Bilden wir nämlich die Resolvente, welche die Summe der reciproken je eines zusammengehörigen Paares von Wurzeln der Gleichung $\tau = 0$, oder, was dasselbe ist, bilden wir die Resolvente von $x^4 y^4 \tau\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = 0$, so ist aus leicht fasslichen Gründen einzusehen, dass dieselbe die Gestalt hat:

$$\tau_6 z^3 + \tau_5 z^2 + \frac{2}{5}\tau_4 z + \frac{1}{10}\tau_3 = 0. \tag{46}$$

In dem Falle, wo eine Wurzel von $\tau = 0$ Null wird rückt eine der Wurzeln der Resolvente (46) ins Unendliche. Es wird also in diesem Falle, da

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{(H_1 + 2\lambda F_1)^2}{4(H_0 + \lambda F_0)(H_4 + \lambda F_4)}$$

ist, wenn α, β ein Paar zusammengehörender Wurzeln von $\tau = 0$ sind,

$$\lambda = -\frac{H_4}{T_4}. \tag{47}$$

Von dieser Resolvente gilt der

Satz IV.

Wenn $\tau_6 = 0$ ist, so ist

$$\tau_5 z^2 + \frac{2}{5}\tau_4 z + \frac{1}{10}\tau_3$$

ein vollständiges Quadrat eines linearen Ausdruckes und dieser ist ein Factor von $(x^4 y^4)\tau\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

Digitized by Google

Der Beweis wird ganz wie oben geführt. Es ist nämlich in diesem Falle

$$HF_4 - H_4 F$$

ein Factor von τ^2 und muss deshalb ein vollständiges Quadrat sein. Nun ist aber, wie die Rechnung zeigt

$$(48) \qquad HF_4 - H_4 F = \tau_6 y^3 + \tau_5 y^2 + \frac{2}{5}\tau_4 yx^2 + \frac{1}{10}\tau_3 x^2$$

es ergibt sich daher der Satz.

Ebenso, wie in den Fällen $\tau_0 = 0$, $\tau_6 = 0$ die Bedeutung der Resolventen (43) und (46) verloren geht, so verlieren dieselben ihre Bedeutung im Falle $\tau_3 = 0$. Gegentheiligenfalls nämlich würde folgen, dass in diesem Falle die Gleichung $\tau = 0$ zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln hat. Dass dies nicht der Fall sein kann, zeigt man auf zweierlei Art.

Aus der Gleichung

$$\alpha + \beta = -\frac{H_1 + 2\lambda F_1}{2(H_0 + \lambda F_0)} = 0$$

würde dann folgen, dass die Resolvente (24) die rationale Wurzel

$$\lambda = -\frac{H_1}{2F_1}$$

hat, was, wie man sich leicht überzeugt, nicht der Fall ist.

Es wäre ferner

$$2HF_1 - H_1 F$$

ein Factor von τ^2 und daher ein vollständiges Quadrat. Es ist aber, wie die Rechnung zeigt,

$$(49) \qquad 2HF_1 - H_1 F = -\tau_0 x^4 + \frac{2}{5}\tau_2 x^2 y^2 + \frac{2}{5}\tau_3 xy^3 + \frac{1}{5}\tau_4 y^3$$

und es müsste daher auch

$$-\tau_0 x^4 + \frac{2}{5}\tau_2 x^3 y^2 + \frac{1}{5}\tau_4 y^4$$

ein vollständiges Quadrat eines quadratischen Ausdruckes von der Form

$$(x - Ay)(y + Ay)$$

der ein Factor von τ ist, sein, was, wie man sich leicht überzeugt, nicht der Fall ist. Wir schließen daher, dass auch in diesem Falle die Gleichungen (43) und (46) keine Resolventen vorstellen.

§. 8.

Aus den Identitäten

$$\tau_1 x^2 + \frac{2}{5}\tau_2 xy + \frac{1}{10}\tau_3 y^2 = (Ax + By)^2$$

$$\tau_5 x^2 + \frac{2}{5}\tau_4 xy + \frac{1}{10}\tau_3 y^2 = (A'x + B'y)^2$$

Digitized by Google

schließt man, dass die Discriminanten der linken Seiten τ_0 resp. τ_6 als Factoren enthalten müssen. In der That findet man leicht die Identität

$$(50)\qquad \begin{cases} \frac{1}{10}\tau_1\tau_3 - \left(\frac{1}{5}\tau_2\right)^2 = \frac{1}{5}\tau_0\tau_4 \\ \frac{1}{10}\tau_3\tau_5 - \left(\frac{1}{5}\tau_4\right)^2 = \frac{1}{5}\tau_2\tau_6. \end{cases}$$

Im Falle $\tau_0 = 0$ besteht, wie man sich leicht durch Rechnung überzeugt, die Identität

$$(51)\qquad \tau_2\tau_4 = \frac{1}{50}\tau_3^2.$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich leicht folgender Satz ableiten:

Im Falle $\tau_0 = 0$ hat die biquadratische Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, wenn τ_1 und τ_5 dasselbe Vorzeichen haben.

Es ist nämlich

$$\text{Discrim. } (F) = (\tau\tau')^6.$$

Für $\tau_0 = 0$ geht diese Formel über in

$$(52)\qquad \text{Discrim. } (F) = 8\tau_2\tau_4 - 20\tau_1\tau_5 - 3\tau_3^2.$$

Infolge der Formel (51) hat man also

$$(53)\qquad \text{Discrim. } (F) = -\alpha\tau_1\tau_5 - \beta\tau_3^2,$$

d. h. die Discriminante ist im Falle $\tau_0 = 0$ negativ, wenn τ_1 und τ_5 dasselbe Vorzeichen haben. Wenn dies aber der Fall ist, so hat bekanntlich die Gleichung die oben ausgesprochene Eigenschaft.

§. 9.

Die Zerlegung von τ in drei quadratische Factoren stellt sich in drei formell von einander verschiedenen Arten dar.

Es ist

$$(\text{I})\qquad \tau = \sqrt{H + e_1 F}\,\sqrt{H + e_2 F}\,\sqrt{H + e_3 F}$$

$$(\text{II})\qquad \tau = \sqrt{\mu U - \nu V}\,\sqrt{\mu\varepsilon^2 U - \nu\varepsilon^2 V}\,\sqrt{\mu\varepsilon^2 U - \nu\varepsilon\nu}$$

$$(\text{III})\qquad \tau = \Phi_1 . \Phi_2 . \Phi_3.$$

Der ersten entspricht die Resolvente

$$(24)\qquad k^3 - \frac{i}{2}kl - \frac{j}{3}l^3 = 0,$$

[1]) Siehe meine Arbeit „Über die associierten Formen etc." 1889. Verlag von Gerold.

Digitized by Google

der zweiten, in der U und V die bekannten Tetraederformen

$$U = H + \lambda_1 F$$
$$V = H + \lambda_2 F$$

bedeuten, die Resolvente

$$ik^2 + 2jkl + \frac{i^2}{6} l^2 = 0 \tag{54}$$

und der dritten, in der $\Phi_1\ \Phi_2\ \Phi_3$ die folgende Form haben

$$\Phi_1 = (x - \alpha_1)(x - \Theta(\alpha_1)) = x^2 + \psi_1(y_1) + \psi_2(y_1)$$
$$\Phi_2 = (x - \alpha_2)(x - \Theta(\alpha_2)) = x^2 + \psi_1(y_2) + \psi_2(y_2)$$
$$\Phi_3 = (x - \alpha_3)(x - \Theta(\alpha_3)) = x^2 + \psi_1(y_3) + \psi_2(y_3)$$

die Resolvente (43)

$$\tau_0 y^3 + \tau_1 y^2 + \frac{2}{5} \tau_2 y + \frac{1}{10} \tau_3 = 0. \tag{43}$$

Die Beziehungen zwischen den Wurzeln von (24) und (43) haben wir im §. 7 kennen gelernt. Was die Beziehungen zwischen den Wurzeln von (54) und (24) anlangt, so können wir, da die Factoren in (I) und (II) einzeln übereinstimmen müssen, schließen, dass die Wurzeln von (24) sich durch algebraische Summen der Wurzeln von (54) ausdrücken lassen. Wir haben daher den

Satz.

Die Gleichung (24) ist die Resolvente der Gleichung (54).

Digitized by Google

Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen.

Von **Karl Bobek** in Prag.

I. Abtheilung. Flächen ohne singuläre Punkte.

Eine Fläche dritter Ordnung, ohne singuläre Punkte, lässt im Allgemeinen keine Raumcollineation zu, durch welche sie in sich transformiert wird. Es gibt aber specielle Flächen dritter Ordnung, welche eine endliche Anzahl von Collineationen in sich zulassen. Im Nachstehenden werden diese Flächen aufgesucht und die Gruppe der Collineationen bestimmt, welche sie zulassen. Es zeigt sich, dass diese Flächen die Eckhardt'schen Flächen dritter Ordnung sind [1]), d. h. solche Flächen, bei denen sich drei Gerade in einem Punkte, der Tripelpunkt genannt wird, schneiden.

Unter diesen Flächen tritt selbstverständlich die Clebsch'sche Diagonalfläche [2]) auf, welche 120 Collineationen in sich zulässt,[3]) die mit der erweiterten Gruppe des Ikosaeders [4]) holoedrisch isomorph ist. Besonders interessant ist die Fläche dritter Ordnung, welche eine ternär-geschaarte Collineation in sich zulässt. Man findet, dass dieselbe noch zwei weitere solche Collineationen in sich besitzt, und dass die ganze Gruppe von Collineationen, welche die Fläche ungeändert lassen, aus 648 Operationen besteht, welche mit einer 27-fachen Meriedrie auf die erweiterte Gruppe des Tetraeders [5]) isomorph bezogen ist. Die Fläche besitzt 18 Tripelpunkte, welche zu zweien auf den 27 Geraden der Fläche liegen. Die Invarianten dieser Fläche haben numerische Werte

[1]) Ich nenne diese Flächen nach F. E. Eckhardt, der dieselben im Osterprogramm der Realschule zu Chemnitz ausführlich behandelt hat, die Abhandlung wurde nach dem Tode des Verfassers im 10. Bande der Mathem. Annalen, pag. 227 abgedruckt.

[2]) Clebsch, Das Fünfseit und die Gleichung 5. Grades. Math. Ann. Bd. 4, pag. 336.

[3]) Klein, Math. Ann. Bd. 6, pag. 567.

[4]) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 24.

[5]) Klein, Vorlesungen pag. 16, resp. 20.

Digitized by Google

(dritte Wurzeln aus -1) und jede solche Fläche ist daher in jede andere durch eine, daher 648, Collineationen [1]) überführbar.

I. Allgemeines über die auftretenden Collineationen.

§ 1. Eine Collineation A, welche die Fläche dritter Ordnung in sich überführt, muss eine periodische Operation von endlichem Index n sein, so dass symbolisch $A^n = 1$ ist.[2]) Denn durch die Operation A werden die Geraden der Fläche in einander überführt. Dieselben ordnen sich in Gruppen zu n so, dass durch $A, A^2, A^3 \ldots A^{n-1}$ eine jede Gerade der Gruppe in die $n-1$ übrigen transformiert wird, und A^n alle Geraden der Fläche ungeändert lässt, mithin die identische Umformung darstellt.

Ist $n = \mu.\nu$ das Product zweier ganzer Zahlen μ und ν, so besitzt F sowohl eine Collineation von der Periode ν nämlich A^μ, als von der Periode μ nämlich A^ν; denn es ist $(A^\mu)^\nu = A^{\mu\nu} = 1$ ebenso $(A^\nu)^\mu = 1$.

Der wichtigste Satz für die Untersuchung der zulässigen Collineationen ist der folgende:

Eine Fläche dritter Ordnung kann keine Collineation von einer Primzahlperiode p besitzen, die größer als 5 ist.

Eine solche Collineation A theilt die Geraden der Fläche, wie oben gezeigt wurde, in Gruppen zu p, lässt also, da 27 durch p nicht theilbar ist, eine oder mehrere Gerade ungeändert. Ist g eine solche Gerade der Fläche F, welche durch A in sich selbst übergeht, so thut sie dies auch für $A^2, A^3 \ldots A^{p-1}$. Die Ebenen, welche durch g gehen, müssen daher wieder in Ebenen überführt werden, die durch g gehen und müssen sich auch zu Cyclen von p gruppieren. Dabei würden die 5 durch g gehenden Tritangentialebenen von F einen Cyclus bilden, da aber $p > 5$ ist, müssen sie mit ihren homologen coïncidieren, d. h. der Büschel von Ebenen durch g enthält lauter Coïncidenzebenen der Collineation A.

In jeder der fünf Tritangentialebenen von F liegen noch zwei Gerade der Fläche, die auch mit ihren entsprechenden coïncidieren müssen, und da der Index von A eine Primzahl $p > 2$ ist, muss jede der 10 Geraden von F mit ihrer homologen vereinigt liegen. Jede der 16 übrigen Geraden h von F schneidet fünf der obigen 10 Geraden, also muss die ihr entsprechende Gerade h' ebenfalls dieselben 5 Geraden treffen, mithin identisch mit h sein. Die Collineation lässt daher alle 27 Geraden von F ungeändert, stellt mithin die identische Umformung dar.

[1]) Vgl die Abhandlung: Über die Invarianten der Flächen dritter Ordnung. Diese Zeitschrift VIII. Jahrg., pag. 146.

[2]) Bezüglich der Bezeichnung und Rechnung mit Collineationen vergl. etwa Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., II. Abth, pag. 80.

Digitized by Google

Hieraus folgt, dass der Index n der Periode einer Collineation A, welche F in sich transformiert, von der Form $n = 2^{\alpha}.3^{\beta}5^{\gamma}$ sein muss.

II. Collineationen von der Periode zwei.

§. 2. Es gibt zwei Collineationen von der Periode zwei, die geschaart-involutorische und die centrale, beide können hier auftreten. Sie unterscheiden sich dadurch, dass zwei entsprechende Gerade g, g' von F windschief sind, oder dass sie sich schneiden.

a) Zwei einander entsprechende Gerade g, g' der Fläche F sind windschief.

Die Strahlen, welche homologe Punkte von g und g' verbinden, treffen F in Punkten einer Geraden a_1, die punktweise mit ihnen homologen coïncidiert. Denn der dritte Schnittpunkt eines solchen Strahles mit F muss ein Coïncidenzpunkt für A sein. Die Leitschaar des Hyperboloid durch a_1, g, g' besteht aus Strahlen, welche mit ihnen homologen in der Collineation zusammenfallen. Die einander entsprechenden Punkte dieser Strahlen bilden eine Involution, deren Deckpunkte auf a_1 und einer zweiten Geraden $\mathfrak{a}_1$ liegen, welche durch g und g' von a_1 harmonisch getrennt ist. In der eben erwähnten Leitschaar befinden sich auch drei Gerade der F, welche b_2, b_3, b_4 heißen sollen[1]), und dem entsprechend bezeichnen wir g und g' mit a_5 und a_6. Die Ebenen durch die Leitstrahlen a_1 und $\mathfrak{a}_1$ sind Coïncidenzebenen der Collineation A und diese induciert in ihnen central involutorische ebene Collineationen, deren Collineationsaxe die Gerade und Collineationscentrum der Schnittpunkt mit der Gegengeraden ist. Die Ebenen durch a_1 und b_2, b_3, b_4 enthalten noch die Geraden c_{12}, c_{13}, c_{14} von F und diese müssen daher auch mit ihren entsprechenden Geraden coincidieren, mithin liegen die Schnittpunkte von $b_2 . c_{12} = \gamma_{12}$, $b_3 . c_{13} = \gamma_{13}$, $b_4 . c_{14} = \gamma_{14}$ auf der Geraden $\mathfrak{a}_1$, und sind deren drei Schnittpuukte mit F.

Durch a_1 gehen aber noch die beiden Tritangentialebenen $a_1 b_5 c_{15}$ und $a_1 b_6 c_{16}$ von F. Die Gerade b_5 kann nicht mit ihrer homologen zusammenfallen, da sie sonst $\mathfrak{a}_1$ schneiden müsste, sie entspricht daher der Geraden c_{15} und beide müssen einander, da sie homologe Gerade in der ebenen Collineation sind, in einem Punkte α von a_1 schneiden, so dass sie durch a_1 harmonisch getrennt werden von dem Schnittpunkt γ der Geraden $\mathfrak{a}_1$ mit ihrer Ebene. Ebenso schneiden sich b_6 und c_{16} auf a_1 in einem Punkte α' und a_1 trennt b_6, c_{16} harmonisch vom Schnittpunkte γ', der Geraden $\mathfrak{a}_1$ mit der Ebene $a_1 b_6 c_{16}$.

Die Fläche F besitzt daher zwei Tripelpunkte α, α' auf der Geraden a_1, welche eine Leitgerade der geschaart-involutorischen Collineation ist.

[1]) Die gebrauchte Bezeichnung ist die allgemein übliche aus einer Doppelsechse $a_i b_i$ herrührend.

Digitized by Google

Die übrigen 16 zu a_1 windschiefen Geraden entsprechen einander involutorisch, so zwar, dass je ein Paar entsprechender Geraden mit a_1 und $\mathfrak{a}_1$ auf einem Hyperboloid liegt, und auf diesem durch a_1 und $\mathfrak{a}_1$ harmonisch getrennt wird. Ein solches Paar schneidet immer dieselben 3 der sechs Geraden $b_2, b_3, b_4, c_{12}, c_{13}, c_{14}$.

§. 3. Dass umgekehrt eine Fläche dritter Ordnung F, welche zwei Tripelpunkte α, α' auf einer Geraden a_1 besitzt, in denen sich etwa $b_5 c_{15}$ resp. $b_6 c_{16}$ schneiden, in einer geschaart-involutorischen Collineation sich selbst entspricht, ist leicht zu zeigen. Bei einer solchen Fläche liegen die Berührungspunkte γ_{12}, γ_{13}, γ_{14} der noch vorhandenen drei Tritangentialebenen a_1, b_2, c_{12}, $a_1 b_3 c_{14}$, $a_1 b_4 c_{14}$ auf einer Geraden $\mathfrak{a}_1$, welche die Ebenen $a_1 b_5 c_{15}$ und $a_1 b_6 c_{16}$ in den Punkten γ resp. γ' so trifft, dass a_1 von diesen Durchstoßpunkten durch die Geraden der Fläche harmonisch getrennt wird.[1]) Dass nun F sich in der geschaart-involutorischen Collineation, deren Leitgerade a_1 und $\mathfrak{a}_1$ sind, selbst entspricht, ist leicht zu zeigen.

b) Zwei einander entsprechende Geraden g, g' mögen sich schneiden.

§. 4. Die Ebene $\mathfrak{G}$ von gg' enthält noch eine Gerade a_1, welche mit ihren entsprechenden coïncidieren muss, da g, g' sich involutorisch entsprechen, ihre Ebene $\mathfrak{G}$ also mit der homologen coïncidiert. Infolge dessen tritt in dieser Ebene eine central-involutorische Collineation auf, deren Centrum α entweder auf a_1 liegt oder nicht. Liegt α nicht auf a_1, dann ist a_1 Collineationsaxe und infolge dessen sind alle ihre Punkte Coïncidenzpunkte auch der räumlichen Collineation, diese muss mithin eine geschaart-involutorische sein, wie sie unter *a*) betrachtet wurde.

Liegt α aber auf a_1, dann müssen je zwei einander zugeordnete Gerade h, h' der F in einer Ebene liegen, denn wären sie windschief, dann läge wieder der Fall *a*) vor. Die Ebene $\mathfrak{H}$ der Geraden hh' geht durch α, denn sie schneidet die Ebene $\mathfrak{G}$ in einem sich selbst entsprechenden Strahl, der die Schnittpunkte von g und h resp. g' und h' trägt, insoferne ihre Ebene $\mathfrak{H}$ nicht durch a_1 selbst geht. Denn schneidet h die Gerade g, so muss h' die g' in dem entsprechenden Punkte treffen. Schneidet aber h die Gerade a_1, so muss dies auch h' thun, da a_1 mit ihnen

[1]) Dies folgt sofort aus der projectivischen Erzeugung der Fläche, mittels eines Flächenbüschels zweiter Ordnung und eines zu ihm projectivischen Ebenenbüschels. Ist $pqrs$ das dem Flächenbüschel conjugierte Poltetraeder, und bezieht man den Ebenenbüschel durch $\overline{pq}$ etwa projectivisch auf den Flächenbüschel, so erhält F in p und q zwei Tripelpunkte, deren Tangentialebenen die Ebenen sind, welche den Kegelflächen mit den Spitzen in p resp. q entsprechen. Die beiden Kegelkanten, welche in der Ebene liegen, müssen durch $\overline{pq}$ von dem Schnittpunkte der Geraden $\overline{rs}$ harmonisch getrennt werden. Die Berührungspunkte der drei übrigen durch $\overline{pq}$ gehenden Tritangentialebenen müssen aber auf rs liegen. Dass man jede Fläche dieser Art so erzeugen kann, ist leicht zu beweisen. Vergl. auch Eckhardt a. a. O. pag. 240.

Digitized by Google

homologen coïncidiert. Setzen wir den ersten Fall voraus, dass g und h, also auch g', h' einander schneiden, so enthält die Ebene $\mathfrak{H}$ noch eine Gerade von F, die a_1 schneiden muss (sie sei mit b_2 bezeichnet) und mit ihrer entsprechenden coïncidiert. Der Schnittpunkt von b_2 mit a_1 ist aber der Punkt α, da a_1 die Ebene $\mathfrak{H}$ in diesem Punkte trifft. Es liegt ferner in der Ebene durch g, h die Gerade f und dieser muss die Gerade f' entsprechen, welche noch in der Ebene $g'h'$ liegt. Die Ebene der Geraden f und f' geht ebenfalls durch α, also muss die dritte in ihr gelegene Gerade von F diesen Punkt enthalten, da sie a_1 schneidet. Sie ist die dritte sich selbst entsprechende Gerade und wäre mit c_{12} zu bezeichnen.

Die Fläche F besitzt daher einen Tripelpunkt, der das Collineationscentrum der central-involutorischen Collineation ist, in welcher sie sich selbst entspricht.

Homologe Geraden der Fläche liegen entweder mit a_1 oder b_2 oder c_{12} in einer Ebene und ihre Schnittpunkte liegen in der Collineationsebene $\mathfrak{A}$. Das Centrum α ist Asymptotenpunkt für die drei Geraden a_1, b_2, c_{12} die zweiten Asymptotenpunkte σ_1, σ_2, σ_{12} dieser Geraden müssen in $\mathfrak{A}$ liegen, da sie sich selbst entsprechen, liegen daher auf der Geraden l_α, in welcher sich $\mathfrak{A}$ und die Ebene durch $a_1 b_2 c_{12}$ schneiden.

Dass umgekehrt eine Fläche dritter Ordnung F, welche einen Tripelpunkt α besitzt, sich in der central-involutorischen Collineation selbst entspricht, deren Centrum α ist, folgt sofort aus der Bemerkung, dass die quadratische Polare von α zerfällt, in die Tangentenebene des Punktes α und in eine Ebene $\mathfrak{A}$, welche die Punkte der F harmonisch trennt von α.

§. 5. Im Falle *a*) besitzt die Fläche F zwei Tripelpunkte α und α' auf der Geraden a_1, sie lässt daher zwei centrale Collineationen A und A' zu, mit den Centren α resp. α'. Ihre Collineationsebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ schneiden sich in der Geraden $\mathfrak{a}_1$.

Die beiden Collineationen A und A' nacheinander ausgeführt, ergeben die geschaart-involutorische Collineation T, deren Leitstrahlen a_1 und $\mathfrak{a}_1$ sind.

In Zeichen ist $T = AA' = A'A$[1]), denn die Collineationen A und A' sind miteinander vertauschbar, wie man leicht zeigt.

Die Gruppe G_4 der Collineationen ist also $1, A, A', AA' = A'A$ besteht mithin aus drei Operationen von der Periode zwei und der Identität. Sie ist mit der Vierergruppe von Klein[2]) holoëdrisch-isomorph.

Die Fläche kann durch Collineation so transformiert werden, dass α und α' ins Unendliche in zueinander senkrechte Richtungen

[1]) AA' bedeutet, dass zuorst die Operation A und dann A' ausgeführt werde auf die Punkte des Raumes.

[2]) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder pag. 12.

Digitized by Google

fallen und überdies die Gerade $a_1 = \overline{\alpha\alpha'}$ senkrecht zu a_1 ist. Die Vierergruppe besteht dann in den zwei Spiegelungen an den Ebenen durch $\overline{a_1\alpha'}$ und $\overline{a_1\alpha}$ und ihrer Combination, welche als eine Drehung der Fläche um a_1 als Rotationsaxe um 180° erscheint.

III. Collineationen von der Periode drei.

§. 6. Collineationen von der Periode drei gibt es drei Arten:

a) Die ternär-planare Π, bei der drei einander zugeordnete Punkte x, x', x'', welche dem x zufolge 1, Π, Π^2 entsprechen, ein Dreieck bilden, dessen Ebene dann durch eine feste Gerade p geht, daher alle diese Coïncidenzebenen sind, während eine zweite Gerade q die Coïncidenzpunkte der Collineation trägt.

b) Die ternär-centrale Φ, bei der jedes Punkttripel x, x', x'' auf einem Strahl eines festen Bündels liegt, während die zweiten Coïncidenzpunkte dieser Strahlen in einer Ebene liegen.

c) Die ternär-geschaarte Ω, deren Tripel x, x', x'' auf Strahlen einer linearen Congruenz liegen.

a) Die Fläche F lasse eine ternär-planare Collineation Π zu.

§. 7. In den Ebenen durch die Gerade p werden ternäre ebene Collineationen induciert, in denen sich die Schnittcurve von F selbst entsprechen muss. Da dies nur für eine Collineation stattfindet, für welche das Hauptdreieck der Collineation ein Wendepunktsdreieck ist, so muss p drei Wendepunkte jeder ebenen Curve von F enthalten, die durch eine Ebene des Büschels (p) ausgeschnitten wird. Hieraus folgt sofort, dass die drei Schnittpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von p mit F Tripelpunkte sein müssen. Es mögen sich schneiden $a_1\, b_2\, c_{12}$ in α_1, dann muss die Ebene durch p und a_1 noch zwei weitere Gerade b_3 und c_{13} enthalten, von denen b_3 durch α_2 daher c_{13} durch α_3 gehen möge. Ebenso liegen in der Ebene durch p und b_2 noch zwei Gerade, von denen eine durch α_2 und eine durch α_3 gehen muss. Sie können mit c_{23} und a_3 bezeichnet werden. In der dritten Ebene endlich durch p und c_{12} liegen dann die mit a_2 und b_1 zu bezeichnenden Geraden. Es schneiden sich daher in α_2 die Geraden $b_3\, a_2\, c_{23}$ und in α_3 die Geraden $c_{13}\, a_3\, b_1$.

Da die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf p ein Tripel der Collineation Π bilden, so gruppieren sich die obigen 9 Geraden zu folgenden 3 Tripeln:

$$a_1\, b_3\, c_{13}\,; \quad b_2\, c_{23}\, a_3\,; \quad c_{12}, a_2\, b_1$$

so zwar, dass der ersten Geraden jedes Tripels vermöge Π die zweite und vermöge Π^2 die dritte entspricht.

Die übrigen 18 Geraden der Fläche gruppieren sich zu 6 Tripeln der Art, dass jedes Tripel aus drei zueinander wind-

Digitized by Google

schiefen Geraden g, g', g'' besteht. Denn würden sich g und g' schneiden, so müssten sich auch g' und g'' und g'', g schneiden, sie müssten daher in einer Ebene liegen, welche Tripel entsprechender Punkte enthielte, daher durch p gehen müsste, g, g', g'' wären also drei der 9 obigen Geraden, da durch keinen Punkt der Fläche mehr als drei Gerade gehen können.

Die obigen drei zueinander windschiefen Geraden a_1, a_3, a_2 von F werden noch von drei anderen geschnitten, die wir b_4, b_5, b_6 nennen wollen. Dieselben sind untereinander und zu b_1, b_2 und b_3 windschief. Die fünf Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 schneiden alle die Gerade a_1 und sind zu b_1 windschief, sie bilden daher mit b_1 die eine Hälfte der Doppelsechse, zu deren anderen Hälfte a_1, a_2, a_3 gehören und durch a_4, a_5, a_6 in bekannter Weise ergänzt werden. Da nun a_1, a_3, a_2 von b_4, b_5, b_6 geschnitten werden und die den ersteren vermöge Π entsprechenden Geraden b_3, b_2, b_1 von a_4, a_5, a_6 getroffen werden, so müssen die Geraden b_4, b_5, b_6 den Geraden a_4, a_5, a_6 vermöge Π entsprechen. Da aber nur windschiefe Gerade einander entsprechen können, so sind a_4 und b_4, a_5 und b_5, sowie a_6 und b_6 homologe Gerade. Des weitern entsprechen vermöge Π den Geraden b_3, b_2, b_1 die Geraden c_{13}, c_{23}, c_{12}, also müssen die sie schneidenden Geraden c_{45}, c_{46}, c_{56} den Geraden a_4, a_5, a_6 entsprechen und zwar wieder die zu einander windschiefen: a_4 und c_{56}, a_5 und c_{46} sowie a_6 und c_{45}. Hiedurch haben wir wieder drei Tripel

$$b_4\, a_4\, c_{56}\,;\quad b_5\, a_5\, c_{46}\,;\quad b_6\, a_6\, c_{46}.$$

Es ist nun leicht auf die obige Art auch die letzten 9 Geraden in drei Tripel anzuordnen, man erhält:

$$c_{14}\, c_{34}\, c_{24}\,;\quad c_{15}\, c_{35}\, c_{25}\,;\quad c_{16}\, c_{36}\, c_{26}.$$

§ 8. Sind die drei Tripelpunkte α_1, α_2, α_3 reell, die Deckpunkte der auf p auftretenden tricyslischen Projectivität daher conjungiert imaginär, so kann man durch eine reelle Raumcollinration der Fläche dritter Ordnung so transformieren, dass p ins Unendliche rückt und senkrecht zu q wird, dass überdies die Deckpunkte auf p dem imaginären Kugelkreis angehören. Dann werden drei ein Tripel bildende Punkte x, x' x'', die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes sein, dessen Mittelpnnkt auf q liegt. Die ternär-planare Collineatien Π besteht dann in der Rotation des Raumes um die Gerade q durch den Winkel von 120°. Die so transformierte Fläche F wird also durch zwei Rotationen um q durch den Winkel 120° und 240° mit sich zur Deckung gelangen. Man erkennt aber sofort noch drei weitere Transformationen, nämlich die drei central-involutorischen Collineationen, deren Centren α_1, α_2, α_3 sind, und welche bei der Lage der Punkte α_1, α_2, α_3 aus drei Spiegelungen A_1, A_2, A_3 bestehen an den Ebenen E_1, E_2, E_3, die senkrecht zu den Richtungen von α_1, α_2, α_3 durch q gelegt sind. Diese drei Ebenen E_1, E_2, E_3, die Winkel

Digitized by Google

von 120^0 mit einander einschließen sind Symmetrieebenen der Fläche.

§ 9. Man erkennt nun leicht, dass die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen etwa A_1 A_2 der Drehung des Raumes um q durch den Winkel von 120^0 entspricht und wir können den Sinn der obigen Drehung Π so festsetzen, dass $A_1 A_2 = \Pi$ wird. Es ergibt sich nun leicht aus den Symmetrieverhältnissen der Ebenen E_1, E_2, E_3, dass $A_1 A_2 = A_2 A_1 = A_1 A_3$ ist, woraus sofort $(A_1 A_2)^3 = A_1 A_2 \cdot A_2 A_1 \cdot A_1 A_3 = 1$ folgt, da $A_1^2 = 1$ ist, wegen des involutorischen Charakters der Spiegelung.

Die Beziehung zwischen den Operationen A_1, A_2, A_3 und Π wird durch eine collinare Umformung des Raumes nicht geändert, und wenn wir daher für die beliebig im Raume liegende Fläche F dieselbe Bezeichung A_1, A_2, A_3 für die central-involutorischen Collineationen mit den Centren α_1, α_2, α_3 beibehalten, so wird die obige Relation in Geltung bleiben. Sie behält sie auch für den Fall, dass α_2 und α_3 etwa conjugiert imaginär, die Collineationen A_2, A_3 daher complexe Operationen sind.

Die Fläche dritter Ordnung, welche eine ternär-planeare Collineation Π in sich zulässt, besitzt daher drei Tripelpunkte α_1, α_2, α_3, zu denen drei central-involutorische Collineationen A_1, A_2, A_3 der Fläche in sich gehören und man kann $\Pi = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1$ setzen, wobei dann $\Pi^2 = A_1 A_3 = A_3 A_1 = A_2 A_1$ wird.

§. 10. Dass umgekehrt, eine Fläche dritter Ordnung, welche zwei Tripelpunkte α_1, α_2 besitzt, deren Verbindungsgerade nicht auf der Fläche liegt, eine ternär-planlare Coll ineation in sich zulässt, deren Axe p die Gerade $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ ist, folgt sofort aus dem oben über die Zusammensetzung der involutorischen Collineationen A_1, A_2, die zufolge α_1, α_2 auftreten, Gesagten. Der dritte Schnittpunkt α_3 von $\overline{\alpha_1, \alpha_2}$ mit F ist wieder ein Tripelpunkt, denn alle Ebenen des Büschels $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ schneiden F in ebenen Curven dritter Ordnung, welche in α_1 und α_2 Wendepunkte besitzen, also ist auch α_3 für alle Wendepunkt, mithin auf der Fläche F ein Tripelpunkt.

Die Gruppe G_6 der Collineationen, welche eine solche Fläche in sich transformiert besteht, aus 6 Collineationen

$$1, A_1, A_2, A_3, \quad A_1 A_2 = \Pi, \quad A_2 A_1 = \Pi^{-1} = \Pi^2$$

in welcher 1, Π, Π^2 eine ausgezeichnete Untergruppe bilden. Sie ist der Diedergruppe vom Index sechs holoädrisch-isomorph.[1])

b) Die Fläche F lasse eine ternär-centrale Collineation Φ in sich zu.

§. 11. Das Centrum φ der Collineation kann nicht auf F liegen. Die Ebene durch φ schneiden F in Curven dritter Ordnung, welche sich selbst in der centralen Collineation, die in

[1]) Cfr. Klein l. c. pag. 9.

Digitized by Google

ihren Ebenen. durch Φ induciert werden, entsprechen müssen. Dies ist nur möglich, wenn sich drei ihrer Wendetangenten in dem Collineationscentrum φ schneiden. Hieraus folgt, dass an die F von φ aus ein dieselbe osculierender Kegel dritter Ordnung gehen muss, dessen Berührungscurve eine ebene Curve dritter Ordnung C^3 in der Collineationsebene $\mathfrak{E}$ der räumlichen Collineation Φ ist. Eine Gerade g der F treffe $\mathfrak{E}$ in α auf C^3, dann ist α ein Tripelpunkt. Denn die Ebene durch g und φ kann F nur noch in zwei weiteren Geraden g' g'' schneiden, die auch durch α gehen müssen.

Hieraus folgt, dass die 27 Geraden der F sich zu dreien in 9 Punkten von C^3 treffen.[1]) Da diese 9 Punkte auf C^3 so liegen, dass die Verbindungsgerade zweier immer noch einen dritten enthält, so sind sie die 9 Wendepunkte der C^3. Es möge bemerkt werden, dass die Gerade l, welche nach § 4 die drei anderen Asymptotenpunkte eines auf C^3 sich schneidenden Geradentripels trägt, durch φ geht, und dass die drei Geraden g g', g'', die sich auf C^3 schneiden, der Geraden g vermöge der drei Collineationen 1, Φ, Φ^2 entsprechen.

Die 9 Tripelpunkte auf C^3 sind offenbar Centren von 9 central-involutorischen Collineationen der F in sich, ihre Collineationsebenen gehen alle durch φ, da sie immer die Gerade l enthalten.

§ 12. Bevor wir die ganze Gruppe der Collineationen aufstellen, welche F in sich zulässt, möge gezeigt werden, dass umgekehrt, eine Fläche dritter Ordnung, welche drei nicht in einer Geraden liegende Tripelpunkte α, β, γ' besitzt, deren Ebene $\mathfrak{E}$ die F in einer irreduciblen Curve dritter Ordnung C^3 schneidet, längs C^3 von einem Kegel dritter Ordnung osculiert wird, dessen Spitze φ Centrum eine central-ternären Collineation ist, während die Ebene $\mathfrak{E}$ der C^3 die gehörige Collineationsebene darstellt. Die Geraden $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma'}$, $\overline{\gamma'\alpha}$ treffen F in weiteren drei Tripelpunkten, etwa γ, α'', β'', die wieder ein Dreieck bilden, so zwar, dass $\overline{\gamma\alpha''}$, $\overline{\alpha''\beta''}$, $\overline{\beta''\gamma}$ in weiteren 3 Tripelpunkten β', γ'', α' schneiden. Nun folgt, dass diese 9 Punkte durch gegenseitige Verbindung keine neuen Punkte mehr ergeben, sondern dass jede Gerade, die zwei derselben enthält, durch einen dritten von ihnen hindurchgeht. Denn für den ebenen Schnitt C^3 sind α, β, γ', da es Tripelpunkte von F sind, Wendepunkte, also sind auch die übrigen sechs Wendepunkte von C^3, woraus die Behauptung sich erweist.

Alle diese 9 Punkte sind Centren involutorischer Collineationen, die F in sich überführen. Betrachten wir die Collineation Γ, deren Centrum γ ist, so überführt dieselbe die Punkte α und β, also auch deren Tangentinalebenen in einander. Hiebei übergeht die Gerade l_α, welche die drei Asymptotenpunkte des in α sich

[1]) Cfr. Eckhardt a a. O. pag. 283.

Digitized by Google

schneidenden Geradentripels enthält, in die entsprechende Gerade l_β. Beide Geraden schneiden einander daher. Die Collineation A'', deren Centrum α'' ist, überführt analog den Punkt β in γ' also l_β in $l_{\gamma'}$ und B'' mit dem Centrum β'' verwandelt γ' in α also $l_{\gamma'}$ in l_α. Es müssen sich also die drei Geraden l_α, l_β, $l_{\gamma'}$ in einem Punkte φ schneiden, durch den die Tangentialebenen von F in den Punkten α, β, γ' gehen. Da aber vermöge A mit dem Centrum α die Punkte β und γ in einander übergehen, also auch l_β und l_γ, so schneiden sich auch diese. Die Collineation, deren Centrum der dritte Wendepunkt auf $\overline{\gamma\gamma'}$, ist, überführt l_γ in $l_{\gamma'}$, also schneidet l_γ sowohl l_β als $l_{\gamma'}$, geht mithin auch durch φ, daher auch die Tangentialebene von F in γ den Punkt φ enthält. Hieraus folgt, dass die Tangentialebenen von F in den 9 Wendepunkten, und daher in allen Punkten der ebenen Curve C^3 durch einen festen Punkt φ gehen.

Dass φ Centrum einer ternär-centralen Collineation Φ ist, welche F ungeändert lässt, ist nun leicht zu beweisen. Es wird später direct ihre Erzeugung durch die central-involutorischen Collineationen gegeben.

§ 13. Um die ganze Gruppe der Collineationen, welche F in sich zulässt zu übersehen, nehmen wir die 9 centralen Collineationen als Erzeugende der Gruppe an. Von denselben sind drei; deren Centren nicht auf einer Geraden liegen, von einander unabhängig, während durch diese die übrigen 6 erzeugt werden können. Doch wollen wir der Übersichtlichkeit halber alle 9 beibehalten und die Relationen beachten, welche zwischen drei solchen bestehen, deren Centren auf einer Geraden liegen. Wir vertheilten die 9 Wendepunkte folgendermaßen auf die 12 Wendepunktgeraden:

$$(W) \quad \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha & \beta' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta'' & \gamma \\ \alpha'' & \beta' & \gamma \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha & \beta'' & \gamma' \\ \alpha' & \beta & \gamma'' \\ \alpha'' & \beta & \gamma' \end{matrix}.$$

Dann ist, wenn wir die entsprechenden centralen Collineationen mit den großen Buchstaben bezeichnen etwa

$$(1) \qquad AB = B\Gamma = \Gamma A = \Pi$$

u. s. w. für die übrigen 12 Geraden.

Vermöge der Relationen (1) ist es möglich, in einer Aufeinanderfolge von Collineationen $AB \ldots A'AB\Gamma' \ldots A''$ jeden Buchstaben um eine Stelle nach links oder rechts zu schieben, wenn nur der links oder rechts nebenstehende andere Buchstabe ersetzt wird durch den dritten, der mit den beiden nebeneinanderstehenden Centren einer Geraden zugehört. So ist

$$AB..A'AB\Gamma'..A'' = AB..A'B\Gamma\Gamma'..A'' = AB..A'\Gamma A\Gamma'..A'',$$

Digitized by Google

indem das erstemal $AB = B\Gamma$ das anderemal $AB = \Gamma A$ gesetzt wurde. Hiebei wird die Anzahl der Operationen nicht vermehrt.

Bildet man also die symbolischen Producte, welche die Aufeinanderfolge der Operationen darstellen sollen, so kann man sich begnügen, solche zu betrachten, die aus lauter verschiedenen Buchstaben zusammengesetzt sind. Denn kommt ein Buchstabe mehrmals vor, so kann man vermöge der soeben angegebenen Regel alle aufeinanderfolgend machen, wobei dann, da die Operationen involutorisch sind, (symbolisch ihre Quadrate = 1) blos eine oder keine dieser Operationen erübrigt, je nachdem der Buchstabe eine ungerade oder gerade Anzahl mal auftrat.

Man kann ferner bewirken, dass keine solchen Operationen auftreten, die Wendepunkten einer Geraden entsprechen, denn man kann solche drei Buchstaben nebeneinander bringen, wobei sich ihr Product auf die Operation des mittleren reduciert. Z. B. $AB\Gamma = B$.

Man kann nun auch die Anzahl der zu combinierenden Collineationen auf 4 beschränken. Denn hat man 5 Collineationen, so beschaffen, dass alle von einander verschieden sind und keine 3 ihre Centren auf einer Geraden haben, etwa das Product $P = AB\,A'\,B'\,A''$, so schneiden sich entweder $\alpha\,\overline{\beta}$ und $\overline{\alpha'\,\beta'}$ in einem Wendepunkt von C^3 oder nicht. Schneiden sich $\overline{\alpha\,\beta}$, $\overline{\alpha'\,\beta'}$ in einem Centrum und führt man dieses statt β resp. α' ein, so reduciert sich das Product der ersten vier Factoren auf zwei. Schneiden sie sich aber, wie im vorliegenden Beispiel nicht auf der Curve und sind γ resp. γ' die dritten auf $\overline{\alpha\,\beta}$ resp. $\overline{\alpha'\,\beta'}$ liegenden Wendepunkte, so muss eine der Geraden $\overline{\alpha\,\alpha'}$ oder $\overline{\alpha\,\beta'}$ oder $\overline{\alpha\,\gamma'}$ durch den Wendepunkt gehen, welcher der fünften Collineation als Centrum dient. Hier ist es die Gerade $\overline{\alpha\,\alpha'}$, welche α'' enthält. Bringt man nun A und A' nebeneinander, so dass $P = A\,A'\,\Gamma''\,B'\,A''$ ist, so kann man $AA' = A'\,A''$ setzen und es wird $P = A'\,A''\,\Gamma''\,B'\,A''$. Die Operation A'' verschwindet indem

$$P = A'\,A''\,\Gamma''\,A''\,\Gamma = A'\,A''\,A''\,B''\,\Gamma = A''\,B''\,\Gamma.$$

§. 14. Die Gruppe Collineationen besteht daher aus folgenden Operationen:

1. Die 9 central-involutorischen Collineationen

$$A,\ B,\ \Gamma,\quad A',\ B',\ \Gamma',\quad A'',\ B'',\ \Gamma''.$$

2. Die 2×12 ternär-planaren Collineationen, welche die 12 Wendegeraden der Curve C^3 zu Axen haben. Aus dem Schema (W) sind sie sofort durch ihre symbolischen Producte angebbar. Zu jeder Wendegeraden gehört die ternär-planare Collineation und ihr Quadrat.

3. Die durch 3 Operationen erzeugten Collineationen, wenn die drei entsprechenden Centren nicht auf einer Geraden liegen.

Digitized by Google

Um den Charakter einer solchen Collineation zu erkennen, betrachten wir die Collineation

$$\Psi = A\,B\,\Gamma' = \Gamma'\,B''\,A'' = A''\,B\,\Gamma''$$

und bilden deren aufeinanderfolgende Potenzen:

$\Psi^2 = A\,B\,B''\,A''$
$\Psi^3 = A\,B\,B''\,B\,\Gamma'' = A\,B'\,\Gamma'' = B'$
$\Psi^4 = A\,B\,\Gamma'\,B' = B'\,A\,B\,\Gamma'$
$\Psi^5 = B'\,A\,B\,B''\,A'' = B'\,\Gamma\,\Gamma'\,A'\,A = B'\,\Gamma'\,\Gamma''\,A'\,A = \Gamma'\,A'\,\Gamma'\,A'\,A = \Gamma''\,B\,A$
$\Psi^6 = 1.$

Die Collineation Ψ ist daher von der Periode sechs, ihre dritte Potenz ist eine centrale Collineation, deren Centrum einer der 9 Wendepunkte von C^3 ist. Seine Lage ergibt sich folgendermaßen aus den drei Erzeugenden: $\overline{\alpha\,\beta}$ und $\overline{\beta\,\gamma'}$ schneiden noch je einen Wendepunkt, γ resp. α'' aus, die sie verbinde Geradende $\overline{\alpha''\,\gamma}$ enthält β', das Centrum der Collineation B'.

Die Collineation Ψ^2 und Ψ^4 stellen die centralternäre Collienation Φ und Φ^2 dar. Alle Collineationen A, also auch Ψ^2 und Ψ^4, lassen ja den Punkt φ fest, in dem sich die Tangentialebenen der F längs C^3 schneiden. Wenn wir die Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ betrachten, so finden wir, dass sie durch Ψ^2 nicht transformiert werden, d. h. für die Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ reduciert sich Ψ^2 auf die Identität. Um dies zu zeigen bemerken wir, dass die Collineation in der Ebene $\mathfrak{E}$, welche daselbst durch A etwa induciert wird, die centrale Collineation ist, deren Centrum α ist, und deren Collineationsaxe daher die gerade Polare von α für C^3 ist. Bezeichnen wir diese ebene centrale Collineation durch A_0 und analog mit dem Index o für die übrigen Wendepunkte, so wird das Symbol der Collineation in $\mathfrak{E}$, welche eine Collineation des Raumes daselbst induciert, einfach dadurch erhalten, dass den Operationen der Index o angefügt wird.

Für die neun Operationen A_0, B_0, Γ_0, A_0', B_0', Γ_0', Λ_0'', B_0'', Γ_0'' gelten aber nebst den Relationen (1) noch die folgende: Ein Product von vier aufeinander folgenden Operation gibt stets die Identität, wenn die Geraden, welche das erste und dritte sowie das zweite und vierte Centrum verbinden sich in einem Wendepunkt von C^3 schneiden. Der Satz lässt sich aus der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung leicht beweisen.

Nun gehen der Ableitung zu Folge $\overline{\alpha\,\beta''}$ und $\overline{\beta\,\alpha''}$ durch den Punkt γ', also ist

$$A_0\,B_0\,B_0''\,A_0'' = 1,$$

wie behauptet wurde. Die Collineation Ψ^2 und daher auch Ψ^4 lassen die Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ und den Punkt φ ungeändert, sind daher centrale Collinea-

Digitized by Google

tionen, und da $(\Psi^2)^3 = \Psi^6 = 1$ ist, sind sie ternär, mithin von Φ und Φ^2 nicht verschieden.

Die beiden senären Collineationen Ψ und $\Psi^5 = \Psi^{-1}$ lassen sich als Product von drei erzeugenden Collineationen darstellen, und zwar stellt jede Combination von drei der Operationen, deren Centren nicht auf einer Geraden liegen eine solche Ψ dar. Die Anzahl dieser Operationen ist $2 \times 9 = 18$ entsprechend den 9 centralen Collineationen, welche die dritte Potenz der Ψ darstellen.

Da Ψ^2 die einzigen central-ternären Collineationen Φ (oder Φ^2) darstellt, und $\Psi^3 = B'$ ist, so folgt $\Psi^5 = B'\,\Phi = \Phi\,B'$ und $\Psi = B'\,\Phi^2 = \Phi^2\,B'$, woraus die Anzahl der Collineation Ψ sich sofort ergibt. Es möge bemerkt werden, dass hieraus auch die Vertauschbarkeit der Collineationen A, B mit Φ folgt, was sich auch aus ihrer gegenseitigen räumlichen Beziehung ergibt.

Da die neun Wendepunkte sich zu 72 Dreiecken anordnen lassen und jedes Dreieck zu sechs Collineationen Ψ Anlass gibt, so tritt jede Collineation bei $6 \times 72 : 18 = 24$ Dreiecken auf. Die 24 Dreiecke, welche dieselbe Collineation Ψ ergeben, können leicht vermöge des Punktes abgeleitet werden, welcher das Centrum der central-involutorischen Collineation von Ψ^3 darstellt. Die obige Bemerkung über die Lage dieses Punktes gegen die drei Ecken des Dreieckes gibt hiezu das Mittel.

4. Die durch vier central-involutorische Collineationen erzeugte Operation ist, wenn sie nicht durch weniger Collineationen dieser Art erzeugbar ist, die ternär-centrale Collineation Φ. Bezeichnen wir für einen Augenblick mit 1, 2, 3, 4 irgend vier Wendepunkte der ebenen Curve dritter Ordnung C^3, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so müssen sich ein Paar Gegenseiten des Viereckes 1 2 3 4 auf C^3 schneiden, da es nur neun Wendepunkte von C^3 gibt. Ist also 5 etwa der Schnittpunkt von $\overline{12}$ und $\overline{34}$, so kann man die entsprechenden central-involutorischen Collineationen ersetzen durch die von 2, 5 und 5, 3, so dass sich das Product der vier Operationen $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ reduciert auf $A_2\,A_5\,A_5\,A_3 = A_2\,A_3$ eine planar-tricyclische Collineation. Analoges gilt, wenn sich $\overline{14}$ und $\overline{23}$ auf C^3 schneiden, wie etwa nach Schema (W) $A\,A''\,B'\,B$ dieses übergeht in $A''\,B'\,\Gamma'\,B = \Gamma\,A''\,A''\,\Gamma = \Gamma\,\Gamma'$. Es erübrigt also nur noch die Combination, dass $\overline{13}$ und $\overline{24}$ sich auf C^3 schneiden, dann ist aber, wie unter (3) gezeigt wurde $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ entweder Φ oder Φ^2.

§ 15. Hiemit ergibt sich, dass die Gruppe der Collineationen G_{54}, welche F mit einer centralen tricyclischen Collineation in sich transformiert aus 54 folgenden Operationen besteht:

9 central-involutorische Collineationen, deren Centren die 9 Wendepunkte der C^3 sind.

$2 \times 12 = 24$ ternär-planaren Collineationen, deren Axen die 12 Wendepunktsgeraden von C^3 sind.

Digitized by Google

$2 \times 9 = 18$ senären Collineationen Ψ.
$2 \times 1 = 2$ ternär-centralen Collineationen Φ und Φ^2 und aus der Identität besteht.

Nennt man eine paare Collineation eine solche, die durch die Aufeinanderfolge einer geraden Anzahl von central-involutorischen Collineationen erzeugt wird, so können wir sagen: die paaren Collineationen bilden die umfassendste Unterpruppe der G_{54}. Dieselbe besteht aus den 24 ternär-planaren, den 2 ternär-centralen und aus der Identität. In dieser Untergruppe ist 1, Φ, Φ^2 wieder ausgezeichnet.

Bedeutet Ψ_α diejenige senäre Collineation, für welche $\Psi_\alpha^3 = A$ ist, so kann die Gruppe G_{54} durch folgende 54 Operationen dargestellt werden:

$$\Psi_\alpha^n,\ B\Psi_\alpha^n,\ \Gamma\Psi_\alpha^n,\ A'\Psi_\alpha^n,\ B'\Psi_\alpha^n,\ \Gamma'\Psi_\alpha^n,\ A''\Psi_\alpha^n,\ B''\Psi_\alpha^n,\ \Gamma''\Psi_\alpha^n$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Denn von diesen 54 Operationen können keine zwei identisch sein. Wäre etwa $\Gamma\Psi_\alpha^h = A''\Psi_\alpha^k$, so würde hieraus folgen $A''\Gamma = \Psi_\alpha^{k-h}$, was unmöglich ist, da keine Potenz von Ψ_α eine planar-tricyclische Collineation darstellt.

Entsprechend den 9 verschiedenen Wendepunkten kann man G_{54} auf 9 verschiedene Arten nach obigem Schema darstellen.

§. 16. Zusatz. Wir haben soeben gezeigt, dass eine Fläche dritter Ordnung F, welche drei eine Ebene $\mathfrak{E}$ bestimmende Trippelpunkte besitzt, eine ternär-centrale Collineation Φ in sich zulässt, sobald $\mathfrak{E}$ in einer irreduciblen Curve dritter Ordnung die Fläche schneidet. Aus dem Auftreten der Φ folgte aber sofort, dass eine Gruppe G_{54} mit 54 Collineationen existiert, welche F in sich überführt.

Es kann aber der Fall eintreten, dass die Ebene $\mathfrak{E}$ der drei Trippelpunkte F in einer zerfallenen Curve dritter Ordnung schneidet. Wir wollen nun auch diesen Fall betrachten. Da die Tripelpunkte auf Geraden der Fläche liegen, so muss die Schnittcurve in drei Gerade zerfallen. Diese können entweder ein Dreieck bilden, oder sich in einem Punkte schneiden.

a) Die Schnittcurve besteht aus drei Geraden a, b, c, die ein Dreieck bilden, die auf ihnen liegenden Tripelpunkte seien resp. α, β, γ. Da die Gerade $\overline{\beta\gamma}$ die F in Schnittpunkte α' (Fig. 1) mit a trifft und analog β' und γ' auf b resp. c gelegen, Tripelpunkte von F sind, so stellen die 6 Punkte $\alpha\beta\gamma\ \alpha'\beta'\gamma'$ die Ecken eines Vierseites dar, dessen Diagonaldreiseit a, b, c ist.[1]) Infolge dessen liegen die drei Punkte $\alpha'\beta'\gamma'$ auf einer Geraden.

Diese Fläche besitzt 6 centrale involutorische Collineationen A, B, Γ, A', B', Γ' und die durch Combination derselben zu erzeugen-

[1]) Eckhardt a. a. O. pag. 244.

Digitized by Google

den Collinationen. Da der Satz von §. 13 Seite 132 auch hier Anwendung findet, so folgt, dass jede Collineation um eine Stelle vor- oder zurückgeschoben werden kann mit Beachtung derselben Regel, wie dort. Liegt aber die Verbindungsgerade der beiden Centren auf der Fläche, dann sind die beiden centralen Collineationen direct vertauschbar nach §. 5. Infolge dieser Beziehungen kann man sich auf solche Folgen von Collineationen beschränken, die lauter verschiedene Centren aufweisen.

Aus der Configuration, welche die 6 Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ bilden, ist sofort beweisbar, dass vier aufeinanderfolgende Operationen durch zwei ersetzt werden können. Denn entweder liegen drei derselben auf einer Geraden, diese reducieren sich, nachdem sie aufeinanderfolgend gemacht wurden, auf die mittlere, oder die vier bilden ein Viereck, etwa wie für $\Gamma'\,A\,\Gamma\,A'$, dann schneiden sich die Gegenseiten $\overline{\gamma'\alpha}$ und $\overline{\gamma\alpha'}$ stets in einem Tripelpunkt, hier β, und es ist daher $\Gamma'\,A\,\Gamma\,A' = A\,B\,B\,\Gamma = A\,\Gamma$.

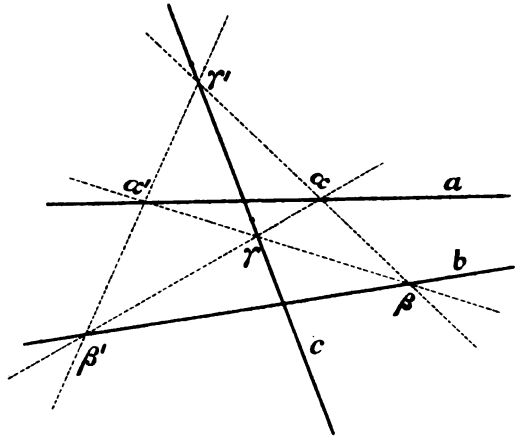


Fig. 1

Die ganze Gruppe der Collineationen, welche diese F ungeändert lässt, besteht daher aus den sechs central-involutorischen Collineationen $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ und aus den Combinationen derselben

1. zu zweien solcher, deren Verbindungsgerade auf der Fläche liegt, also eine der drei Geraden a, b, c ist, und die geschaart involutorische Collineationen T_a, T_b, T_c sind. Es folgt $T_a . T_b . T_c = 1$;

2. zu zweien solcher, deren Verbindungsgerade nicht auf der Fläche liegt, die also ternär-planare Collineationen geben und zwar $2 \times 4 = 8$ an Zahl entsprechend den vier Seiten des Vierseites, welche ihre Axen sind;

Digitized by Google

3. Combinationen zu dreien, deren Centren nicht in einer Geraden liegen, und die Collineationen Δ von der Periode vier geben. Wie etwa

$$\Delta = A\,B\,\Gamma = \Gamma\,B'\,A' = B'\,A\,A' = B'\,.\,T_a = T_a\,B.$$
$$\Delta^2 = B'\,T_a\,.\,T_a\,B = B\,B' = T_b$$
$$\Delta^3 = T_b\,.\,T_a\,B = T_c\,B$$
$$\Delta^4 = 1.$$

Wir wollen diese Collineation mit Δ_b bezeichnen, ihr Quadrat ist eine geschaart-involutorische Collineation mit b als Leitgerade. Es gibt dementsprechende $2 \times 3 = 6$ Collineationen Δ. Da vermöge $\Delta_b = A\,B\,\Gamma$ der Tripelpunkt β von b übergeht in β', so werden die Ebenen durch b vermöge Δ involutorisch gepaart und die Ebene $\overline{bac}$ ist eine Deckebene der Involution. Die drei übrigen Tritangentialebenen durch b berühren nach pag. 125 (Fußnote) in drei Punkten einer Geraden $\mathfrak{b}$, deren Ebenen ebenfalls durch Δ_b involutorisch gepaart sind. Die 2 Paar Geraden, welche ausser a und c mit b zu zweien in einer Ebene liegen, bilden zwei, die 4 Geraden, welche sich in β und β' auf b schneiden, ein Quadrupel von Δ_b. Die 16 übrigen Geraden bilden 4 Cyclen zu je vier windschiefen Geraden.

§. 17. Diese Fläche besitzt eine Gruppe G_{24} von 24 Collineationen und zwar:

6 central-involutorische A, B, Γ, A', B', Γ'
3 geschaart-involutorische T_a, T_b, T_c
$2 \times 4 = 8$ ternär-planare $A\,B$, . . .
$2 \times 3 = 6$ quaternäre Collineationen Δ_a, Δ_a^3, Δ_b, Δ_b^3, Δ_c, Δ_c^3 und die Identität.

Die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe bilden nach §. 15 die Collineation 1, T_a, T_b, T_c und die 8 ternär-planaren Collineationen. Sie ist mit der erweiterten Tetraedergruppe holoedrisch-isomorph.[1])

Die Gruppe kann dargestellt werden durch

$$\Delta_a^n,\ A'\Delta_a^n,\ B'\Delta_a^n,\ \Gamma'\Delta_a^n,\ B\,\Delta_a^n,\ \Gamma\Delta_a^n \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

denn von diesen 24 Collineationen können keine zwei einander gleich sein.

§. 18. β) Die drei Geraden a, b, c gehen durch einen Punkt a', so dass die drei anderen Tripelpunkte α, β, γ von a, b, c auf einer Geraden liegen.

Die diesen vier Trippelpunkten zukommenden central-involutorischen Collineationen A', A, B, Γ geben zu zweien combiniert

1. die drei geschaart-involutorischen Collineationen T_a, T_b, T_c und 2. die zwei ternär-planaren Collineationen

[1]) Klein, l. c. p. 14 und 20, resp. 23.

Digitized by Google

$$\Pi = AB = B\Gamma = \Gamma A \text{ und } \Pi^2 = BA = A\Gamma = \Gamma B$$

deren Axe die Gerade $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ist,

Es folgt sofort auch

$T_a . T_b = T_b T_c = T_c . T_a$, da A' mit A, B und Γ vertauschbar ist.

§ 19. Es tritt noch eine Combination zu dreien der central-involutorischen Collineationen auf:

$X = A'A\Gamma = \Gamma BA'$ für dieselbe ergibt sich
$X^2 = AB = \Pi$
$X^3 = AB . \Gamma BA' = A'$
$X^6 = 1$.

Es sind daher X und X^5 die einzigen senären Collineationen, welche auftreten können. Ihre Quadrate sind ternär-planaren Collineationen Π und Π^2.

Die drei Geraden a, b, c bilden doppelt gezählt ein Sextupel von X. Die übrigen Sextupel bestehen aus den drei Geradenpaaren, welche je eine der drei Geraden a, b, c schneiden. Die in der Ebene $\mathfrak{A}'$ (Polare von α') von X inducierte Collineation ist eine tricyclische.

Die Gruppe G_{12} von 12 Collineationen, welche diese F in sich überführt, besteht aus:

4 central-involutorischen Collineationen A', A, B, Γ
3 geschaart-involutorischen T_a, T_b, T_c
2 ternär-planaren $AB = \Pi$ und $BA = \Pi^2$
2 senären Collineationen X und $X^{-1} = X^5$, für welche

X^2 eine ternär-planare und X^3 eine centrale Collineation ist, und der Identität.

Die umfassendste Untergruppe ist nach § 15 die Gruppe $1, T_a, T_b, T_c, \Pi = AB, \Pi^2 = BA$.

Die Gruppe G_{12} ist mit der Diedergruppe vom Index 12 holoedrisch isomoroh.[1])

Die Gruppe kann dargestellt werden durch

$$X^n, \; AX^n \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

c) Die Fläche dritter Ordnung, werde durch eine geschaart-ternäre Collineation Ω in sich überführt.

§ 20. Es seien a, a' die Leitstrahlen der linearen Congruenz, deren Strahlen Tripel homologer Punkte in Ω tragen. Ist g eine Gerade von F, welche a und a' nicht schneidet, und entspricht ihr in Ω und Ω^2 die Gerade g' resp. g'', so liegen $g\, g'\, g''$ auf einem Hyperboloid durch $a\, a'$, sind also zu einander windschief. Es mögen diese drei Geraden mit b_4, b_5, b_6 bezeichnet werden. Das

[1]) Klein l. c. pag. 9.

Digitized by Google

erwähnte Hyperboloid hat mit F noch drei Gerade gemeinschaftlich, welche a_1, a_2, a_3 genannt werden mögen. Diese Geraden sind Strahlen der obenerwähnten linearen Congruenz und die auf ihnen gelegenen Tripel entsprechender Punkte bilden auf ihnen eine tricylische Projectivität mit den Deckpunkten auf a und a'.

Die Ebenen durch a_1 werden durch 1, Ω, Ω^2, zu Tripeln geordnet, und die drei Ebenen $\overline{a_1\, b_4}$, $\overline{a_1\, b_5}$, $\overline{a_1\, b_6}$ bilden ein solches Tripel. Da die noch übrigen beiden Tritangentialebenen durch a_1 ebenfalls entsprechende Ebenen sein müssen, so sind sie Coïncidenzebenen des projectivisch-tricyclischen Büschel durch a_1. Aber auch die beiden Asymptotenebenen der F, welche durch a_1 gehen, müssen mit Ihren entsprechenden zusammenfallen, sind also Coïncidenzebenen. Der Büschel kann aber nur zwei Coïncidenzebenen besitzen, also sind die zwei Tritangentialebenen auch Asymptotenebenen, d. h. die Geraden $b_2\, c_{12}$ und $b_3\, c_{13}$ schneiden sich auf a_1. Wir nennen diese Punkte α_1 und α_3'. Genau dasselbe gilt für die Gerade a_2 und a_3, auf welcher je zwei Tripelpunkte α_2 und α_1' resp. α_3 und α_2' liegen. Wir wollen unter b_2 die Gerade verstehen,

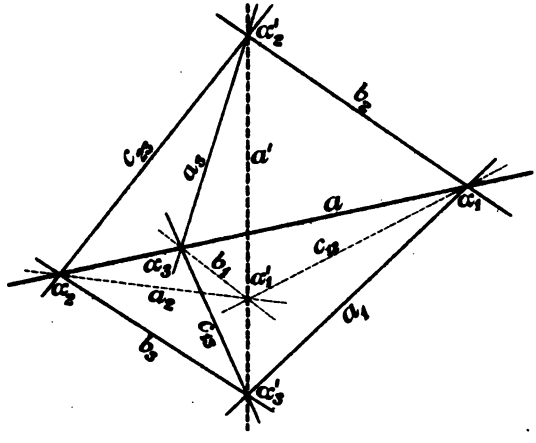


Fig. 2.

welche a_3 schneidet, also zu a_2 windschief ist, ebenso mit b_3 die, welche a_2 trifft, daher zu a_3 windschief ist, bezeichnen. Die Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, schneiden daher alle a_1 und sind zu b_1 windschief, bilden also mit dieser die Hälfte einer Doppelsechse, deren andere Hälfte a_1, a_2, a_3 und noch die leicht construierbaren a_4, a_5, a_6 enthält. Wir wollen nun α_2 den Schnittpunkt von a_2 und b_3 und α_1' den von a_2 mit b_1 nennen. Durch diese Tripelpunkte gehen noch c_{23} und c_{12}. Ebenso möge α_3 der Schnittpunkt von a_3 mit b_1 und c_{13}, sowie α_2' der Schnittpunkt b_2 und c_{23} sein. Man schließt nun leicht, dass die Punkte α_1, α_2, α_3 ebenso wie α_1' α_2' α_3' auf den Geraden a resp. a' liegen, denn sie sind die Deckpunkte der tricyclischen

Digitized by Google

Projectivität auf den Geraden der Fläche, welche durch sie gehen. So z. B. auf a_1 bilden die Schnittpunkte der drei Geraden b_4, b_5, b_6 einen Cyclus, ebenso die Schnittpunkte von c_{14}, c_{15}, und c_{16} und die Deckpunkte dieser Projectivität sind α_1 und α_3.[1]) Die

[1]) Hiedurch sind die Invarianten dieser Fläche dritter Ordnung numerisch bestimmt und jede solche Fläche lässt sich daher durch eine Raumcollineation in jede andere derartige Fläche überführen. Vergl. die Abhandlung „Über die Invarianten der Flächen dritter Ordnung" in dieser Zeitschrift, VIII. Jahrgang. Pag. 146.

Es ist durch die Invarianten auch die Clebsch'sche Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf eine Ebene gegeben Denn werden, wie in der citierten Abhandlung auch hier die Punktinvarianten von a_1 mit h, i die von b_1 mit H, I bezeichnet, und bildet sich a_1 als Punkt 1, daher b_1 als Kegelschnitt K_1 ab, auf dem die Punkte 2, 3, 4, 5, 6 die Bilder der Geraden a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 darstellen, so muss das Doppelverhältnis $(2\,3\,4\,5) = H$ und $(2\,3\,4\,6) = I$ sein, ebenso ist im Strahlenbüschel 1 (2 3 4 5 6) das Doppelverhältnis der vier Strahlen $1\,(2\,3\,4\,5) = h$ und $1\,(2\,3\,4\,6) = i$. Sind nun vier der Punkte etwa 2, 3, 4, 5 willkürlich angenommen, so bestimmt sich der Kegelschnitt K_1 auf dem $(2\,3\,4\,5) = H$ ist und auf diesem ist eindeutig der Punkt 6 zufolge der Relation $(2\,3\,4\,6) = I$ bestimmt. Sind die fünf Punkte 2, 3, 4, 5, 6 construiert, so bestimmt sich eindeutig der Punkt 1 von dem aus die Strahlen 1 (2 3 4 5 6) die Doppelverhältniste h und i haben, etwa als Schnittpunkt zweier Kegelschnitte durch 2 3 4 5 mit dem Doppelverhältnis h und 2 3 4 6 mit dem Doppelverhältnis i.

Wählen wir für die vorliegende Fläche als Bild von b_1 einen Kreis K_1 und als Bilder von a_2 und a_3 die imaginären Kreispunkte 2 und 3 im Unendlichen, so bilden die Bilder 4, 5, 6 von a_4, a_5, a_6 ein gleichseitiges Dreieck auf K_1. Denn es muss $(4\,5\,6\,2\,3) \overline{\wedge} (5\,6\,4\,2\,3) \overline{\wedge} (6\,4\,5\,2\,3)$ sein, wodurch auch die Invarianten $H = \frac{1}{\varepsilon}$, $I = \varepsilon$, $h = \varepsilon$, $i = \frac{1}{\varepsilon}$; $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ gegeben sind. Das Bild 1 der Geraden a_1 ist dann der Mittelpunkt des Kreises und es wird auch im Strahlenbüschel $1\,(2\,3\,4\,5\,6) \overline{\wedge} 1\,(2\,3\,5\,6\,4) \overline{\wedge} 1\,(2\,3\,6\,4\,5)$ sein.

Die nebenstehende Figur, in der auch die Bilder der übrigen reellen Geraden der Fläche gezeichnet sind, stellt die Abbildung der F auf die Ebene dar.

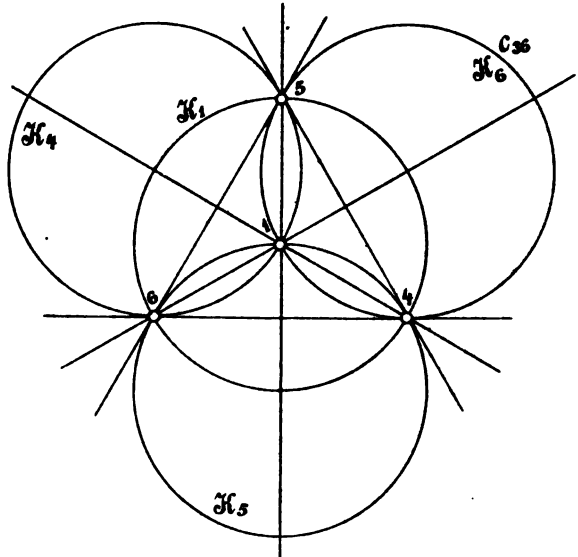


Fig. 2a.

Digitized by Google

neun Geraden $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_{12}, c_{13}, c_{23}$ haben also ohne Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse, die in umstehender Figur 2 in Projection dargestellte Lage gegen einander. Die drei Tritangentialebenen der Tripelpunkte auf a gehen durch a' und die Tangentialebenen der Tripelpunkte auf a' gehen durch a.

Den neun Tripelpunkten α_i und α'_k entsprechen neun central-involutische Collineationen A_i und A'_k, welche gegeneinander vertauschbar sind, indem $A_i A'_k = T_{ik}$ neun geschaart-involutorische Collineationen geben, die den neun Geraden $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_{12}$ c_{13}, c_{23} zugehören.

Hiezu treten noch vier ternär-planare Collinationen, nämlich

$$\Pi = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1 \text{ und } \Pi^2 = A_1 A_3 = A_3 A_2 = A_3 A_1$$
$$\Pi = A'_1 A'_2 = A'_2 A'_3 = A'_3 A'_1 \quad „ \quad \Pi'^2 = A'_1 A'_3 = A'_3 A'_2 = A'_2 A'_1$$

Es sind auch Π und Π' gegeneinander vertauschbar und es ergeben sich daher nur vier weitere neue Collinationen

---

Man sieht hieraus sofort, dass sich die Geraden c_{45} und b_5 auf a_4 in einem Punkte schneiden, da die Gerade $\overline{45}$ den Kreis K_5 in 4 berührt. Analog schneiden sich c_{45} und b_4 auf a_5, c_{56} wird von b_6 auf a_5 und von b_5 auf a_6 geschnitten, und a_6 und b_4, sowie a_4 und b_6 schneiden einander auf c_{46}. Aber auch $\overline{12}$ und $\overline{13}$ berühren K_1 in 2 und 3 den imaginären Kreispunkten der Ebene also schneiden sich c_{12} und a_2 sowie c_{13} und a_3 auf c_{23}. Die imaginären Punkte 2 und 3 werden aus 5 und 6 durch zwei circulare Involutionen projiciert, die zu der Geraden $\overline{14}$ perspectivisch liegen, also schneiden sich die Geraden $\overline{52}$ und $\overline{62}$, sowie $\overline{53}$ und $\overline{63}$ auf der Geraden $\overline{14}$, d. h. die Gerade c_{14} wird von c_{25}, c_{26} und von c_{35}, c_{36} in je einem Tripelpunkt geschnitten. Es gilt analoges für c_{15}, c_{16} und hieraus folgt, dass jede der 27 Geraden der Fläche zwei Tripelpunkte trägt. Das gibt $\frac{2 \times 27}{3} = 18$ solcher Punkte. Die Anordnung der Geraden ergibt sich leicht aus der Figur als folgendes Schema, in welchem je drei durch einen Tripelpunkt gehende Gerade neben einander stehen.

$$\begin{array}{lll} c_{12}\, a_1\, b_2 & c_{23}\, a_2\, b_3 & c_{13}\, a_3\, b_1 \\ c_{12}\, a_2\, b_1 & c_{23}\, a_3\, b_2 & c_{13}\, a_1\, b_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} c_{45}\, a_5\, b_4 & c_{56}\, a_6\, b_5 & c_{46}\, a_4\, b_6 \\ c_{45}\, a_4\, b_5 & c_{56}\, a_5\, b_6 & c_{46}\, a_6\, b_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} c_{14}\, c_{26}\, c_{35} & c_{15}\, c_{24}\, c_{36} & c_{16}\, c_{25}\, c_{34} \\ c_{14}\, c_{26}\, c_{36} & c_{15}\, c_{26}\, c_{34} & c_{16}\, c_{24}\, c_{35} \end{array}$$

Es ist auch leicht die Geraden anzugeben, welche je drei der Tripelpunkte tragen, was später im Texte geschieht.

Von dieser Fläche sind 15 Gerade reell und 12 imaginär, nämlich die der Doppelsechse:

$$a_2\, b_2\, c_{34}\, c_{35}\, c_{36}\, c_{31}$$
$$a_3\, b_3\, c_{24}\, c_{25}\, c_{26}\, c_{21}.$$

Digitized by Google

$$\Omega_2 = \Pi\,\Pi' \text{ und } \Omega_3 = \Pi^2\,\Pi'$$
$$\Omega_2^2 = \Pi^2\,\Pi'^2 \qquad \Omega_3 = \Pi\,\Pi'^2,$$

welche von der Periode 3 sind, und, wie sogleich gezeigt werden soll, ternär-geschaart.

§ 21. Wir stellen zu diesem Behufe das Schema der Geraden von F auf, wie es durch Π, resp, Π' zu Gruppen von drei Geraden geordnet wird.

Durch $\Pi = A_1\,A_2$ übergeht, wie aus der Fig. 2 sofort ersichtlich ist:

a_1 in c_{13} und dieses in b_3
b_2 „ a_3 „ „ „ c_{23}
daher c_{12} „ b_1 „ „ „ a_2.

Es übergeht ferner a_4 durch A_1, da es b_2 schneidet, in c_{24} und dieses durch A_2, da es a_2 schneidet, in b_4. Analog findet man, dass b_4 übergeht durch A_1 in c_{14} und dieses durch A_2, da es c_{23} schneidet, in c_{56}. Daher ist $a_4\,b_4\,c_{56}$ wieder ein Cyclus. Fährt man in dieser Weise fort, so findet man folgende Anordnung der Geraden der F, so dass die erste Zeile durch Π in die zweite und durch Π^2 in die dritte verwandelt wird:

$$\Pi) \ldots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{13} & c_{12} & c_{23} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ b_3 & b_1 & b_2 & c_{56} & c_{46} & c_{45} & c_{34} & c_{35} & c_{36}. \end{matrix}$$

In ganz derselben Weise findet man das zu $\Pi' = A_1' A^2$ gehörige Schema der Anordnung

$$\Pi')\ldots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ b_2 & b_3 & b_1 & c_{56} & c_{46} & c_{45} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{12} & c_{23} & c_{13} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{34} & c_{35} & c_{36}. \end{matrix}$$

Daher ist die Gruppierung der Geraden der Fläche vermöge der Collineation Ω_2 die folgende:

$$\Pi\,\Pi' = \Omega_2)\ldots \begin{matrix} a_1 & b_2 & c_{12} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ a_3 & b_1 & c_{13} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ a_2 & b_3 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26}, \end{matrix}$$

während die übrigen neun Geraden a_4, a_5, a_6, b_4, b_5, b_6, c_{45}, c_{46}, c_{56} mit ihren entsprechenden zusammenfallen.

Für Ω_3 ergibt sich

$$\Pi^2\,\Pi' = \Omega_3)\ldots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{46} & c_{45}, \end{matrix}$$

während die neun übrigen Geraden c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{34}, c_{35}, c_{36} mit ihren entsprechenden coincidieren.

Digitized by Google

Durch die Collineation Ω_2 und Ω_2^2 werden die Ebenen durch a_4 zu Tripeln geordnet und ein solches Tripel bilden die Ebenen durch $a_4\, c_{14}$, $a_4\, c_{34}$, $a_4\, c_{24}$. Die zwei noch erübrigenden Tritangentialebenen müssen die Asymptotenebenen der F durch a_4 sein, da diese zwei Paare Ebenen mit ihnen homologen zusammenfallen müssen. Also schneiden sich b_5 und c_{45}, sowie b_6 und c_{46} auf a_4. Ganz analog zeigt man, dass sich b_4, c_{45} und b_6, c_{56} auf a_5, sowie b_4, c_{46} und b_5, c_{56} auf a_6 schneiden. Hiedurch entsteht eine der Figur 2 ganz gleiche Lage dieser neun Geraden zu einander. Es treten (Figur 3) wieder zwei Gerade b, b' auf, welche die neun Tripelpunkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_1', \beta_2', \beta_3'$ tragen, die paarweise auf den neun Geraden liegen. Hieraus folgt sofort, dass Ω_2 eine geschaarte Collineation ist, deren Leitstrahlen b, b' sind. Ganz analog ergibt sich, dass

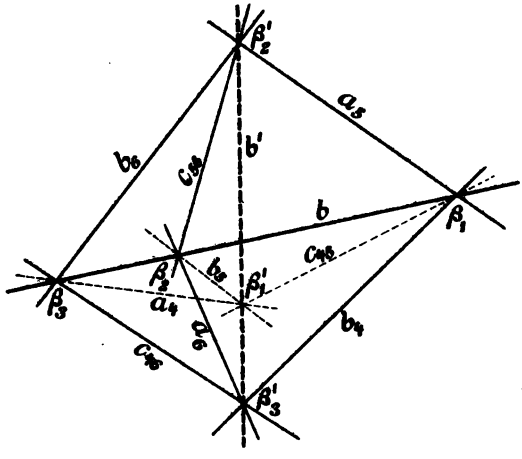


Fig. 3.

Ω_3 eine geschaarte Collineation ist, deren Leitstrahlen c und c' ebenfalls 9 Tripelpunkte γ_i, γ_k' enthalten, die paarweise auf den neun Geraden der Fläche vertheilt sind, welche durch Ω_3 in sich überführt werden. Die Fig. 4 gibt die Vertheilung der Punkte auf die Geraden an.

§. 22. Hiedurch ergibt sich, dass auf jeder der 27 Geraden der Fläche sich zwei Tripelpunkte befinden, dass also die Fläche $\frac{2 \times 27}{3} = 18$ Tripelpunkte besitzt. Dieselben liegen zu dreien auf 42 Geraden. Denn sie geben zu zweien verbunden $\frac{18 \cdot 17}{1.2} = 153$ Geraden, also da 27 von denselben der Fläche angehören, noch 126, die je drei Tripelpunkte tragen, also dreifach zählen, somit nur $\frac{126}{3} = 42$ Gerade darstellen. Sechs von ihnen sind a, a', b,

Digitized by Google

b', c, c', die übrigen 36 lassen sich leicht angeben, aus dem folgenden Schema, welches die Lage der Tripelpunkte auf den Geraden darlegt, gemäß der Figuren 2, 3 und 4. Es schneiden sich nämlich:

$$
\begin{array}{lll}
c_{12}\,a_1\,b_2 \text{ in } \alpha_1 & c_{23}\,a_2\,b_3 \text{ in } \alpha_2 & c_{13}\,a_3\,b_1 \text{ in } \alpha_3 \\
c_{12}\,a_3\,b_1 \;\; , \;\; \alpha_1' & c_{23}\,a_3\,b_2 \;\; , \;\; \alpha_2' & c_{13}\,a_1\,b_3 \;\; , \;\; \alpha_3' \\
c_{45}\,a_5\,b_4 \text{ in } \beta_1 & c_{56}\,a_6\,b_5 \text{ in } \beta_2 & c_{46}\,a_4\,b_6 \text{ in } \beta_3 \ldots T) \\
c_{45}\,a_4\,b_5 \;\; , \;\; \beta_1' & c_{56}\,a_5\,b_6 \;\; , \;\; \beta_2' & c_{46}\,a_6\,b_4 \;\; , \;\; \beta_3' \\
c_{14}\,c_{26}\,c_{35} \text{ in } \gamma_1 & c_{15}\,c_{24}\,c_{36} \text{ in } \gamma_2 & c_{16}\,c_{25}\,c_{34} \text{ in } \gamma_3 \\
c_{14}\,c_{25}\,c_{36} \;\; , \;\; \gamma_1 & c_{15}\,c_{26}\,c_{34} \;\; , \;\; \gamma_2 & c_{16}\,c_{24}\,c_{35} \;\; , \;\; \gamma_3.
\end{array}
$$

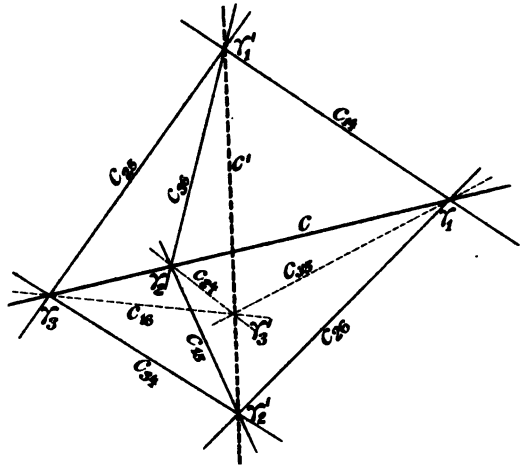


Fig. 4.

Infolge dessen liegt auf der Geraden $\overline{\alpha_1\,\beta_1}$, welche mit $a_1\,b_4$ und $b_2\,a_5$ in einer Ebene liegt, der Trippelpunkt von c_{14} und c_{25}, also γ_1'. In analoger Weise ergeben sich die 36 Geraden des folgenden Schema:

$$
\begin{array}{llllll}
\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1' & \alpha_2\,\beta_1\,\gamma_3' & \alpha_3\,\beta_1\,\gamma_2' & \alpha_1'\,\beta_1\,\gamma_2 & \alpha_2'\,\beta_1\,\gamma_3 & \alpha_3'\,\beta_1\,\gamma_1 \\
\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_2' & \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_1' & \alpha_3\,\beta_2\,\gamma_3' & \alpha_1'\,\beta_2\,\gamma_3 & \alpha_2'\,\beta_2\,\gamma_1 & \alpha_3'\,\beta_2\,\gamma_2 \\
\alpha_1\,\beta_3\,\gamma_3' & \alpha_2\,\beta_3\,\gamma_2' & \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_1' & \alpha_1'\,\beta_3\,\gamma_1 & \alpha_2'\,\beta_3\,\gamma_2 & \alpha_3'\,\beta_3\,\gamma_3 \ldots G) \\
\alpha_1\,\beta_1'\,\gamma_2 & \alpha_2\,\beta_1'\,\gamma_3 & \alpha_3\,\beta_1'\,\gamma_1 & \alpha_1'\,\beta_1'\,\gamma_1' & \alpha_2'\,\beta_1'\,\gamma_3' & \alpha_3'\,\beta_1'\,\gamma_2' \\
\alpha_1\,\beta_2'\,\gamma_3 & \alpha_2\,\beta_2'\,\gamma_1 & \alpha_3\,\beta_2'\,\gamma_2 & \alpha_1'\,\beta_2'\,\gamma_2' & \alpha_2'\,\beta_2'\,\gamma_1' & \alpha_3'\,\beta_2'\,\gamma_3' \\
\alpha_1\,\beta_3'\,\gamma_1 & \alpha_2\,\beta_3'\,\gamma_2 & \alpha_3\,\beta_3'\,\gamma_3 & \alpha_1'\,\beta_3'\,\gamma_3' & \alpha_2'\,\beta_3'\,\gamma_2' & \alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_1'.
\end{array}
$$

Auf jeder Geraden liegen drei mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete Punkte, von denen entweder einer oder alle drei gestrichen sind.

Digitized by Google

Diese 36 Geraden liegen zu neun in vier Ebenen, die sich in den sechs Geraden a, a', b, b', c, c' schneiden, so dass diese die Gegenseiten des von den ersten gebildeten Tetraeders sind. Denn die Ebene durch a und β_1 enthält die Geraden $\overline{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1'}$, $\overline{\alpha_2 \beta_1 \gamma_3'}$ und $\overline{\alpha_3 \beta_1 \gamma_2'}$, also auch die Gerade $c' = \overline{\gamma_1' \gamma_2' \gamma_3'}$. Da diese Ebene auch die Gerade $\overline{\alpha_1 \gamma_3 \beta_3'}$ enthält, so liegt die Gerade $\overline{\beta_1 \beta_3 \beta_2} = b$ in derselben. Man erkennt nun leicht, dass die Ebenen und Geraden die oben angegebene Beziehung haben, deren Bild in Fig. 5 ohne Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse dargestellt erscheint. Wir wollen noch die Ecken des Tretraeders mit 1, 2, 3, 4 bezeichnen, so dass 1 2 3 in der Ebene durch $a'\, b'\, c'$ liegt.

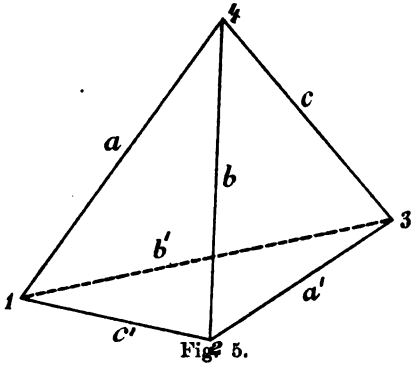


Fig. 5.

Da die vier Ebenen des Tetraeders, das Fundamentaltetraeder heißen soll, jede neun Tripelpunkte enthält und die gegenüberliegende Ecke der Schnittpunkt der Tangentialebenen dieser neun Tripelpunkte ist, so folgt aus dem Beweise unter b) § 12, Seite 130, dass die vier Ecken Centren und die gegenüberliegenden Ebenen Collineationsebenen von 4×2 central-ternären Collineationen sind. Wir wollen sie mit Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 bezeichnen.

§. 23. Es liegt nun die Vermuthung nahe, dass ebenso wie Ω_2 und Ω_3 sich durch die ternär-planaren Collineationen Π und Π' erzeugen lassen, auch Ω, die wir fortab mit Ω_1 bezeichnen, durch die ternär-planaren Collineationen $\Pi_2 = B_1 B_2$ und $\Pi_3' = B_1' B_2'$, resp. $\Pi_3 = \Gamma_1 \Gamma_2$ und $\Pi_3' = \Gamma_1' \Gamma_2'$ erzeugt werden kann, wobei B_i und Γ_k in übriger Weise central-involutorische Collinationen mit den Centren β_i, resp. γ_k bedeuten.

Wir wollen zum Beweise die Anordnung der Geraden von F angeben, wie sie durch Ω_1 und Ω_1^2 bewirkt wird. Die Geraden $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_{12}, c_{13}, c_{23}$ fallen nach §. 20 mit ihnen homologen zusammen, während b_4, b_5, b_6 ein Tripel darstellt. Daher ist auch c_{14}, c_{15}, c_{16} sowie c_{24}, c_{25}, c_{26} und c_{34}, c_{35}, c_{36} je ein Tripel, da

Digitized by Google

diese Geraden in den Ebenen durch $a_i b_4$, $a_i b_5$, $a_i b_6$ $(i = 1, 2, 3)$ liegen. Da ferner in den Ebenen durch $b_1 c_{14}$, $b_1 c_{15}$, $b_1 c_{16}$ noch die Geraden a_4, a_5, a_6 liegen, so bilden auch diese ein Tripel. Man erhält daher folgendes Schema für

$$\Omega_1) \ldots \begin{matrix} a_4\, b_5\, c_{45} & e_{14}\, c_{24}\, c_{34} \\ a_5\, b_6\, c_{56} & c_{15}\, c_{25}\, c_{35} \\ a_6\, b_4\, c_{46} & c_{16}\, c_{26}\, c_{36} \end{matrix}$$

Es ergeben sich ferner direct die nachstehenden Schemata für

$$B_1 B_2 = \Pi_2) \ldots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_5 & b_6 & b_4 & c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{45} & c_{56} & c_{46} & c_{16} & c_{26} & c_{36} \end{matrix}$$

und für

$$B_1' B_2' = \Pi_2') \ldots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{46} & c_{45} & c_{56} & c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_6 & b_4 & b_5 & c_{16} & c_{26} & c_{36} \end{matrix}$$

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = \Pi_3) \ldots \begin{matrix} a_1 & b_2 & c_{12} & a_4 & b_5 & c_{45} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ a_2 & b_3 & c_{23} & a_5 & b_6 & c_{56} & c_{25} & c_{26} & c_{24} \\ a_3 & b_1 & c_{13} & a_6 & b_4 & c_{46} & c_{36} & c_{34} & c_{35} \end{matrix}$$

$$\Gamma_1' \Gamma_2' = \Pi_3') \ldots \begin{matrix} a_1 & b_2 & c_{12} & a_4 & b_5 & c_{45} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ a_3 & b_1 & c_{13} & a_5 & b_6 & c_{56} & c_{35} & c_{36} & c_{34} \\ a_2 & b_3 & c_{23} & a_6 & b_4 & c_{46} & c_{26} & c_{24} & c_{25} \end{matrix}$$

Man erkennt sofort, dass $\Pi_2^2 \Pi_2'^2$ ebenso wie $\Pi_3^2 \Pi_3'^2$ die Geraden von F in derselben Weise zu Tripeln ordnet, wie Ω_1, so dass man

$$\Omega_1 = \Pi_2^2 \Pi_2'^2 = \Pi_3^2 \Pi_3'^2$$

setzen kann.

Man kann aber auch Ω_2 noch durch Π_3 und Π_3' und Ω_3 noch durch Π_2 und Π_2' erzeugen. Beachtet man die Anordnung der Geraden in Schema Ω_2) und Ω_3), so findet man, dass auch

$$\Omega_2 = \Pi_3 \Pi_3'^2 \text{ und } \Omega_3 = \Pi_2^2 \Pi_2'$$

sich ergibt. Zusammenfassend haben wir also:

4)
$$\begin{aligned} \Omega_1 \quad . \quad &= \Pi_2^2 \Pi_2'^2 = \Pi_3^2 \Pi_3'^2 \\ \Omega_2 = \Pi_1 \Pi_1' \quad . \quad &= \Pi_3 \Pi_3'^2 \\ \Omega_3 = \Pi_1^2 \Pi_1' = \Pi_2^2 \Pi_2' \end{aligned}$$

wobei der Symmetrie halber statt Π und Π' gesetzt wurde Π_1 und Π_1'. Diese Relationen erlauben auch die ternär-planare Collineation durch Ω_1, Ω_2, Ω_3 auszudrücken.

Digitized by Google

Es folgt nämlich aus

$$\Omega_2^2 = \Pi_1^2\,\Pi_1'^2 \text{ und } \Omega_3 = \Pi_1^2\,\Pi_1'$$

da Π_1 und Π_1' gegeneinander vertauschbar sind und $\Pi_1^3 = \Pi_1'^3 = 1$ ist,

$$\Omega_2^2\,\Omega_3 = \Omega_3\,\Omega_2^2 = \Pi_1.$$

Analog ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Omega_2^2\,\Omega_3 & \Pi_1' &= \Omega_2^2\,\Omega_3^2 \\ \Pi_2 &= \Omega_1\,\Omega_3 & \Pi_2' &= \Omega_1\,\Omega_3^2 \\ \Pi_3 &= \Omega_1\,\Omega_2^2 & \Pi_3' &= \Omega_1\,\Omega_2 \end{aligned} \qquad 5)$$

Hiebei folgt aus der Vertauschbarkeit von Π_1, Π_1' sowie von Π_2, Π_2' und Π_3, Π_3' dass die drei Operationen Ω_1, Ω_2, Ω_3 gegeneinander vertauschbar sind, was sich übrigens auch aus der Lage der drei Paar Leitstrahlen von Ω_1, Ω_2. Ω_3 ergiebt.

§. 24. Hieraus folgert man, dass die ganze Gruppe der durch Ω_1, Ω_2, Ω_3 erzeugten Operationen außer den drei cyklischen Gruppen, welche ihre Potenzen bilden, den sechs ternär-planaren der Gleichungen 5) nur noch 2×4 ternäre Collineationen liefert, die sich als centrale erweisen mit den Centren in den Ecken des obigen von den Leitstrahlen der Ω_1, Ω_2, Ω_3 gebildeten Fundamentaltetraeders. Es folgt dies zuerst daraus, dass die Relationen 5) und ihre Quadrate die Producte der Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_1^2, Ω_2^2, Ω_3^2 zu zwei verschiedenen erschöpfen. Die Producte zu dreien verschiedenen:

$$\Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3 \quad \Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3^2 \quad \Omega_1\,\Omega_2^2\,\Omega_3 \quad \Omega_1^2\,\Omega_2\,\Omega_3$$

und ihre Quadrate

$$\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,\Omega_3^2 \quad \Omega_1^2\,\Omega_2^2\,\Omega_3 \quad \Omega_1^2\,\Omega_2\,\Omega_3^2 \quad \Omega_1\,\Omega_2^2\,\Omega_3^2$$

erschöpfen dann alle Combinationen der Ω_i zu dreien.

Um die Art dieser Collineationen zu bestimmen, bemerken wir, dass Ω_1, Ω_2, Ω_3 die Geraden der F so ineinander überführen, dass die drei Gruppen von neun Geraden, welche je ein Paar Gegenseiten des Tetraeders schneiden, in sich verwandelt werden.

Schreibt man die Gruppen nämlich in der folgenden Weise an:

$$\text{I.}\ \begin{matrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ c_{23} & c_{12} & c_{13} \\ b_1 & b_3 & b_2 \end{matrix} \qquad \text{II.}\ \begin{matrix} a_4 & b_4 & c_{56} \\ a_5 & b_5 & c_{46} \\ a_6 & b_6 & c_{45} \end{matrix} \qquad \text{III.}\ \begin{matrix} c_{14} & c_{84} & c_{24} \\ c_{15} & c_{35} & c_{25} \\ c_{16} & c_{36} & c_{26} \end{matrix}$$

so bilden für Ω_1 die Geraden von II in verticaler, für Ω_3 in horizontaler Richtung Tripel. In der folgenden Tabelle ist durch Pfeile

Digitized by Google

unter der Colonnenbezeichnung die Richtung angegeben, in welcher die Geraden der einzelnen Gruppen für Ω_1, Ω_2, Ω_3 Tripel bilden.

	I	II	III
Ω_1	·	↓	↓
Ω_1	→	·	→
Ω_3	↓	→	·

Der Punkt bedeutet, dass die Geraden der betreffenden Gruppe mit ihren entsprechenden coïncidieren. Für die Quadrate der Operationen kehren die Pfeile ihren Sinn um.

Wir bemerken ferner, dass Ω_1, Ω_2, Ω_3 und daher auch die ganze aus diesen Operationen abgeleitete Gruppe die vier Ecken des Tetraeders ungeändert lässt. Wir zeigen nun, dass die Combinationen zu drei verschiedenen dieser Operationen auch stets die Punkte einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders ungeändert lassen. Betrachten wir zu diesem Zwecke etwa die Collineation $\Omega_1 . \Omega_2 . \Omega_3$, so gibt nachstehendes Schema die Zuordnung der Geraden an, wie sie durch diese Operation ineinander übergehen, je drei untereinanderstehende bilden einen Cyclus:

$$\begin{array}{rl} & a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ c_{14}\ c_{15}\ c_{16} \\ \Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3)\ldots & c_{12}\ c_{23}\ c_{13}\ b_5\ b_6\ b_4\ c_{35}\ c_{36}\ c_{34} \\ & b_2\ b_3\ b_1\ c_{45}\ c_{56}\ c_{46}\ c_{26}\ c_{24}\ c_{25} \end{array}$$

Die Zuordnung ist nach der obigen Tabelle leicht aufzustellen. So bleibt a_1 durch Ω_1 ungeändert, übergeht in a_2 durch Ω_2 und dieses durch Ω_3 in c_{12} also entspricht der Geraden a_1 vermöge $\Omega_1 . \Omega_2 . \Omega_3$ die Gerade c_{12} u. s. w. Die untereinander stehenden, einen Cyclus bildenden Geraden der Fläche gehen aber stets durch einen der 18 Tripelpunkte und zwar sind die hier auftretenden die Punkte α_1, α_2, α_3, β_1', β_2', β_3', γ_1, γ_2, γ_3, diese müssen also Coïncidenzpunkte der Collineation $\Omega_1 . \Omega_2 . \Omega_3$ sein, mithin bleiben die Punkte ihrer Ebene, d. i. der Ebene der Geraden $ab'c$ alle ungeändert, diese Collineation ist also eine ternär-centrale Φ mit der Ebene $\overline{ab'c}$ als Collineationsebene und der gegenüberliegenden Ecke 2 als Collineationscentrum, also mit Φ_2 zu bezeichnen.

Ehenso folgt Centrum und Collineationsebene für die drei anderen Producte und zwar wird

$$\Phi_1 = \Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3^2 \quad \Phi_2 = \Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3 \quad \Phi_3 = \Omega_1^2\,\Omega_2\,\Omega_3 \quad \Phi_4 = \Omega_1\,\Omega_2^2\,\Omega_3$$

gesetzt werden können, da es gleichgiltig ist, welche Potenz als die erste aufgefasst wird.

Digitized by Google

§. 25. Wir sind hiedurch zu einer Gruppe g_{27} von 27 Operationen gelangt, welche durch Ω_1, Ω_2, Ω_3 erzeugt wird, in welcher die tricyclischen Gruppen 1 Ω_i Ω_i^2 $(i=1,2,3)$ ausgezeichnete Untergruppen sind. Die 27 Operationen bestehen aus lauter ternären Collineationen (und der Identität), welche alle vier Ecken des erwähnten Tetraeders festlassen, und welche die Geraden der Fläche nur so transformieren, dass die drei Gruppen zu 9, wie sie pag. 147 in I, II, III aufgestellt sind, erhalten bleiben.

§. 26. Die Fläche dritter Ordnung besitzt aber außer diesen Collineationen noch andere, die dieselbe in sich transformieren. So vor allem die 18 central-involutorischen Collineationen, welche den 18 Tripelpunkten zugehören. Durch Combination derselben entstehen dann weitere von den obigen 26 verschiedenen Collineationen. Auch hier zeigt es sich nun, dass man nicht alle Combinationen der A_i, $B_\varkappa$, Γ'_λ zu bilden braucht, um alle von einander verschiedenen Collineationen zu erhalten. Da nämlich wieder jede Gerade, welche zwei Centren verbindet, entweder auf der Fläche liegt oder noch einen dritten Punkt trägt (das erstere ist der Fall, wenn die Operationen durch denselben Buchstaben dargestellt sind, im letzteren Falle treten alle drei Buchstaben auf), so tritt dieselbe Regel für die Änderung der Aufeinanderfolge der Operationen in Kraft, die in §. 13 pag. 131 resp. § 16 pag. 136 aufgestellt wurde, und demgemäß braucht man nur solche Combinationen zu betrachten, welche lauter verschiedenen Buchstaben entsprechen. Hiebei wird kein Buchstabe mit resp. ohne Strich mehr als zweimal auftreten können. Kommen nun alle drei Buchstaben vor, so kann man vor allem die A_i und $A'_\varkappa$ an die erste Stelle links bringen. Kömmt beim Fortrücken nach rechts zuerst nach B_λ die Operation Γ_μ auszuführen, oder umgekehrt, so kann man $B_\lambda \Gamma_\mu$ ersetzen durch $A'_\nu B_\lambda$ resp. $A'_\nu \Gamma_\mu$ und A'_ν nun vor alle B bringen, wo es sich unter die A und A' einschiebt. Verfährt man weiter so, so kann man alle Γ oder alle B zum Verschwinden bringen, so dass die Operation den Typus annimmt $A'_i A'_\varkappa A_i A_\varkappa B'_\lambda B'_\mu B_\lambda B_\mu$ oder an Stelle der B die Γ hat. Die Indices für die Umsetzung der Operationen ergeben sich aus dem Schema *G*) auf Seite 23, welches die Vertheilung der Tripelpunkte auf die 36 Geraden angibt.

Hiernach erhält man folgende Typen für die Combination der Operationen:

1) Combination zu 1 Operation A_i
2) „ „ 2 Operationen $A_i A'_\varkappa$ und $A_i B_\varkappa$, $A_i \Gamma_\varkappa$
3) „ „ 3 „ $A_i A_\varkappa A'_\lambda$; $A_i A_\varkappa B_\lambda$; $A_i A'_\varkappa B_\lambda$
4) „ „ 4 „ $A_i A_\varkappa A'_\lambda A'_\mu$; $A_i A_\varkappa A'_\lambda B_\mu$
$A_i A_\varkappa B_\lambda B_\mu$; $A_i A'_\varkappa B_\lambda B'_\mu$
5) „ „ 5 „ $A_i A_\varkappa A'_\lambda A'_\mu B_\nu$.

Digitized by Google

Hiebei sind die analogen Combinationen, welche sich bei Vertauschung mit A_i mit $B_\varkappa$ und Γ_ν resp. dieser untereinander ergeben, nicht angegeben, ebenso nicht die anderen Combinationen, die sich auf diese Formen zurückführen lassen.

§. 27. Wir wollen nun der Reihe nach den Charakter dieser Collineationen untersuchen, und die Zahl der Operationen angeben, welche durch sie dargestellt werden.

1. Die 18 Tripelpunkte sind Centren der 18 central-involutorischen Collineationen. Von diesen sind eigentlich nur vier gewisse als Erzeugende aufzufassen, und zwar solche, von denen zwei auf einer der Kanten des Tetraeders, die anderen zwei auf der Gegenkante liegen. Denn das Product solcher vier Operationen ist nach Gleichung (4) eine geschaart-ternäre Collineation, die zur Folge hat, dass noch die übrigen Tripelpunkte auftreten, wie oben gezeigt wurde. Es folgt aus dieser Bemerkung, dass, wenn die drei Tangentialebenen einer Fläche dritter Ordnung F' in drei Tripelpunkten α_1, α_2, α_3 die auf einer Geraden a liegen, sich in **einer** Geraden a' schneiden, dann die Fläche eine geschaart-ternäre Collineation in sich zulässt, also von der eben behandelten Art ist. Denn auf a' müssen sich wieder drei Tripelpunkte befinden, in denen sich die neun Geraden der drei Tripelpunkte α_1, α_2, α_3 schneiden.

2. Combinationen zu zwei Operationen gibt es zwei verschiedene:

α) solche, deren Centren auf einer Geraden der Fläche liegen. Dieselben geben geschaart-involutorische Collineationen, 27 an der Zahl, die als T_{a_i}, T_{b_i} und $T_{c_{ik}}$ zu bezeichnen sind.

β) solche, deren Centren auf den 42 Geraden liegen, welche je drei der Tripelpunkte tragen. Diese geben für jede Gerade als Axe zwei ternär-planare Collineationen, die Potenzen von einander sind. Das gibt $2 \times 42 = 84$ ternär-planare Collineationen.

3. Combinationen zu dreien:

α) Vom Typus $A_i A_\varkappa A'_\lambda$ und analog für B und Γ, resp. A', B', Γ'. Die drei Centren der Operationen haben die Lage, wie sie im § 18 auf Seite 16 sub β) zu Tage trat, nämlich α'_λ ist der Schnittpunkt von drei Geraden der Fläche, von denen zwei die Punkte α_i und $\alpha_\varkappa$ tragen. Es tritt also zu den unter 1) und 2) bereits angeführten Collineationen noch die senäre Collineation $X = A'_\lambda A_i A_\varkappa$ und $X^5 = A_\varkappa A_i A'_\lambda$ auf, deren dritte Potenz die Collineation A'_i ist, während die 2. und 4. Potenz ternär-planare Collineationen sind. Für jeden der 18 Tripelpunkte treten zwei solche senäre Collineationen X auf, was $2 \times 18 = 36$ Operationen von der Art X gibt. X und $X^{-1} = X^5$ gehören zu demselben Tripelpunkt.

β) Vom Typus $A_i A_\varkappa B_\lambda$. Die drei diesen Collineationen zugehörigen Centren liegen in einer Ebene des Fundamental-Tetraeders, speciell in der Ebene durch $a\,b\,c'$, und die Collineation ist

Digitized by Google

daher von der Art, wie sie unter *b)* § 14 pag. 133 als senäre Collineationen Ψ charakterisiert wurden. Ihre dritte Potenz ist eine centrale involutorische Collineation, ihr Quadrat und ihre vierte Potenz sind central-ternäre Collineationen, deren Centrum, der Ebene durch $\alpha_i\, \alpha_\varkappa\, \beta_\lambda$ gegenüberliegt, und die wir mit $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ bezeichnet haben, die sich, wie unter 4) § 14 gezeigt wurde, als Product von vier central-involutorischen Collineationen darstellen lassen, und die hier infolge dessen außer Betracht bleiben sollen. Es bleiben also nur die senären Collineationen Ψ und $\Psi^5 = \Psi^{-1}$ übrig, welche dem obigen Typus entsprechen. Da in jeder Ebene des Fundamentaltetraeders wie ebendort gezeigt wurde $2 \times 9 = 18$ solcher Collineationen existiren, so gibt es $18 \times 4 = 72$ senäre Collineationen, von der Art Ψ. Ihre dritten Potenzen sind centrale Collineationen, deren Centren in die 18 Tripelpunkte fallen. Jeder Tripelpunkt ist Centrum für zwei derselben und für ihre fünften Potenzen. Die zwei verschiedenen Collineationen gehören den beiden durch den Tripelpunkt gehenden Ebenen des Fundamentaltetraeders in dem obigen Sinne zu.

γ) Vom Typus $A_i\, A'_\varkappa\, B_\lambda$. Da die Gerade $\alpha_i\, \alpha'_\varkappa$ auf F liegt, und β_λ ein Trippelpunkt ist, der nicht auf a oder a' liegt, so schneidet die Ebene der drei Punkte $\alpha_i\, \alpha'_\varkappa\, \beta_\lambda$ aus F drei Gerade aus, die ein Dreieck bilden und wir erhalten also in dieser Ebene sechs Tripelpunkte entsprechend den sechs Schnittpunkten der Ebene mit den Kanten des Fundamentaltetraeders. Infolge dessen haben wir den im § 16 unter α) auf Seite 135 behandelten Fall und erkennen, dass die Collineationen vom obigen Typus quaternäre Collineationen Δ sind, deren Quadrate die geschaart involutorischen Collineationen der Flächengeraden sind. Wir haben daselbst gezeigt, dass für jede solche Ebene sich 2×3 Operationen Δ und Δ^3 dieser Art ergeben, von denen jedes Paar eine der Flächengeraden in sich transformiert. Dies gibt für die 27 Ebenen[1]), welche aus F drei ein Dreieck bildende Gerade ausschneiden $6 \times 27 = 162$ quaternäre Collineationen. Zu jeder Geraden gehören den drei Tritalgentialebenen entsprechend 3×2 solcher Collineationen, welche die Gerade in sich transformieren, was wieder $3 \times 2 \times 27 = 162$ von einander verschiedene quaternäre Collineationen gibt.

4. Combinationen von vier Collineationen, sofern sie sich nicht auf weniger Operationen reducieren lassen, sind wie sich vermöge der Tabelle *G)* der 36 Geraden ergibt, bloß vier verschiedene Typen:

α) Operationen vom Typus $A_i\, A_\varkappa\, A'_\lambda\, A'_\mu$. Diese Collineation hat die Form $\Pi_1\, \Pi'_1$ oder $\Pi_1^2\, \Pi'_1$ oder $\Pi_1^2\, \Pi_1'^2$ oder $\Pi_1\, \Pi_1'^2$ und ist daher entweder Ω_2; Ω_3 oder Ω_2^2, Ω_3^2, das Gleiche gilt für die B_i und Γ_i d. h. die Operationen dieses Typus sind die sechs geschaart-ternären Collineationen $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2$.

[1]) Von den 45 Tritangentialebenen der Fläche dritter Ordnung sind 18 Tangentialebenen in den Tripelpunkten.

Digitized by Google

3) Operationen vom Typus $A_i A_\varkappa A'_\lambda B_\mu$. Diese Operationen können auf die Form $A_i A_\varkappa A'_\lambda A'_\nu . A'_\nu B_\mu = \Omega_\varrho^\sigma A'_\nu B_\mu$ gebracht werden, also als Product einer der sechs eben erwähnten ternär-geschaarten und einer der 72 ternär-planaren Collineationen, deren Axen die 36 Geraden der Tabelle *G)* auf Seite 23 sind. Die Collineation möge mit Θ bezeichnet werden, sie erweist sich von der Periode 9. Wir betrachten zu diesem Zwecke speciell die Collineation $\Theta = \Omega_2 A'_1 B_1 = A'_1 B_1 \Omega_1$.[1])

$$\Theta^2 = A'_1 B_1 \Omega_1 \Omega_2 A'_1 B_1 = A'_1 B_1 . \Pi'_3 . \Gamma_2 A'_1 = A'_1 B_1 \Pi'_3 \Pi_3^2 . \Gamma_1 A'_1 =$$
$$= A'_1 B_1 \Omega_2^2 \Gamma_1 A'_1 = A'_1 B_1 \Gamma_1 A'_1 \Omega_1^2 = \Gamma_2 B_3 \Omega_1^2 = \Omega_3 \Gamma_2 B_3$$
$$\Theta^3 = \Theta^2 . \Theta = \Gamma_2 B_2 \Omega_1^2 \Omega_2 A'_1 B_1 = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3^2 = \Phi_1$$
$$\Theta^4 = \Theta^2 . \Theta^2 = \Gamma_2 B_3 \Omega_1^2 . \Omega_3 \Gamma_2 B_3 = \Gamma_2 B_3 B'^2 = \Gamma_2 B_1 \Omega_1 \Gamma_2 B_3 =$$
$$= A'_1 B_3 \Omega_2$$
$$\Theta^5 = \Theta^4 . \Theta = A'_1 B_3 \Omega_2^2 . A'_1 B_1 = \Gamma_1 B_1 \Omega_1^2$$
$$\Theta^6 = \Theta^3 . \Theta^3 = \Phi_1^2$$
$$\Theta^7 = \Theta^5 . \Theta^2 = \Gamma_1 B_1 \Omega_1^2 . \Omega_3 B_3 A'_2 = \Gamma_1 B_1 B'^2 B_3 A'_2 =$$
$$= \Gamma_1 B_1 \Omega_3^2 B_1 A'_2 = \Gamma_1 A'_2 \Omega_1$$
$$\Theta^8 = \Theta^7 . \Theta = \Gamma_1 A'_2 \Omega_1 \Omega_2 A'_1 B_1 = \Gamma_1 A'_2 \Pi'_3 \Gamma_2 A'_1 = \Gamma_1 A'_2 \Omega_2^2 \Gamma_1 A'_1 =$$
$$= B_2 A'_1 \Omega_1^2$$
$$\Theta^9 = \Theta^8 . \Theta = \Omega_3 B_2 B_1 \Omega_1 = \Omega_3 \Pi_2^2 \Omega_1 = \Omega_3 \Omega_1^2 \Omega_3^2 \Omega = 1.$$

Hiebei wurde wiederholt Gebrauch gemacht von den Transformationen der Ω_i durch die $A_i, B_\varkappa \ldots$ wie sie in der Note angegeben sind, sowie von den Relationen zwischen $A_i, B_\varkappa$ und $B_\varkappa, \Gamma'_\lambda$ oder Γ'_ν, A_i, welche sich aus dem Schema *G)* auf Seite 144 leicht ergeben, und von den Gleichungen (4) und (5).

Die Geraden der Fläche gruppieren sich vermöge der Potenzen von Θ zu drei Gruppen von neun Geraden, wie sich aus dem Schema *T)* auf Seite 144 leicht ergibt, folgendermaaßen:

---

[1]) Man findet leicht, dass $\Omega_1 A_i = A_i \Omega_1$ ist aus den beiden Formen für Ω_1 Gleichungen 4) auf Seite 146. Es ist nämlich etwa $\Omega_1 A_1 = B_1 B_3 B'_1 B'_3 A_1 = A_1 \Gamma'_1 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_1 = A_1 \Omega_1$, was aus dem Schema der 36 Geraden *G)* sich ergibt, da z. B. $B'_3 A_1 = A_1 \Gamma_1$ u. s. w. ist. Auch die übrigen folgenden Relationen ergeben sich leicht:

$\Omega_1 A_i = A_i \Omega_1$	$\Omega_2 A_i = A_i \Omega_3$	$\Omega_3 A_i = A_i \Omega_2$
$\Omega_1 A'_i = A'_i \Omega_1$	$\Omega_2 A'_i = A'_i \Omega_3^2$	$\Omega_3 A'_i = A'_i \Omega_2^2$
$\Omega_1 B_i = B_i \Omega_3^2$	$\Omega_2 B_i = B_i \Omega_2$	$\Omega_3 B_i = B_i \Omega_1^2$
$\Omega_1 B'_i = B'_i \Omega_3$	$\Omega_2 B'_i = B'_i \Omega_2$	$\Omega_3 B'_i = B'_i \Omega_1$
$\Omega_1 \Gamma_i = \Gamma_i \Omega_2$	$\Omega_2 \Gamma_i = \Gamma_i \Omega_1$	$\Omega_3 \Gamma_i = \Gamma_i \Omega_3$
$\Omega_1 \Gamma'_i = \Gamma'_i \Omega_2^2$	$\Omega_2 \Gamma'_i = \Gamma'_i \Omega_1^2$	$\Omega_3 \Gamma'_i = \Gamma'_i \Omega_3$

d.h. Ω_1 ist mit den Operationen A_i, A'_i; Ω_2 mit B_i, B'_i und Ω_3 mit Γ_i, Γ'_i vertauschbar, während die Gruppe g_{27} der $\Omega_1^\nu \Omega_2^\varkappa \Omega_3^\lambda$ mit allen $A_i B_\varkappa \Gamma_\nu$ vertauschbar ist.

Digitized by Google

$$\Theta)\ldots\begin{matrix} a_1\, c_{26}\, c_{46}\, b_3\, c_{14}\, b_6\, c_{13}\, c_{35}\, a_4 \\ b_2\, c_{15}\, a_6\, c_{23}\, c_{36}\, c_{56}\, a_3\, c_{24}\, b_5 \\ c_{12}\, c_{34}\, b_4\, a_2\, c_{25}\, a_5\, b_1\, c_{16}\, c_{45} \end{matrix}$$

so dass jede Zeile einen Cyclus von 9 vorstellt.

Um die Anzahl verschiedener Collineationen Θ zu bestimmen, bemerke man, dass Θ sich übersichtlicher unter Zuhilfenahme von Ω_1, Ω_2, Ω_3 und ihrer Potenzen ausdrücken lässt. Man hat etwa

$$\Theta = \Omega_2\, A_1'\, B_1 = \Pi_1\, \Pi_1'\, A_1'\, B_1 = \Pi_3\, \Pi_3'^2\, A_1'\, B_1$$

und wenn man auf die Gleichungen 4) Seite 146 Rücksicht nimmt und statt $A_1'\, B_1 = \Gamma_2\, A_1'$ einführt, wird:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Pi_1 . A_3'\, B_1 = \Pi_1\, \Pi_1'^2\, A_2'\, B_1 = \Omega_3^2\, A_2'\, B_1 = A_2'\, B_1\, \Omega_2^2 \\ &= \Pi_3'^2\, \Gamma_1\, A_1' = \Pi_3'^2\, \Pi_3^2\, \Gamma_3\, A_1' = \Omega_1\, \Gamma_3\, A_1' = \Gamma_3\, A_1'\, \Omega_3^2 \end{aligned}$$

und schon früher ergab sich $\Theta = \Omega_3\, A_1'\, B_1 = A_1'\, B_1\, \Omega_1$.

Da nun die sechs Collineationen Ω_i^ν $(\nu = 1, 2, i = 1, 2, 3)$ mit den 72 geschaart-ternären $A_\varkappa\, B_\lambda$ verbunden 6×72 Producte von der Form $\Omega_i^\nu\, A_\varkappa\, B_\lambda$ und ebensoviele von der Form $A_\varkappa\, B_\lambda\, \Phi_i^\nu$ geben, je sechs dieser Producte aber dieselbe Collineation Θ darstellen, so sind $\frac{2 \times 6 \times 72}{6} = 144$ nonärer Collineationen Θ vorhanden, welche F in sich überführen. Hievon sind je sechs die 1., 2., 4., 5., 7. und achter Potenz einer unter ihnen. Diese bilden mit einer der ternär-centralen Collineation Φ_i und Φ_i^2 einen Cyclus von 8 Collineationen. Es existieren 24 Collineationen Θ, die nicht Potenzen von einander sind, zu jedem Φ_i gehören sechs solche Collineationen Θ deren dritte und sechste Potenzen Φ_i und Φ_i^2 sind.

γ) Operationen vom Typus $A_i\, A_\varkappa\, B_\lambda\, B_\mu$. Die vier Centren liegen in einer der vier Ebenen des Fundamentaltetraeders und geben, sofern sie sich nicht auf zwei Operationen reducieren lassen wie unter *b)* §. 14 gezeigt wurde, eine central-ternäre Collineation, die wir schon mit $\Phi_\varkappa^\nu$ bezeichneten. Wir erhalten also die acht central-ternären Collineationen $\Phi_\varkappa^\nu$ $(\varkappa = 1, 2, 3, 4, \nu = 1, 2)$.

δ) Operationen vom Typus $A_i\, A_\varkappa'\, B_\lambda\, B_\mu'$. Wir bezeichnen diese Collineationen mit P und zeigen, dass sie von der Periode sechs sind. Da sowohl $A_i A_\varkappa'$ als $B_\lambda\, B_\mu'$ geschaart involutorische Collineationen sind, die zu Geraden der Fläche gehören, so wird in dem Falle, dass sich die beiden entsprechenden Geraden schneiden, nach §. 18, 1) Seite 136 ihr Product wieder ein geschaart-involutorisches sein. Wollen wir also eine Collineation erhalten,

Digitized by Google

die sich nicht durch weniger als vier Operationen darstellen lässt, so müssen wir dafür sorgen, dass sich die beiden Geraden nicht schneiden. Wir wählen als Beispiel:

$$P = T_{b_2}\, T_{b_4} = A_1\, A_2'\, B_1\, B_3' = B_1\, \Gamma_1'\, \Gamma_3\, B_3' = B_1\, B_3'\, A_3'\, A_3 = B_3'\, B_1\, A_3'\, A_3$$
$$P^2 = A_1\, A_2'\, A_3'\, A_3 = \Pi_1^2\, \Pi_1' = \Omega_3$$
$$P^3 = A_1\, A_2'\, A_3'\, A_3 . A_1\, A_2'\, B_1\, B_3' = A_2\, A_1'\, B_1\, B_3' = T_{a_2}\, T_{b_4} = T_{c_{24}} = \Gamma_2\, \Gamma_3'$$
$$P^4 = \Omega_3^2$$
$$P^5 = P^3 . P^2 = B_1\, B_3'\, A_1'\, A_2 . A_1\, A_3\, A_1'\, A_2' = B_1\, B_3' . A_1\, A_2' = T_{b_4}\, T_{b_2}$$
$$P^6 = 1$$

und sehen, dass die dritte Potenz der Collineation P eine geschaart-involutorische ist, während ihre zweite und vierte Potenz je eine geschaart-ternäre Collineation darstellt. Dadurch ist sie wesentlich von den beiden anderen senären Collineationen Ψ und X unterschieden: Die Gerade, welche Leitstrahl der geschaart-involutorischen Collineation P^3 ist, wird auch durch P nur in sich transformiert. Das obige Beispiel von P gibt folgende Transformation der Geraden der Fläche in einander:

Zwei Cyclen von der Ordnung 6:

$$a_1\, b_3\, c_{25}\, a_3\, b_1\, c_{12}$$
$$b_5\, a_6\, c_{46}\, b_6\, a_5\, c_{45}.$$

Zwei Cyclen von der Ordnung 3:

$$a_2\, b_2\, c_{13}$$
$$b_4\, a_4\, c_{56}$$

aus den Geraden, welche c_{24} schneiden und vier Cyclen von zweiter Ordnung

$$c_{14}\, c_{34}, \quad c_{15}\, c_{56}, \quad c_{16}\, c_{35}, \quad c_{26}\, c_{25}.$$

Die Lage dieser Cyclen gegenüber der festen Geraden c_{24} und ihre Bestimmung durch die Geraden b_2 und b_4 möge hier nicht weiter erörtert werden.

Man erkennt, dass zu jeder Geraden auf diese Art zwei der Collineationen P und P^5 zugeordnet sind, für welche P^3 die zugehörige geschaarte Involution ist. Je nachdem nämlich P^2 die Collineation Ω_ν oder Ω_ν^2 ist. Hiebei muss Ω_ν die geschaart-ternäre Collineation sein, welche die eben genannte Gerade der Fläche ungeändert lässt, denn nimmt man eines der beiden anderen Ω, dann lässt sich die Collineation durch weniger als vier Erzeugende darstellen. Setzt man z. B. $P^3 = T_{c_{24}}$ und $P^2 = \Omega_1$, so wird $P^5 = T_{c_{24}}\, \Omega_1 = \Gamma_2\, \Gamma_3' . \Gamma_1\, \Gamma_3 . \Gamma_1'\, \Gamma_3' = \Gamma_1\, \Gamma_2'$.

Demnach treten nur $2 \times 27 = 54$ senäre Collineationen P auf, die paarweise zu einander invers sind.

5. Collineationen, die sich durch nicht weniger als fünf Erzeugende darstellen lassen, gibt es nur solche vom Typus $A_i\, A_\varkappa\, A_\chi'\, A_\mu'\, B_\nu$.

Digitized by Google

Dieselben sollen mit Σ bezeichnet sein, sie lassen sich darstellen in der Form $\Omega_\varkappa^i B_\nu$. Dabei werden dieselben nur dann sich nicht durch weniger als 5 Operationen darstellen lassen, wenn Ω_k die Gruppe der Geraden von F ungeändert lässt, welche das Centrum von B_ν trägt. Denn es ist z. B. $\Omega_1 B_1 = \Pi_2^2 \Pi_2'^2 B_1 = B_2 B_1' B_3'$ nach den Gleichungen (4) auf Seite 146.

Wir betrachten nun etwa die specielle Collineation

$$\Sigma = \Omega_1 A_1 = A_1 \Omega_1 \text{ dann wird}$$
$$\Sigma^2 = \Omega_1^2$$
$$\Sigma^3 = A_1$$
$$\Sigma^4 = \Omega_1$$
$$\Sigma^5 = \Omega_1^2 A_1$$
$$\Sigma^6 = 1.$$

Die Collineationen Σ haben daher die Periode sechs, ihr Quadrat ist eine der ternär-geschaarten Collineationen $\Omega_\varkappa$, ihre dritte Potenz ist eine central-involutorische Collineation.

Die Zahl der verschiedenen Collineationen Σ ergibt sich den 6 geschaart-ternären Collineationen $\Omega_\varkappa^\nu$ entsprechend gleich $6 \times 6 = 36$. Jede der 6 Collineationen $\Omega_\varkappa^\nu$ tritt bei 6 der senären Collineationen als Σ^2 und Σ^4 auf.

Von den Geraden der Fläche bleiben durch Σ die drei Geraden fest, welche sich im Centrum der Collineation Σ^3 schneiden, die übrigen Geraden der Gruppe, welche Σ^2 in sich verwandelt, bilden Cyclen zu zwei, die 18 Geraden der beiden anderen Gruppen auf Seite 147 bilden drei Cyclen zu sechs. Die Collineation $\Omega_1 A_1$ z. B. ordnet die Geraden von F folgendermaßen an. In sich werden transformiert a_1, b_2, c_{12}. Cyclen zu zwei bilden $a_2 b_1$, $a_3 c_{23}$ und $b_3 c_{13}$. In Cyclen zu sechs gruppieren sich

$$\begin{array}{cccccc} a_4 & c_{25} & a_6 & c_{24} & a_5 & c_{26} \\ b_5 & c_{16} & b_4 & c_{15} & b_6 & c_{14} \\ c_{45} & c_{34} & c_{46} & c_{36} & c_{56} & c_{35}. \end{array}$$

§. 28. Hiemit ist die ganze Gruppe von Collineationen erschöpft, welche unsere Fläche F in sich transformieren. Zusammenfassend haben wir:

18 central-involutorische Collineationen $A_i, A_i', B_i \ldots$

27 geschaart-involutorische Collineationen $T_{a_i}, T_{b_i}, T_{c_{ik}}$

84 ternär-planare Collineationen $A_i A_k, A_i B_k \ldots$

36 senäre Collineation X, deren X^2 eine ternär-planare und X^3 eine central involutorische Collineation ist.

72 senäre Collineation Ψ, deren Ψ^2 eine central-ternäre und Ψ^3 eine central-involutorische Collineation ist.

Digitized by Google

162 quaternäre Collineationen Δ, deren Δ^2 eine geschaart-involutorische ist.

6 geschaart-ternäre Collineationen $\Omega_\varkappa^\nu \left(\begin{smallmatrix}\nu=1,2\\ \varkappa=1,2,3\end{smallmatrix}\right)$.

144 nonäre Collineationen Θ, deren Θ^3 eine central-senäre Collineation $\Phi_\varkappa^\nu$ ist.

8 central-ternäre Collineationen $\Phi_\varkappa^\nu \left(\begin{smallmatrix}\nu=1,2\\ \varkappa=1,2,3,4\end{smallmatrix}\right)$

54 senäre Collineationen P, deren P^2 eine geschaart-ternäre, $\Omega_\varkappa^\nu$, und deren P^3 eine der geschaart-involutorischen ist.

36 senäre Collineationen Σ, deren Σ^2 eine geschaart-ternäre $\Omega_\varkappa^\nu$, deren Σ^3 aber eine central-involutorische ist.

Das gibt mit der Identität zusammen 648 Collineationen. Diese Zahl folgt auch aus der Überlegung, dass für alle Collineationen, welche die Fläche F in sich überführen, das Fundamentaltetraeder in sich verwandelt werden muss und ebenso die Tritangentialebenen der F in sich übergehen müssen. Nun ist die F durch das Fundamentaltetraeder und eine Tritangentialebene, welche drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden enthält, vollständig festgelegt. Wird also eine Collineation des Raumes dadurch bestimmt, dass das Tetraeder sich selbst entspricht und eine der Tritangentialebene von F irgend einer anderen, wobei die drei in denselben liegenden Geraden nicht durch einen Punkt gehen dürfen, zugeordnet wird, so muss vermöge dieser Collineation die F in sich übergehen. In jeder Collineationsschaar, welche das Fundamentaltetraeder in sich überführt, gibt es also 27 solche, welche F in sich überführen, entsprechend den 27 Tritangentialebenen, welche drei ein Dreieck bildende Geraden enthalten. Es gibt aber 24 Schaaren solcher Collineationen, die das Fundamentaltetraeder ungeändert lassen, entsprechend den 24 Anordnungen der vier Ebenen desselben, also gibt es $24 \times 27 = 648$ Collineationen, welche F in sich überführen.

Die Gruppe G_{648} der 648 Collineationen ist daher auf die erweiterte Gruppe des Tetraeders [1]) isomorph bezogen mit einer 27fachen Meriedrie. Jeder Untergruppe der Tetraedergruppe entspricht daher eine Untergruppe der Gruppe G_{648}. Insbesondere entspricht der Identität eine ausgezeichnete Untergruppe g_{27} in G_{648}, dieselbe wird erzeugt von den drei geschaart-ternären Collineationen Ω_1, Ω_2, Ω_3. Es folgt dies auch daraus, dass die so erzengte Gruppe mit den erzeugenden Collineationen A_i, A_i', $B_i B_i'$, Γ_i, Γ_i' vertauschbar ist, wie auf Seite 152 in der Fußnote gezeigt wurde, so dass also die Gruppe g_{27} auch mit allen Operationen von G_{648} vertauschbar ist, da diese durch die $A_1, A_2 \ldots$ erzeugt wird.

Der in der erweiterten Tetraedergruppe ausgezeichneten Untergruppe der 12 Tetraederdrehungen entspricht in G_{648} die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe g_{324} der paaren

[1]) Cfr. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 14 und 20, resp. 23.

Digitized by Google

Collineationen von 324 Operationen, die sich aus einer geraden Anzahl der erzeugenden Collineationen $A, B \ldots$ zusammensetzt und zwar aus den

27 geschaart-involutorischen Collineationen $T_{a_i}, T_{b_k}, T_{c_{ik}}$,
84 ternär-planaren Collineationen $A_i A_\varkappa$, $A_i B_\varkappa \ldots$
6 ternär-geschaarten Collineationen $\Omega_\varkappa^\nu \left(\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2\\ \varkappa = 1, 2, 3\end{smallmatrix}\right)$
144 nonären Collineationen Θ,
8 ternär-centralen Collineationen $\Phi_\varkappa^\nu \left(\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2\\ \varkappa = 1, 2, 3\end{smallmatrix}\right)$
54 senären Collineationen P.

und aus der Identität.

Diese Untergruppe g_{324} gibt mit irgend einer der central-involutorischen Collineationen (Spiegelungen im weiteren Sinne nach Klein) die ganze Gruppe G_{648}. Auf die weitere formale Zergliederung der Gruppe nach diesem Principe möge hier nicht eingegangen werden.

§. 29. Die Gruppe enthält noch andere Untergruppen, die sich aus der geometrischen Entstehungsweise derselben ergeben. Selbstverständlich bildet jeder Cyclus, der einer der Collineationen seinen Ursprung verdankt, eine Untergruppe.

Es bilden die beiden Collineationen, deren Centrum auf einer Geraden der Fläche liegen, mit der geschaart-involutorischen Collineation dieser Geraden zusammen eine Gruppe von vier Operationen (§ 3). Solcher gibt es daher 27.

Die drei centralen Collineationen, deren Centren auf einer der 42 Geraden liegen, bilden mit den zwei zugehörigen ternär-planaren Collineationen eine Gruppe von sechs Operationen (§ 8). Solcher gibt es daher 42.

Jedem der 18 Tripelpunkte entspricht eine Gruppe von G_{12} 12 Operationen, wie sie im § 18 unter β) Seite 138 definiert wurde, bestehend aus vier central-involutorischen Collineationen, zwei ternär-planaren, drei geschaart-involutorischen, zwei senären Collineationen X und der Identität.

Jeder der 27 Tritangentialebenen von F, welche drei ein Dreieck bildende Geraden enthalten, entspricht eine Gruppe G_{24} von 24 Operationen des §. 16 α), bestehend aus sechs central-, drei geschaart-involutorischen Collineationen, acht ternär-planaren, sechs quaternären Collineationen Δ und der Identität.

Jeder der vier Ebenen des Fundamentaltetraeders entspricht einer Gruppe G_{54} von 54 Operationen des §. 15, bestehend aus neun central-involutorischen, 24 ternär-planaren Collineationen, 18 senären Collineationen Ψ, zwei ternär-centralen Collineationen Φ und Φ^2 und der Identität.

Die weitere Zerlegung dieser aufgezählten Untergruppen ist an den betreffenden citierten Stellen angegeben worden.

Digitized by Google

Es gibt ferner drei Untergruppen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, welche je durch die Operationen A_i, $A'_\varkappa$, resp. B_i, $B'_\varkappa$ oder Γ_i, $\Gamma'_\varkappa$ allein erzeugt werden. Jede enthält 36 Operationen.

Und zwar etwa $\mathfrak{a}$: die sechs central- und neun geschaart-involutorischen A_i, $A'_\varkappa$ und $A_i A'_\varkappa$; die vier ternär-planaren Π_1, Π_1^2, Π'_1 $\Pi_1'^2$ und die beiden daraus hervorgehenden $\Omega_2 = \Pi_1 \Pi'_1$, $\Omega_3 = \Pi_1^2 \Pi'_1$ sowie ihre Quadrate, also bloß vier Operationen, da $\Omega_2 \Omega_3 = \Pi_1^3$ und $\Omega_2^3 \Omega_3 = \Pi_1$ ist. Ferner die 12 senären Collineationen $X = A_i A_\varkappa A'_\lambda$ und die Identität. Die Untergruppe $\mathfrak{a}$ lässt die Geraden der Gruppe I auf Seite 147 in sich übergehen, während die Geraden der Gruppe II und III entweder bloß in der Gruppe oder die ganze Gruppe in die andere verwandelt wird. Analog ist das Verhalten von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Jede der Gruppen enthält eine ausgezeichnete Untergruppe von 18 Operationen, welche den paaren Collineationen entsprechen.

Überdies enthält $\mathfrak{a}$ noch neun Untergruppen von vier Operationen, entsprechend den sechs auf neun Geraden der Fläche liegenden Tripelpunkten, ferner zwei Untergruppen von je sechs Operationen entsprechend den Kanten des Fundamentaltetraeders, und sechs Untergruppen von je 12 Operationen entsprechend den sechs Tripelpunkts-Tangentialebenen.

Man sieht hieraus, wie reichhaltig die Gruppe von 648 Operationen an Untergruppen ist, eine vollständige Aufstellung der Untergruppen erscheint für die Zwecke der vorliegenden Arbeit überflüssig. Es möge diese Fläche in der Folge kurz als äquianharmonische Fläche dritter Ordnung bezeichnet werden.

IV. Collineationen von der Periode vier.

§. 30. Centrale und geschaarte Collineationen von der Periode vier, welche die Fläche dritter Ordnung F in sich überführen, können nicht auftreten.

Da das Quadrat einer quaternären Collineation eine solche von der Periode zwei gibt, so muss F einen oder zwei Tripelpunkte besitzen, je nachdem die involutorische Collineation central oder geschaart ist. Wir wollen die quaternäre Collineation mit ∇ bezeichnen, wenn $\nabla^2 = A$ eine central-involutorische Collineation ist und mit Δ, wenn $\Delta^2 = T$ eine geschaarte darstellt.

a) Die Fläche lässt eine quaternäre Collineation ∇ zu

§. 31. Die Geraden der Fläche werden durch ∇ in Quadrupel geordnet, es bleiben also drei Gerade übrig, von diesen können zwei doppelt durchlaufen, ein Quadrupel vorstellen, die letzte, sie heiße a_1, muss mit ihrer homologen coïncidieren. Da ∇^2 auch a_1 festlässt und central sein soll, so muss auf a_1 ein Tripelpunkt α liegen, b_2 und c_{12} seien die sich daselbst schneidenden Geraden und $\mathfrak{E}$ ihre Ebene. Das oben erwähnte, aus zwei Geraden bestehende Quadrupel kann dann nur $b_2 c_{12}$ sein, von dem ent-

Digitized by Google

weder jede Gerade mit ihrer homologen coincidiert, oder die beiden Geraden entsprechen einander involutorisch.

Es mögen $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$, die vier weiteren Tritangentialebenen von F sein, die durch a_1 gehen und die Geradenpaare $b_3 b_{13}$, $b_4 c_{14}$, $b_5 c_{15}$, $b_6 c_{16}$ enthalten. Diese Ebenen müssen einander in ∇ entsprechen, sie können aber kein Quadrupel bilden. Denn würde vermöge ∇ etwa die Folge $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6$ der Folge $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_3$ entsprechen, so würde durch ∇^2 der Folge $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6$ die Folge $\mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4$ zugeordnet sein, was unzulässig ist, da ∇^2 den Ebenenbüschel durch a_1 ungeändert lässt. Es müssen daher die vier Ebenen zwei Quadrupel, jedes aus einem doppelt durchzulaufenden Ebenenpaar, bilden. Also entspricht der Folge $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$ etwa die Folge $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_6$, $\mathfrak{E}_5$ was stets zulässig, da das Doppelverhältnis $(\mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_5 \mathfrak{E}_6) = (\mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_6 \mathfrak{E}_5)$ ist. Der Wert dieses Doppelverhältnisses, den wir Invariante der F nannten, kann willkürlich gewählt werden.

Da der eine Asymptotenpunkt α auf a_1 ein Tripelpunkt ist, der andere σ aber keiner, so müssen die Tangentialebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ von F in diesen Punkten vermöge ∇ sich selbst entsprechen, d. h. es müssen die Gleichheiten

$$(\mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_5 \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_6 \mathfrak{E}) \text{ und } (\mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_5 \mathfrak{S}) = (\mathfrak{E}_4 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_6 \mathfrak{S})$$

bestehen, welche aussagen, dass $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ die Deckebenen der Involution sind, deren Paare $\mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4$ und $\mathfrak{E}_5 \mathfrak{E}_6$ sind. Die letzten zwei Doppelverhältnisse, welche die zwei noch vorhandenen Invarianten von F darstellen, sind also bestimmt

In der Polare $\mathfrak{A}$ von α, welche als Collineationsebene für ∇^2 auftritt, wird vermöge ∇ eine involutorische Collineation induciert, deren Centrum ein Wendepunkt w des Schnittes C^3 von $\mathfrak{A}$ und F ist. Die Axe der Collineation ist die Schnittlinie von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}$ und trägt die drei übrigen Asymptotenpunkte σ, σ', σ'' von a_1, b_2, c_{12}. Es entsprechen sich daher in ∇ die Punkte σ' und σ'' selbst, daher auch die Geraden $b_2 = \overline{\alpha\sigma'}$ und $c_{12} = \overline{\alpha\sigma''}$.

Da die vier Tritangentialebenen von F, die durch a_1 oder b_2 oder c_{12} außer $\mathfrak{E}$ noch gehen, Tangenten von C^3 in $\mathfrak{A}$ ausschneiden, und das Quadrupel der Berührungspunkte, welches zu σ oder σ' oder σ'' gehört, stets auf einem Strahlenpaar durch w liegt, so haben die Tritangentialebenen durch b_2 und c_{12} dieselbe Lage gegeneinander, wie die durch a_1, indem die Asymptotenebenen Deckebenen der Involution sind, die durch zwei Paare der Tritangentialebenen bestimmt ist. Auch das Doppelverhältnis der vier Tritangentialebenen ist, nach einem bekannten Satze über ebene Curven dritter Ordnung, für alle drei Geraden dasselbe.

Da die Ebenen $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_4$ einander in ∇ entsprechen, so muss der Geraden b_3 eine Gerade in $\mathfrak{E}_4$, wir nennen sie b_4, entsprechen und dieser wieder eine Gerade in $\mathfrak{E}_3$. Diese letztere kann nicht b_3 sein, denn dann müssten sich auch c_{13} und c_{14} in-

Digitized by Google

volutorisch entsprechen und vermöge ∇^2 würden also b_3 und b_4, c_{13} und c_{14} Coïncidenzgeraden sein, was unmöglich ist, da in ∇^2 sich b_3 und c_{13} sowie b_4 und c_{14} entsprechen. Es muss also vermöge ∇ das Quadrupel $b_3 b_4 c_{13} c_{14}$ und ganz analog auch das Quadrupel $b_5 b_6 c_{15} c_{16}$ entstehen.

Hiedurch ist die Anordnung der zehn Geraden, welche a_1 schneiden, gegeben und die Gruppierung der 16 übrigen Geraden von F ergibt sich einfach dadurch, dass jede derselben fünf von den zehn Geraden schneidet. Wir erhalten folgende Quadrupel:

$$\nabla) \quad \begin{array}{cccccccc} a_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & b_5 & a_2 & a_3 & a_4 & c_{34} \\ & & & b_4 & b_6 & c_{46} & c_{26} & a_5 & c_{45} \\ & & & c_{13} & c_{15} & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{56} \\ & & & c_{14} & c_{16} & c_{35} & a_6 & c_{25} & c_{36} \end{array}$$

Je vier untereinander stehende Geraden bilden ein solches.

∇ ist durch centrale Collineationen nicht erzeugbar.

§. 32. Dass umgekehrt F, welche einen Tripelpunkt α besitzt mit der Tangentialebene $\mathfrak{E}$, in welcher die drei Geraden a_1, b_2, c_{12} sich befinden sollen, und für die vier übrigen Tritangentialebenen der Geraden a_1, sowie der zweiten Asymptotenebene die Gleichungen

$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_6\, \mathfrak{E})$$
$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_6\, \mathfrak{S})$$

bestehen, eine Collineation ∇ von der Periode vier in sich zulässt, möge hier direct gezeigt werden, da die gelegentlich benützte [1]) Raumcurve dritter Ordnung in die Gerade a_1 und einen Kegelschnitt zerfällt und die i. A. zulässige Schlussweise illusorisch wird.

Es seien 3, 4, 5, 6 die Schnittpunkte der in $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$ gelegenen Geraden $b_2\, c_{13}$, $b_4\, c_{14}$, $b_5\, c_{15}$, $b_6\, c_{16}$ von F, dieselben liegen in der Polare $\mathfrak{A}$ von α für F und bilden ein Quadrupel mit dem Tangentialpunkt σ auf C^3 dem Schnitt von $\mathfrak{A}$ mit F. σ ist der Schnittpunkt von a_1 mit $\mathfrak{A}$ und die Ebene $\mathfrak{S}$ schneidet $\mathfrak{A}$ in der Tangente t von C^3 im Punkte σ. Die Schnittlinie von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ enthält die Durchstoßpunkte σ' und σ'' von b_2 und c_{12} mit $\mathfrak{A}$. Zufolge der obigen Gleichungen werden die Geraden t und $\overline{\sigma\, \sigma'\, \sigma''}$ harmonisch getrennt durch die Strahlenpaare $\overline{\sigma\, 3}, \overline{\sigma\, 4}$ und $\overline{\sigma\, 5}, \overline{\sigma\, 6}$, und hieraus folgt nach einem bekannten Satze über ebene Curven dritter Ordnung, dass der Tangentialpunkt von σ ein Wendepunkt w von C^3, und dass $\overline{\sigma\, \sigma'\, \sigma''}$ die Polare von w ist. Infolge dessen gehen auch die Geraden $\overline{3\, 4} = g$ und $\overline{5\, 6} = h$ durch den Wendepunkt w.

[1]) Cfr.: Die Invarianten der allgemeinen Fläche 3. Ordnung. Sitzbr. Wien 1894, pag. 887.

Digitized by Google

Wir bestimmen nun eine Raumcollineation folgendermaßen: Den Ebenen durch a_1 weisen wir wieder Ebenen durch a_1 involutorisch zu, so dass $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ Deckebenen der Involution im Büschel (a_1) sind. $\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4$ und $\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}_6$ werden den obigen Gleichheiten zufolge zwei Paare der Involution sein. Wir weisen ferner den Ebenen durch g nämlich $\overline{g\,b_3}, \overline{g\,b_4}, \overline{g\,c_{13}}$ die Ebenen $\overline{g\,b_4}\ \overline{g\,c_{13}}\ \overline{g\,c_{14}}$ zu, wodurch die Projectivität im Büschel (g) festgelegt ist, so dass $\overline{g\,c_{14}}$ die Ebene $\overline{g\,b_3}$ entspricht, die Projectivität also quaternärcyclisch ist, mit den Deckebenen $\overline{g\,\sigma} = \mathfrak{A}$ und $\overline{g\alpha}$[1]).

Hiedurch ist die Raumcollineation noch nicht vollständig bestimmt. Es sind bloß die Strahlen der linearen Congruenz, deren Leitstrahlen g und a_1 sind cyclisch-quaternär einander zugewiesen. Um die Collineation vollständig zu bestimmen, kann man einer willkürlichen Ebene, welche den Strahl l der Congruenz enthält, eine willkürliche Ebene zuweisen, welche durch l' geht, wenn sich in l' die Ebenen schneiden, die $\overline{a_1\,l}$ resp. $\overline{g\,l}$ nach der obigen Festsetzung zugeordnet sind. Wir erkennen sofort, dass der Strahl $\overline{\alpha\,w}$, als Schnitt der sich selbst entsprechenden Ebenen $\overline{g\,\alpha}$ und $\mathfrak{S}$, sich selbst entspricht und setzen fest, dass einer beliebigen Ebene durch $\overline{\alpha\,w}$ diese selbst entsprechen soll. Daher entsprechen sich alle Ebenen des Büschels durch $\overline{\alpha\,w}$ selbst und die Collineation ist nun vollständig bestimmt.

In dieser Beziehung entsprechen die Geraden a_1, b_2 und c_{12} sich selbst, ebenso die C^3, in der $\mathfrak{A}$ die F schneidet, und den Geraden b_3, b_4, c_{13}, c_{14} entsprechen b_4, c_{13}, c_{14}, b_3, also entspricht auch F sich selbst. Die Collineation ∇ ist cyclisch von der Periode vier und ihr Quadrat ist die centrale Collineation mit α als Centrum und $\mathfrak{A}$ als Ebene.

Hätten wir statt $\overline{g\,b_4}$ die Ebene $\overline{g\,c_{14}}$ der $\overline{g\,b_3}$ zugeordnet, so hätten wir ∇^3 als Collineation erhalten.

Da für eine solche Fläche das Doppelverhältnis $(\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}_6)$ willkürlich ist, so gibt es ∞^1 von einander projectiv

[1]) Es mögen die Schnittpunkte von $b_3 c_{13}$, $b_4 c_{14}$, $b_5 c_{15}$, $b_6 c_{16}$ mit a_1 bezeichnet werden durch $\beta_3\,\beta_3'$, $\beta_4\,\beta_4'$, $\beta_5\,\beta_5'$, $\beta_6\,\beta_6'$ dann bilden diese Paare der Involution, deren Deckpunkte α und σ sind. Denken wir uns die Beziehung auf einen Kreis so gebracht, dass α und σ die imaginären Kreispunkte werden, und dem $\beta_i\,\beta_i'$ die Punkte i und i' zugehören, dann gehen $\overline{33'}$, $\overline{44'}$, $\overline{55'}$, $\overline{66'}$ durch den Mittelpunkt μ des Kreises und der Strahlenbüschel $\mu\,3$, $\mu\,4$, $\mu\,5$, $\mu\,6$, $\mu\,\alpha$, $\mu\,\sigma$ ist projectivisch zum Ebenenbüschel $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$. Zufolge der obigen Gleichheiten sind also $\mu\,\alpha$ und $\mu\,\sigma$ Deckstrahlen einer Involution, deren Paare $\mu\,3$ $\mu\,4$ und $\mu\,5$ $\mu\,6$ sind. Es stehen also $\mu\,3$ und $\mu\,4$ auf einander senkrecht. die Punkte $3\,4\,3'\,4'$ bilden also die Ecken eines Quadrates und in der Projectivität $3\,4\,3'\ldots\ \overline{\wedge}\ 4\,3'\,4'\ldots$ entspricht dem Punkte $4'$ der Punkt 3 und α, σ sind die Deckpunkte der Projectivität. Daher besteht auf a_1 die Projectivität $\beta_3\,\beta_4\,\beta_3'\,\beta_4'\ \alpha\,\sigma\ \overline{\wedge}\ \beta_4\,\beta_3'\,\beta_4'\,\beta_3\ \alpha\,\sigma$ und der diese Punkte projicierenden Ebenenbüschel (g) besitzt dieselbe Beziehung.

Digitized by Google

verschiedene Flächen dritter Ordnung, die eine ∇ in sich zulassen.

§. 33. Einer Fläche F mit der zulässigen Collineation ∇ kann man daher noch eine Bedingung auferlegen bezüglich ihrer Invarianten.

Man kann etwa verlangen, dass sie noch einen Tripelpunkt besitzt. Dieser kann auf b_2 oder c_{12} nicht auftreten. Denn würden sich auf b_2 etwa a_3 und c_{23} schneiden, dann müssten die diesen vermöge ∇ zugeordneten Geraden c_{26}, a_6 sich auch auf b_2 schneiden, dieses also drei Tripelpunkte enthalten, was unzulässig ist.

Ein Tripelpunkt kann also nur auf den übrigen 24 Geraden auftreten. Da aber von den drei Geraden eines Tripelpunktes stets eine a_1 trifft, so genügt es dem Tripelpunkt auf eine der acht letzteren Geraden vorauszusetzen. Es mögen etwa auf b_3 sich a_2 und c_{23} schneiden. Dann ist auch

$b_3\ a_2\ c_{23}$ ein Tripelpunkt β und vermöge ∇ also auch
$b_4\ c_{46}\ a_6$ " " α'
$c_{13}\ b_1\ a_3$ " " γ,
$c_{14}\ c_{35}\ c_{26}$ " " α''.

Es liegen, wie man leicht erkennt, α, β, γ und $\alpha, \alpha', \alpha''$ auf einer Geraden. Dagegen liefert die Gerade $\overline{\beta\alpha'}$ einen weiteren Tripelpunkt γ'', in welchen sich

$c_{15}\ c_{24}\ c_{36}$ schneiden, denen vermöge ∇ entsprechen
$c_{16}\ c_{25}\ c_{34}$
$b_5\ a_4\ c_{45}$
$b_6\ a_5\ c_{56}$,

welche Geraden sich wieder den Tripelpunkten β'', β', γ' schneiden mögen. Wir erhalten hiedurch neun Tripelpunkte, die auf folgenden 12 Geraden liegen:

$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \alpha'\ \alpha''$	$\alpha\ \beta'\ \gamma''$	$\alpha\ \beta''\ \gamma'$
$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	$\beta\ \beta'\ \beta''$	$\alpha'\ \beta''\ \gamma$	$\alpha'\ \beta\ \gamma''$
$\alpha''\ \beta''\ \gamma''$	$\gamma\ \gamma'\ \gamma''$	$\alpha''\ \beta'\ \gamma$	$\alpha''\ \beta\ \gamma'$

und die neun Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung darstellen, die durch die Ebene $\alpha\, w\, \beta = \mathfrak{F}$ aus F ausgeschnitten wird. Nach dem Satze des §. 12 pag. 130 besitzt also unsere F eine central-tricyclische Collineation Φ, deren Centrum φ auf $\overline{\sigma\sigma'\sigma''}$ liegt und deren Collineationsebene $\mathfrak{F}$ ist.

Demzufolge wird F außer der Gruppe G_{54} noch die Collineationen in sich zulassen, welche die vorhandene ∇ mit G_{54} erzeugt.

§. 34. Da die Collineation $B\,\nabla\,B$ auch von der Periode vier ist, so gibt es neben ∇ und ∇^3 noch 8×2 andere Collineationen

Digitized by Google

derselben Art, welche F in sich transformieren. Jedes Paar derselben besitzt einen der Tripelpunkte als Fixpunkt, derart, dass das Quadrat derselben die Collineation ist, deren Centrum dieser Fixpunkt ist. So ist, da $B\nabla B.B\nabla B = B.A.B = \Gamma$ ist, der Tripelpunkt γ der Fixpunkt für $B\nabla B$. Wir wollen die Collineation durch diesen Fixpunkt unterscheiden und setzen $B\nabla_\alpha B = \nabla_\gamma$, indem wir statt des bisherigen ∇, dessen Fixpunkt α ist, ∇_α schreiben. Es folgt selbstverständlich: $\nabla_\alpha = B\nabla_\gamma B$ also auch $\nabla_\alpha = \Gamma\nabla_\beta\Gamma = A'\nabla_{\alpha''}A' = A''\nabla_{\alpha'}A''$ u. s. w.; so dass jede der Collineationen ∇ auf 8 verschiedene Arten darstellbar ist.

Die Collineationen ∇ sind mit Φ vertauschbar, denn sie lassen sowohl $\mathfrak{F}$ als φ ungeändert. Daher ist die Collineation $\nabla\Phi = \Phi\nabla = N$ von dem Cyclus 12. Und zwar treten zwei Gruppen von 12 Geraden der F auf und eine Gruppe von drei Geraden, welche viermal durchlaufen, den Cyclus gibt. Es ist leicht zu sehen, dass diese Gruppe von drei Geraden diejenigen sind, welche dem Fixpunkt von ∇ zugehören. Denn ∇ lässt diese Geraden ungeändert, während sie Φ cyclisch vertauscht. Wir bezeichnen auch N mit dem Fixpunkt. Mit Rücksicht auf die im §. 14 eingeführte Bezeichnung erhält man nun

$$N_\alpha = \Phi\nabla_\alpha,\ N_\alpha^2 = \Phi^2 A = \Psi_\alpha,\ N_\alpha^3 = \nabla_\alpha^3,\ N_\alpha^3 = \Phi,\ N_\alpha^6 = \Psi_\alpha^3 = A.$$

Entsprechend den 9 Tripelpunkten erhalten wir daher neun Collineationen N und ihre Potenzen. Da nur die 1., 5., 7. und 11. Potenz Collineationen von der Periode 12 sind, so gibt das $4\times 9 = 36$ Collineationen dieser Art. Diess stimmt auch mit der Anzahl von einander verschiedener Producte $\Phi^\nu\nabla_\alpha^\varkappa$, ($\nu = 1, 2$, $\varkappa = 1, 3$; α hat neun verschiedene Werte), die Collineationen vom Index 12 liefern, überein.

Außer den oben erwähnten $2\times 9 = 18$ quaternären ∇ und diesen $4\times 9 = 36$ duodecenären N treten zu G_{54} keine Collineationen mehr. Die vorliegende Fläche lässt also eine Gruppe G_{108} von 108 Collineationen in sich zu, die durch

$$N_\alpha^n,\ B N_\alpha^n,\ \Gamma N_\alpha^n,\ A' N_\alpha^n,\ B' N_\alpha^n,\ \Gamma' N_\alpha^n,\ A'' N_\alpha^n,\ B'' N_\alpha^n,\ \Gamma'' N_\alpha^n.$$
$$n = 0, 1, \ldots . 11$$

dargestellt wird, hiebei ist N_α irgend eine der Collineationen von der Periode 12, deren Fixpunkt nicht mehr benützt wird für die acht centralen Collineationen. Es sind thatsächlich die 108 Operationen von einander verschieden da $N_\alpha^\varkappa$ nie eine planare tricyclische Collineation darstellt.

Anmerkung. Da die vorliegende Fläche mit der Gruppe G_{108} projectivisch bestimmt ist, so haben ihre Invarianten numerische Werte, die sich leicht angeben lassen. Man bemerke, dass für eine beliebige Fläche dritter Ordnung die Beziehung

Digitized by Google

$a_1\,(b_3\,b_4\,b_5\,b_6)\,\overline{\wedge}\,b_2\,(a_3\,a_4\,a_5\,a_6)$ besteht. (Unter dieser Bezeichnung die Ebenen durch a_1 und die Geraden b_3, b_4, b_5, b_6 verstanden). Man erkennt die Richtigkeit sofort daraus, dass die beiden Büschel etwa die Gerade b_1 in den Schnittpunkten von c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16} resp. $a_3\,a_4\,a_5\,a_6$ treffen und diese Punktepaare einer Involution sind.

Für die vorliegende Fläche existiert eine Collineation Φ von der Periode drei, $\Phi = (B\,\nabla_a)^4$, welche die Geraden der Fläche in nachstehender Weise zu Tripeln ordnet:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ b_2 & b_3 & b_1 & c_{45} & c_{56} & c_{46} & c_{26} & c_{24} & c_{25} \\ c_{12} & c_{23} & c_{13} & b_5 & b_6 & b_4 & c_{35} & c_{36} & c_{34}. \end{array}$$

Infolge dessen wird der Büschel $b_2\,(a_3\,a_4\,a_5\,a_6)$ durch Φ^2 übergehen in $a_1\,(c_{13}\,b_5\,b_6\,b_4)$ und aus

$$a_1\,(b_3\,b_4\,b_5\,b_6)\,\overline{\wedge}\,b_2\,(a_3\,a_4\,a_5\,a_6)\,\overline{\wedge}\,a_1\,(c_{13}\,b_5\,b_6\,b_4)$$

folgt $a_1\,(b_3\,b_4\,b_5\,b_6)\,\overline{\wedge}\,a_1\,(c_{13}\,b_5\,b_6\,b_4)$ woraus sofort das Doppelverhältnis der vier Ebenen $(\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}_6) = \varepsilon$ sich ergibt, für $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$; Für die zwei anderen Invarianten folgt:

$$(\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}) = \sqrt{\varepsilon} \quad (\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{S}) = -\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Da die Gerade a_1 einen Tripelpunkt besitzt, sind nämlich bloß drei Invarianten vorhanden. Alle Geraden von F haben dieselben Invarianten, da es stets Collineationen in G_{108} gibt, die zwei beliebige Gerade von F in einander überführen.

b) Die Fläche lässt eine quaternäre Collineation Δ zu.

§. 35. Es sei a_1 die Gerade, welche durch Δ in sich übergeht, dann enthält sie zwei Tripelpunkte α, α', da $\Delta^2 = T$ eine geschaart-involutorische Collineation ist, mit a_1 als Leitstrahl (§ 2). Es seien $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ die Ebenen der in α, resp. α' sich schneidenden drei Geraden, und $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$ die drei übrigen durch a_1 gehenden Tritangentialebenen von F_3. Vermöge Δ müssen $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$ einander entsprechen, zwei derselben müssen daher einander involutorisch zugeordnet sein und die dritte muss Deckebene der Projectivität im Büschel (a_1) sein. Die ersteren seien $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$ die letztere $\mathfrak{E}_6$. Es müssen ferner $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ einander zugeordnet werden, da sie nicht auch Coincidenzebenen sein können, d. h. durch Δ werden die Ebenen des Büschels (a_1) involutorisch gepaart und E_6 ist eine Deckebene dieser Involution. Man kann somit dem Doppelverhältnis $(\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5)$ einen beliebigen Wert geben, dann ist $\mathfrak{E}_6$ bestimmt durch $(\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_6) = (\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}_6)$.

Es müssen nun vermöge Δ einander entsprechen die Geradenpaare $b_4\,b_{14}$ und $b_5\,c_{15}$ der Ebenen $\mathfrak{E}_4$ und $\mathfrak{E}_5$. Die b_4 entsprechende Gerade möge b_5 heißen, dann muss vermöge Δ der b_5 wieder b_4 entsprechen, denn in Δ^2 sind b_4 sowohl als b_5 Coincidenz-

Digitized by Google

geraden. Analog folgt, dass c_{14} und c_{15} einander involutorisch entsprechen. Auch b_6 und c_{16} ist ein Paar entsprechender Geraden.

In den Ebenen $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ liegen b_2, c_{12} und b_3, c_{13} und es muss in Δ der b_2 eine Gerade in $\mathfrak{E}_3$ entsprechen, sie heiße b_3, dann muss der b_3 die Gerade c_{12} zugeordnet sein. Denn würde ihr wieder b_2 entsprechen, so wären auch b_2 und b_3 Coïncidenzgeraden in Δ^2, was nicht zutrifft, da b_2 und c_{12} entsprechende Gerade in Δ^2 sind. Also bilden b_2, b_3, c_{12}, c_{13} einen Cyclus für Δ. Da sich die übrigen Geraden durch ihre Schnitte mit den vorstehenden 10 leicht bestimmten, so folgen die nachstehenden Cyclen für

$$\Delta)\ldots \quad \begin{array}{ccccccccc} a_1 & b_4 & c_{14} & b_6 & b_2 & a_2 & a_5 & a_4 & c_{26} \\ & b_5 & c_{15} & c_{16} & b_3 & c_{45} & c_{35} & c_{34} & c_{23} \\ & & & & c_{12} & a_3 & c_{46} & c_{56} & c_{36} \\ & & & & c_{13} & a_6 & c_{25} & c_{24} & b_1 \end{array}$$

§. 36. Hat umgekehrt F zwei Tripelpunkte α und α' auf a_1 und besteht für die Tritangentialebenen $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6$ durch a_1 die Relation: $(\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_6) = (\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}_6)$, so lässt F eine Collineation Δ in sich zu.

Man lege in (a_1) eine Ebeneninvolution fest, deren zwei Paare $\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5$ sind, deren eine Deckebene also $\mathfrak{E}_6$ ist. Nach §. 3 liegen die Scheitel der Geradenpaare $b_4\,c_{14}$, $b_5\,c_{15}$, $b_6\,c_{16}$ von F auf einer Geraden $\mathfrak{a}$. Diese betrachte man als Axe einer zweiten Ebeneninvolution, in der sich die Ebene $\overline{\mathfrak{a}\,b_4}$ und $\overline{\mathfrak{a}\,b_5}$ sowie $\overline{\mathfrak{a}\,c_{14}}$ und $\overline{\mathfrak{a}\,c_{15}}$ involutorisch entsprechen. Es werden dann auch $\mathfrak{a}\,b_6$ und $\overline{\mathfrak{a}\,c_{16}}$ sowie $\overline{\mathfrak{a}\,\alpha}$ und $\overline{\mathfrak{a}\,\alpha'}$ Paare der Involution sein.[1]) Durch die beiden Involutionen in (a_1) und $(\mathfrak{a})$ erscheinen die Strahlen der linearen Congruenz mit diesen Leitstrahlen involutorisch gepaart, speciel entsprechen einander die b_4 und b_5, c_{14} und c_{15} sowie b_6 und b_{16}.

Die Geraden b_4, c_{15}, b_6 von F werden außer von a_1 noch von zwei anderen Geraden getroffen, wir nennen eine von ihnen a_5 dieselbe trifft auch eine Gerade der Ebene $\mathfrak{E}_2$ diese heiße dann b_2. Die den obigen drei Geraden entsprechende Geraden in der linearen Congruenz: b_5, c_{14}, c_{16}, werden auch noch von zwei Geraden getroffen, wir nennen eine von ihnen c_{35} und die Gerade von $\mathfrak{E}_3$, welche sie schneidet, bezeichne man mit b_3.

Um die Collineation Δ festzulegen, weisen wir der Ebene durch $\overline{b_6\,a_5}$ die Ebene durch $\overline{c_{16}\,c_{35}}$ zu. Dann wird der Geraden

[1]) Sind $\beta_4\,\beta_4'$, $\beta_5\,\beta_5'$, $\beta_6\,\beta_6'$ die Schnittpunkte von $b_4\,c_{14}$, $b_5\,c_{15}$, $b_6\,c_{16}$ auf a_1, so sind α, α' die Deckpunkte der Involution, welche die drei Paare bilden. Denkt man sich die Punkte auf einen Kreis gebracht, so dass α, α' die imaginären Kreispunkte werden, $\overline{\beta_i\,\beta_i'}$ also Durchmesser des Kreises sind, so muss β_6 den Bogen zwischen β_4 und β_5' halbieren zufolge der obigen Relation. Dann ist aber der Pol der Involution, welchen die Paare $\beta_4\,\beta_5$ und $\beta_4'\,\beta_5'$ bestimmen, der unendlich ferne Punkt der Geraden $\overline{\beta_4\,\beta_5}$, der auch auf $\beta_6\,\beta_6'$ und $\overline{\alpha\,\alpha'}$ liegt.

Digitized by Google

a_5 da sie b_4 und c_{15} trifft die Gerade c_{35} entsprechen müssen, da diese b_5 und c_{14} schneidet. Aber auch der Geraden b_2 muss die Gerade b_3, wie man leicht sieht, entsprechen, und hieraus folgt, dass F mit ihrer entsprechenden coïncidiren muss. Hätte man statt c_{35} die andere Gerade genommen, die b_5, c_{14}, c_{16} noch schneidet, so wäre die dadurch bestimmte Collineation Δ^3 sein.

Dass Δ eine quaternäre Collineation ist, folgt nun leicht.

Da man das Doppelverhältnis $(\mathfrak{E}_2\ \mathfrak{E}_3\ \mathfrak{E}_4\ \mathfrak{E}_5)$ willkürlich wählen konnte, so gibt es ∞^1 projectivisch verschiedene Flächen dritten Ordnung, welche eine Collineation Δ in sich zulassen.

§. 37. Die Collineation Δ, welche die centralen Collineationen A und A' mit den Centren α und α' nach sich zieht, gibt mit ihnen verbunden die geschaart-involutorischen Collineationen $A\Delta$ und $A'\Delta$. Denn es werden zugeordnet vermöge

$$A\Delta) \ldots b_6\ a_1\ c_{16}\ a_4\ c_{46}\ a_5\ c_{56}\ b_1\ b_2\ b_4\ b_5\ a_2\ a_3\ a_6\ c_{12}\ c_{25}\ c_{24}\ c_{45}\ b_3\ c_{15}\ c_{14}\ c_{26}\ c_{36}\ c_{23}\ c_{13}\ c_{35}\ c_{34}$$

und vermöge

$$A'\Delta) \ldots c_{16}\ a_1\ b_6\ c_{25}\ c_{34}\ c_{24}\ c_{35}\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ c_{23}\ a_6\ c_{13}\ c_{12}\ c_{15}\ c_{14}\ c_{36}\ c_{26}\ c_{56}\ c_{46}\ c_{45},$$

wobei je zwei untereinander stehende Gerade ein Paar bilden. Es ist, wie leicht ersichtlich $A\Delta$ die geschaarte Collineation, deren eine Leitgerade b_6 ist, während $A'\Delta$ die c_{16} als Leitgerade hat. Infolge dessen liegen auf b_6 sowohl als auf c_{16} je zwei Tripelpunkte.

Nach dem obigen Schema für $A\Delta$ entsprechen sich von den b_6 schneidenden Geraden nur die zwei Paare $a_3\ c_{36}$ und $a_2\ c_{26}$ involutorisch, während die übrigen sechs Geraden die Coïncidenzgeraden sind. Nach § 2 müssen also diese zwei Paare sich auf b_6 schneiden, Es sei β der Tripelpunkt $b_6\ a_3\ c_{36}$ und β' der Scheitel von $b_6\ a_2\ c_{26}$.

Analog ergibt sich, dass der Schnittpunkt γ von $a_6\ b_1\ c_{16}$ und γ' von $c_{23}\ c_{45}\ c_{16}$ je ein Tripelpunkt ist.

Die so auftretenden sechs Tripelpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ haben genau die Lage, wie sie in Fig. 1 pag. 15 gezeichnet ist, sie bilden die sechs Ecken eines vollständigen Vierseites. Es folgt nun wie im §. 16 die Erzeugung der Gruppe G_{24} von 24 Collineationen, welche F ungeändert lassen und die neben Δ noch zwei andere quarternäre Collineationen enthält, deren Quadrate $A\Delta$ resp. $A'\Delta$ sind. Δ kann daher stets durch drei der centralen Collineationen erzeugt werden.

§. 38. Da es ∞^1 projectiv verschiedene Flächen F mit einer Δ gibt, so kann man noch verlangen, dass F eine weitere centrale Collineation mit einem Centrum β_1 besitzt. Es genügt den Fall ins Auge zu fassen, dass β_1 auf einer der acht die a_1 schneidenden Geraden liegt, die noch keinen Tripelpunkt enthalten.

Digitized by Google

Liegt etwa β_1 auf b_4, so folgt, wie soeben, dass auf c_{14} noch γ_1, γ_1' und auf b_4 noch β_1' liegt. Vermöge Δ müssen auch auf b_5 die Tripelpunkte β_2 und β_2' auf c_{15} die γ_2 und γ_2' liegen. Die Geraden, welche diese 14 Tripelpunkte unter einander verbinden, liefern noch vier solche auf b_2, b_3, c_{12}, c_{13}, so dass die Fläche 18 Tripelpunkte aufweist, also die äquianharmonische Fläche dritter Ordnung ist, die eine geschaart tricyclische Collineation und daher die Gruppe G_{648} von 648 Collineationen in sich zulässt.

§. 39. Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Tripelpunkt β_1 auf einer der Geraden b_2, b_3, c_{12}, c_{13} die einem Quadrupel in Δ angehören, liegt, so zwar, dass eine seiner Geraden an einem der Tripelpunkte auf b_6 oder c_{16}, die andere daher an einem der Tripelpunkte auf c_{16} oder b_6 betheiligt ist. Dann treten nämlich zufolge Δ nur auf den Geraden des Quadrupels b_2, b_3, c_{12}, c_{13} Tripelpunkte auf, so dass die Fläche 10 Tripelpunkte besitzt, die paarweise auf 15 Geraden, nämlich a_1, b_2, c_{12}, b_3, c_{13}, b_6, c_{16} und auf den acht Geraden von F liegen, welche die Trippelpunkte auf b_6, c_{16} mit denen auf b_2, c_{12}, b_3, c_{13} verbinden. Ist β_1 etwa der Schnittpunkt von $b_2\, a_3\, c_{23}$, so entsprechen ihm vermöge Δ die Trippelpunkte $b_3\, a_6\, c_{36}$; $c_{12}\, a_2\, b_1$; $c_{13}\, c_{45}\, c_{26}$, so dass a_3, c_{23}, a_6, c_{36}, a_2, b_1, c_{45}, c_{26} die obigen acht Geraden sind. Die noch übrig bleibenden 12 Geraden der Fläche bilden eine Schläflische Doppelsechs, nämlich:

$$a_4\ b_4\ c_{56}\ c_{15}\ c_{25}\ c_{35}$$
$$a_5\ b_5\ c_{46}\ c_{14}\ c_{24}\ c_{34},$$

und sie haben keine Tripelpunkte. Hieraus folgt schon, dass die vorliegende Fläche die Diagonalfläche von Clebsch ist.[1])

Es folgt auch sofort, dass die Collineation $B_1\, \Delta = H$ die Periode fünf besitzt. Dieselbe ordnet nämlich die Geraden der Fläche in nachstehende Cyclen:

$$B_1\, \Delta = H) \ldots \quad \begin{array}{ccccccc} a_4 & a_5 & a_1 & a_3 & b_1 & b_4 & b_5 \\ & & c_{13} & a_6 & b_2 & c_{56} & c_{46} \\ & & c_{26} & c_{23} & b_3 & c_{15} & c_{14} \\ & & a_2 & c_{36} & c_{45} & c_{25} & c_{24} \\ & & c_{12} & c_{16} & b_6 & c_{35} & c_{34}, \end{array}$$

so dass a_4 und a_5 Coïncidenzgeraden von H sind.

Wir werden im folgenden Abschnitte sehen, dass das Auftreten einer quinären Collineation H die Fläche dritter Ordnung projectivisch bestimmt, und verschieben daher die näheren Betrachtungen dieser Flächen bis dahin.

---

[1]) Cfr. Clebsch, Math. Annalen, Bd. IV., pag. 336.

Digitized by Google

V. Collineation von der Periode fünf.

§. 40. Durch eine Collineation H von der Periode fünf werden die Geraden der Fläche dritter Ordnung F zu Quintupeln geordnet, derart, dass vermöge H, H^2, H^3, H^4 jeder Geraden desselben die vier übrigen entsprechen. Es müssen daher wenigstens zwei Gerade übrig bleiben, die keinem Cyclus angehören, die daher Coïncidenzgeraden der Collineation sind. Sie seien mit a_1, b_1 bezeichnet. Diese Geraden müssen windschief sein. Denn die Tritangentialebenen durch a_1 müssen einander entsprechen, vermöge H, H^2, H^3, H^4, also einem Cyclus angehören. Würde nun b_1 die a_1 schneiden, so wäre die Tritangentialebene durch $a_1 b_1$ eine Coïncidenzebene, daher müssten auch die vier übrigen Tritangentialebenen solche sein, mithin würden alle zehn a_1 schneidende Geraden Coïncidenzgeraden sein, also H die Identität darstellen.

Die Geraden a_1, b_1 werden demnach von fünf Geraden der Fläche geschnitten, diese müssen einem Cyclus in H angehören. Es sei c_{12} eine derselben und c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16} die vier ihr zugeordneten. Dann bilden auch die Ebenen $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{E}_6$ einen Cyclus des Büschels (a_1), daher auch die in ihnen noch gelegenen Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 wieder einem Cyclus angehören. Analog folgt, dass auch a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 einen Cyclus bilden, so dass wir auch sofort für die noch restierenden 15 Geraden c_{ik} die Cyclen angeben können. Wir erhalten folgendes Schema:

$$
\begin{array}{lccccc}
 & a_1\ b_1\ a_2 & b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{24} \\
 & a_3 & b_3 & c_{13} & c_{34} & c_{35} \\
H).. & a_4 & b_4 & c_{14} & c_{45} & c_{46} \\
 & a_5 & b_5 & c_{15} & c_{56} & c_{25} \\
 & a_6 & b_6 & c_{16} & c_{26} & c_{36}
\end{array}
$$

in dem je fünf untereinander stehenden Geraden einen Cyclus bilden.

§. 41. Das Auftreten der Collineation H bestimmt F projectivisch, d. h. bis auf Raumcollineationen vollständig, denn es zeigt sich, dass die Invarianten der Fläche numerische Werte erhalten. Jede solche Fläche kann daher in jede andere dieser Art durch eine Raumcollineation überführt werden.[1])

Die Invarianten dieser Fläche für die Geraden a_1 und b_1 bestimmen sich dadurch, dass die Schnittpunkte der Geraden c_{1k} auf a_1 und b_1 je eine cyclisch projectivische Punktreihe vom Index 5 bilden müssen, da es die Ebenenbüschel, welche c_{1k}, enthalten, thun. Die beiden in der citierten Abhandlung definierten Invarianten ergeben sich dem entsprechend $h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $i = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $H = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $I = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[1]) Vgl. die Abhandlung: „Über die Invarianten der Flächen dritter Ordnung." Diese Zeitschrift VIII. Jahrg., pag. 146.

Digitized by Google

Um die Natur dieser Fläche zu erkennen, bilden wir dieselbe nach dem Vorgange von Clebsch[1]) auf eine Ebene ab. Wir nehmen hiezu nach den Auseinandersetzungen der Note auf Seite19 den Kegelschnitt K_1, der das Bild von b_1 sein soll als Kreis an. Dann werden die Bilder der fünf Geraden a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 fünf Punkte von K_1, die die Ecken eines regulären Fünfeckes bilden. Denn bezeichnen wir die Punkte mit 2, 3, 4, 5, 6, so muss die nachfolgende Gleichheit der Doppelverhältnisse bestehen:

$$(2\,3\,4\,5) = (3\,4\,5\,6) = (4\,5\,6\,2)$$

Die Ebenen, welche aus a_1 die Geraden c_{1k} projicieren, bilden ebenfalls ein quinär-cyclisches Büschel, also muss, wenn

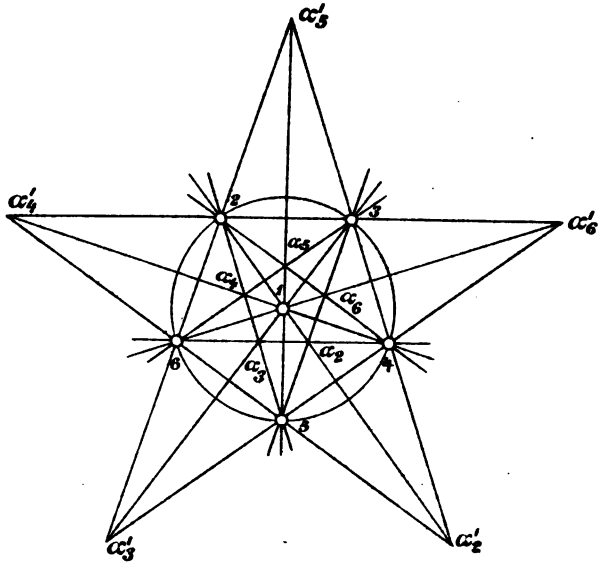


Fig. 6.

1 das Bild von a_1 ist, für den Büschel mit dem Centrum 1 die Doppelverhältnisse:

$$1\,(2\,3\,4\,5) = 1\,(3\,4\,5\,6) = 1\,(4\,5\,6\,2)$$

sein; der hiedurch vollständig bestimmte Punkt 1 ist daher der Mittelpunkt des Kreises. Wir erhalten also die obenstehende Figur 6 als Bild der Geraden der Fläche in bekannter Art.

Aus den Symmetrieverhältnissen der Figur erkennt man nun sofort, dass sich auf der Fläche 10 Tripelpunkte befinden müssen, da sich die Bilder der Geraden der Fläche zehnmal zu dreien in

[1]) Cfr. Clebsch. Über die Geometrie auf Flächen dritter Ordnung, Crelle Bd. 65 pag. 359.

Digitized by Google

einem Punkte treffen. Die Bezeichnung in der Figur ist der Bezeichnung im Raume entsprechend. Es schneiden sich die Geraden:

$$\begin{array}{llll} c_{12}\,c_{34}\,c_{56} & \text{in einem} & \text{Punkte} & \alpha_2' \\ c_{12}\,c_{35}\,c_{46} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_2 \\ c_{13}\,c_{26}\,c_{45} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_3' \\ c_{13}\,c_{25}\,c_{46} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_3 \\ c_{14}\,c_{23}\,c_{56} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_4' \\ c_{14}\,c_{25}\,c_{36} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_4 \\ c_{15}\,c_{26}\,c_{34} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_5' \\ c_{15}\,c_{24}\,c_{36} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_5 \\ c_{16}\,c_{23}\,c_{45} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_6' \\ c_{16}\,c_{35}\,c_{24} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & \alpha_6 \end{array}$$

Diese 10 Tripelpunkte liegen paarweise α_i, α_i' auf den fünf Geraden c_{1i} und 10 Geraden $c_{\lambda\mu}$, überdies zu dreien auf 10 Geraden und zwar liegen auf je einer Geraden:

$$\begin{array}{lllll} \alpha_2'\,\alpha_3'\,\alpha_5, & \alpha_3'\,\alpha_4'\,\alpha_6, & \alpha_4'\,\alpha_5'\,\alpha_2, & \alpha_5'\,\alpha_6'\,\alpha_3, & \alpha_6'\,\alpha_2'\,\alpha_4 \\ \alpha_2\,\alpha_4'\,\alpha_3', & \alpha_3\,\alpha_5'\,\alpha_4', & \alpha_4\,\alpha_6'\,\alpha_5', & \alpha_5\,\alpha_2'\,\alpha_6', & \alpha_6\,\alpha_3'\,\alpha_2' \end{array} \ldots P)$$

was sich leicht aus der gegenseitigen Lage der Geraden der Fläche ergibt. Durch jeden Tripelpunkte gehen außer den drei Geraden der Fläche, welche noch drei Tripelpunkte tragen, drei der Geraden P). Die Ebene durch zwei dieser Geraden enthält noch zwei andere Geraden, welche sich wieder in einem Tripelpunkte schneiden, und die sechs Tripelpunkte in der Ebene sind die Ecken eines vollständigen Vierseites, dessen Diagonaldreieck drei Gerade der Fläche dritter Ordnung sind. Wir haben also die Figur 1 auf Seite 15 vor uns. Solche Tritangentialebenen sind die fünf Ebenen durch die Geraden

$$c_{12}\,c_{45}\,c_{36};\ c_{13}\,c_{24}\,c_{46};\ c_{14}\,c_{35}\,c_{26};\ c_{15}\,c_{23}\,c_{46};\ c_{16}\,c_{25}\,c_{34} \ldots T)$$

Diese enthalten stets vier der Geraden P) und da durch jede der Geraden P zwei der genannten Ebenen gehen, so bilden die fünf Ebenen ein Pentaeder, dessen zehn Kanten die zehn Geraden P) und dessen Ecken die zehn Punkte α sind. Wie man sieht, ist die vorliegende Fläche die Diagonalfläche von Clebsch[1]) und lässt 120 Collineationen in sich zu[2]), entsprechend der 120 Collineationen, welche das Pentaeder in sich verwandeln. Wir wollen diese Collineationen wieder aus den zehn central-involutorischen Collineationen erzeugen.

[1]) Cfr. Clebsch, Math. Annalen, Bd. 4, pag. 236.
[2]) Klein, Math. Annalen, Bd. 6, pag. 567.

Digitized by Google

§. 42. Die Fläche lässt zehn central-involutorische Collineationen A_k, A_i' (k, $i = 2, 3, 4, 5, 6$) in sich zu.

Um die ganze durch diese erzeugte Gruppe zu erhalten, hat man, wie in §. 13 und §. 16 gezeigt wurde, nur nöthig, solche Combinationen in Betracht zu ziehen, welche jede Collineation nur einmal aufweisen. Sodann kann man zeigen, dass man alle Collineationen erhält, wenn man nur die Operationen bis zu vier Collineationen, deren Centren nicht in einer Ebene liegen, combiniert. Denn hat man fünf Collineationen, deren keine vier Centren in einer Ebene liegen, so lege man durch die drei Centren der ersten Collineation die Ebene E, diese kann durch Wahl der drei Centren nach §. 13 immer eine der fünf Tritangentialebenen T) von F sein und wird noch drei andere, in einer Geraden liegende Centren enthalten. Die Gerade, welche die zwei Centren trägt, deren Collineation mit den drei ersten zur Combination zusammengefasst wurden, trifft die Ebene E nothwendig in einem der drei noch vorhandenen Tripelpunkte Man kann die diesem Tripelpunkt zugehörige Collineation an Stelle der vier Collineationen setzen (nach §. 13) und erhält so fünf Collineationen, von denen vier ihre Centren in einer Ebene haben. Diese vier reducieren sich aber nach §. 16 α) auf zwei Operationen.

Wir haben daher außer den zehn central-involutorischen Collineationen der zehn Tripelpunkte noch 15 geschaart-involutorische entsprechend den 15 Geraden, welche zwei der Tripelpunkte tragen und $10 \times 2 = 20$ ternär-planare, deren Axen die zehn Geraden P) sind.

Die Combinationen zu dreien liefern den Tangentialebenen der Tripelpunkte nach § 18 entsprechend $10 \times 2 = 20$ senäre Collineationen X und den fünf Pentaederebenen T) dem § 17 zufolge $5 \times 6 = 30$ quaternäre Collineationen Δ.

§. 43. Werden vier beliebige Collineationen combiniert, deren Centren so liegen, dass durch sie keine Ebene geht, so können drei der Centren in eine beliebige der fünf Pentaederebenen gebracht werden.

Wählen wir als diese etwa die Ebene durch $c_{12}\, c_{35}\, c_{45}$, so erhalten die sechs Tripelpunkte die Lage, wie sie in nebenstehender Figur 7 angegeben sind. Außerhalb derselben liegen noch die vier Tripelpunkte α_3, α_6, α_4', α_5', ihre sechs Verbindungsgeraden treffen die Ebene in je einem der sechs Tripelpunkte. Liegt nun keines der vier Centren, deren Collineationen combiniert werden, in dieser Ebene, so kann man sofort nach § 9 die erste Operation ersetzen durch eine Collineation, deren Centrum in der Ebene liegt, da die Gerade, welche die ersten zwei Centren verbindet, noch ein Centrum enthält, das in der Ebene liegt. Ist nun an erster Stelle eine Collineation getreten, deren Centrum in der Ebene liegt, so kann dieselbe Operation mit der zweiten und dritten Stelle vorgenommen

Digitized by Google

werden, wodurch die drei ersten Collineationen Centren haben, die in der angenommenen Ebene liegen. Man erhält also alle Collineationen, die durch vier Erzeugende dargestellt werden, wenn man die vier außerhalb der Ebene liegenden Centren combiniert mit den Operationen, die durch drei Collineationen darstellbar sind, deren Centren auf einer der Ebene T) liegen. Solche sind nach §. 16 bloß die sechs quaternären Collineationen Δ, also existieren bloß $6 \times 4 = 24$ verschiedene Collineationen, die sich durch nicht weniger als vier der central involutorischen Collineationen darstellen lassen.

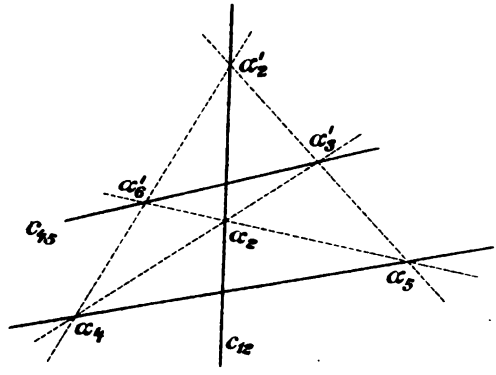


Fig. 7.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Collineationen quinär sind. Setzen wir etwa:

$$H_1 = A'_2 A'_3 A_4 A_3 = A_4 A'_6 A_2 A_3 = A_3 A_4 A'_5 A_2$$

nach §. 13 und P) auf Seite 49, so wird

$$H_1^2 = A'_2 A'_3 A'_5 A_2 = A'_5 A'_2 A'_3 A_2 = A'_5 A_2 A'_2 A_4 = A_2 A'_4 A'_2 A'_4$$

$$H_1^4 = A'_2 A'_3 A'_5 A'_4 A'_2 A_4 = A_5 A'_5 A'_4 A_4 = A_4 A_5 A_6 A'_4$$

$$H_1^5 = A'_2 A'_3 A_3 . A_5 A_6 A'_4 = A'_2 A'_3 A_3 A_5 A'_4 A'_3 = A'_2 A'_3 A_5 A'_3 = A'_2 A'_2 = 1$$

Die Gruppierung der Geraden von F durch diese Collineation H_1 ergibt sich leicht durch Anwendung der vier Operationen mit Rücksicht auf die in einem Tripelpunkt sich schneidenden Geraden. Man findet, dass a_1 und b_1 sich selbst entsprechen und dass die Cyclen die folgenden sind:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{24} \\ & & a_4 & b_4 & c_{14} & c_{45} & c_{46} \\ & & a_6 & b_6 & c_{16} & c_{26} & c_{36} \\ & & a_3 & b_3 & c_{13} & c_{34} & c_{35} \\ & & a_5 & b_5 & c_{15} & c_{56} & c_{26} \end{array}$$

so dass $H_1 = H^2$ ist.

Digitized by Google

Da es weiter keine Collineationen geben kann, welche durch die Gruppe der zehn centralen Collineationen erzeugt wird, so haben wir hiemit die ganze Gruppe erschöpft, welche F in sich verwandelt, das sind mit der Identität:

$$10+15+2\times 10+2\times 10+5\times 6+6\times 4+1=120$$

Collineationen, wie schon im §. 41 erwähnt.

Man erhält sie alle, indem die Collineationen bestimmt werden, welche das Pentaeder T) in sich transformieren und daher ist ihre Gruppe holoedrisch-isomorph zur erweiterten Gruppe des Ikosaeders[1]).

Die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe besteht nach §. 15 aus den 60 paaren Collineationen: den 15 geschaart-involutorischen, 20 ternär-planaren und 24 quinären Collineationen, sowie der Identität.

§. 44. Es erübrigt noch die Lage von vier Tripelpunkten $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1$ auf F so anzugeben, dass die Aufeinanderfolge der vier centralen Collineationen $A\,B\,\Gamma\,B_1$ eine quinäre Collineation H ergibt, wodurch F als Diagonalfläche charakterisiert ist.

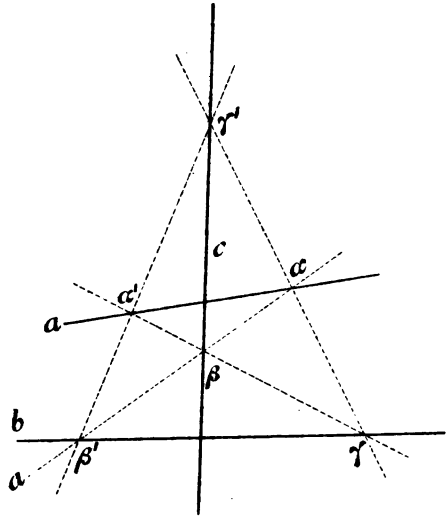


Fig. 8.

Vor allem ist klar, dass $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1$ nicht in einer Ebene liegen dürfen. Ferner darf keine der vier Ebenen, welche die Punkte zu dreien bestimmen die F in einer irreducibler Curve dritter Ordnung schneiden (§. 12) und es können auch nicht die drei Ge-

[1]) Klein a. a. O., pag. 23.

Digitized by Google

raden, in welche also die Schnitte zerfallen müssen, in allen vier Ebenen sich je in einem Punkte schneiden, da sonst die äquianharmonische Fläche (§. 27) vorläge. Eine der vier Ebenen muss wenigstens in drei ein Dreieck bildenden Geraden, die F schneiden.

Diese Ebene $\overline{\alpha\beta\gamma}$ etwa enthält dann (Fig. 8) weitere drei in einer Geraden liegende Tripelpunkte α', β', γ', so dass $\overline{\alpha\alpha'} = a$ $\overline{\beta\beta'} = b$, $\overline{\gamma\gamma'} = c$ die drei Flächengeraden sind.

Die Ebene des Tripelpunktes β_1 muss nun eine der Seiten des vorliegenden Vierseites enthalten, Denn würde sie bloß durch eine der sechs Ecken hindurchgehen. dann würden die übrigen fünf aus β_1 auf F projiciert fünf neue Tripelpunkte geben, die F hätte also mehr als zehn solcher Punkte und wäre die äquianharmonische Fläche.

Enthält die Tangentialebene von β_1 etwa $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$, so treffen $\overline{\beta_1\alpha}$, $\overline{\beta_1\beta}$, $\overline{\beta_1\gamma}$ die F noch in drei Tripelpunkten β_2, β_3, β_4 und es sind $\overline{\beta_2\alpha'}$, $\overline{\beta_3\beta'}$, $\overline{\beta_4\gamma'}$ drei Gerade der Fläche, welche vermöge B_1 den Geraden a, b, c zugeordnet sind. Die zehn so gefundenen Tripelpunkte sind die einzigen auf F und man zeigt nun leicht, dass ihre Lage derart ist, wie sie in §. 39 gefunden wurde, oder man beweist direct, dass $AB\Gamma B_1$ eine quinäre Collineation ist, was mit Benützung der Regeln des §. 13 leicht gelingt.

VI. Collineationen von der Periode sechs.

§. 45. Das Quadrat einer Collineation von der Periode sechs ist eine ternäre Collineation. Diese kann *a*) planar, *b*) central, *c*) geschaart sein.

a) Das Quadrat der senären Collineation Z sei eine planar-tricyclische Collineation Π. Die dritte Potenz der senären Collineation Z kann eine centrale-B_1 oder geschaarte-T Collineation von der Periode zwei sein. Sind α, β, γ die drei zu Π gehörigen Tripelpunkte (§. 7), so muss das Centrum β_1 für die centrale Collineation B_1 von diesen drei verschieden sein und die Ebene $\overline{\alpha\beta\beta_1}$ muss drei Gerade von F enthalten, da sonst die Fläche des §. 15 oder §. 33 vorläge, die eine central-tricyclische Collineation Φ besitzt, welche das Quadrat der auftretenden senären ist.

Da $Z^2 = \Pi$ und $Z^3 = B_1$ also $Z^5 = Z^{-1} = \Pi B_1 = B_1 \Pi$ ist, muss das Centrum β_1 und die Collineationsebene $\mathfrak{B}_1$ von B_1 durch Π ungeändert bleiben, ebenso wie die Axe $\overline{\alpha\beta\gamma}$ von Π durch B_1 nicht aus ihrer Lage gebracht werden darf. Daher geht $\mathfrak{B}_1$ durch $\overline{\alpha\beta\gamma}$ (denn diese Ebene kann nicht durch β_1 gehen) und β_1 ist Schnittpunkt dreier Geraden, die durch $\Pi = AB$ einander zugeordnet sind. Wir haben also die Fläche des §. 19. Die

Digitized by Google

senäre Collineation wurde mit X bezeichnet, und die Fläche besitzt die Gruppe G_{12} von 12 Collineationen.

Ist dagegen $Z^2 = \Pi$ und $Z^3 = T = B_1 B_1' = B_1' B_1$ wenn β_1, β_1' die beiden auf der Geraden b von F gelegenen Tripelunkte sind, so wird $Z^5 = Z^{-1} = \Pi . T = T\Pi$.

Die Gerade b kann aber die Axe $\overline{\alpha\beta\gamma}$ von Π nicht schneiden. Denn wäre etwa β_1' mit γ identisch, so ergäbe $Z^5 = \Pi . T = AB . B_1' B_1 = AB . \Gamma B_1 = B . B_1$ eine Collineation, die nicht von der Periode sechs ist. Daher muss $\overline{\alpha\beta\gamma}$ und ihre Gegenaxe von Π identisch sein mit den Leitstrahlen der geschaart-involutorischen Collineation T. Also ist b die Gegenaxe von $\overline{\alpha\beta\gamma}$ für Π. Da b je eine der Geraden a_1, a_2, a_3 der drei Tripelpunkte α, β, γ treffen müsste, so müssten der Geraden a_1 vermöge Π zwei Geraden entsprechen durch β, resp. γ gehend und sich mit a_1 auf b schneidend, was unmöglich ist, da auf b nicht drei Tripelpunkte auftreten können. Es existieren daher keine Flächen dritter Ordnung, welche eine derartige senäre Collineation zulassen.

b) Ist das Quadrat der senären Collineation eine tricyclisch centrale, dann ist die betreffende Fläche eine von den drei Flächen, welche solche Collineationen zulassen, nämlich entweder die unter III *b*) oder unter III *c*) oder im §. 33 betrachtete. Wenn einer dieser Fälle eintritt, möge hier weiter nicht untersucht werden.

c) Ist das Quadrat eine geschaarte Collineation Ω, dann liegt die äquianharmonische Fläche vor.

Alle Flächen, welche senäre Collineationen zulassen, sind daher schon im Vorangehenden betrachtet worden.

VII. Collineationen von der Periode acht.

§. 46. Es sei M eine Collineation von der Periode acht, welche F in sich transformiert. Dann muss wenigstens eine Gerade, sie heiße a_1, Coïncidenzgerade der Collineation sein. Von den fünf durch a_1 gehenden Tritangentialebenen der F ist daher auch eine, sie heiße $\mathfrak{E}$, Coïncidenzebene von M. Es kann nun M^2 eine quaternäre Collineation vom Charakter Δ oder ∇ sein, d. h. es kann M^4 entweder eine geschaarte oder eine centrale Collineation sein.

Der erste Fall kann hier nicht eintreten. Denn wäre $M^2 = \Delta$, so müssten auf a_1 zwei Tripelpunkte α und α' auftreten und ihre Ebenen $\mathfrak{E}_\alpha$, $\mathfrak{E}_\alpha'$ müssten einander, vermöge M zugeordnet sein, indem sie viermal gezählt einen Cyclus für M darstellen. Dann würden aber für $M^2 = \Delta$ die Ebenen $\mathfrak{E}_\alpha$ $\mathfrak{E}_\alpha$, und $\mathfrak{E}$ Coïncidenzebenen sein, was nach §. 35 nicht zulässig ist, da die Ebenen $\mathfrak{E}_\alpha$ $\mathfrak{E}_{\alpha'}$ einander in Δ involutorisch entsprechen.

Digitized by Google

Es kann also nur der Fall eintreten, das $M^2 = \nabla$ ist. Die Gerade a_1 enthält dann bloß einen Tripelpunkt a, in dem sich b_2 und c_{12} schneiden mögen, und dessen Ebene die obgenannte $\mathfrak{E}$ ist. Die übrigen vier Ebenen $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6$, welche die Geradenpaare $b_i c_{1i}$ enthalten ($i = 3, 4, 5, 6$), bilden zweimal durchlaufen einen Cyclus von M. Die Reihenfolge desselben sei $\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_6$. Dann bestehen die Doppelverhältnisgleichheiten:

$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_6) = (\mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_6\, \mathfrak{E}_3) = (\mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_6\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5) = (\mathfrak{E}_6\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4)$$

d. h. das Doppelverhältnis

$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_6) = -1$$

oder die Paare $\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4$ und $\mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_6$ trennen einander harmonisch. Da $\mathfrak{E}$ als Coïncidenzebene von M Deckebene der obigen Projectivität im Büchel sein muss, so folgt für dieselbe

$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_6\, \mathfrak{E})$$

also mit Rücksicht auf den Wert des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_6)$ kann man

$$(\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}) = 1 + \sqrt{-1} \qquad (\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{S}) = 1 - \sqrt{-1},$$

setzen, wenn $\mathfrak{S}$ die andere Deckebene ist.

Die Fläche ist mithin durch die Collineation von der Periode acht projectivisch bestimmt, und möge die harmonische Fläche heissen.

Es ergibt sich leicht

$$(\mathfrak{E}\, \mathfrak{S}\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_6) = \sqrt{-1}, \quad (\mathfrak{E}\, \mathfrak{S}\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4) = -1, \quad (\mathfrak{E}\, \mathfrak{S}\, \mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_5) = -\sqrt{-1}$$

woraus ersichtlich, dass $\mathfrak{E}_3\, \mathfrak{E}_4\, \mathfrak{E}_5\, \mathfrak{E}_6$ in quaternär-cyclischer Projectivität stehen mit den Deckelementen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$.

§. 47. Behalten wir die Benennung der Geraden von F bei, wie sie im §. 31 aufgestellt wurde, und setzen voraus, dass $M^2 = \nabla$ die Geraden der Fläche nach dem pag. 39 angegebenen Schema zu Quadrupeln anordnet, so ergibt sich auch leicht die Anordnung der Geraden von F zu Octupeln.

Da $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_6$ ein Ebenenoctupel für M ist, so müssen die acht Geraden b_i, c_{1i} ($i = 3, 5, 4, 6$) auch ein solches sein, und zwar in der Anordnung $b_3, b_5, b_4, b_6, c_{13}, c_{15}, c_{14}, c_{16}$, da es uns freisteht, die Gerade, welche b_3 in $\mathfrak{E}_5$ entspricht b_5 zu nennen. Die b_5 entsprechende Gerade in $\mathfrak{E}_4$ müssen wir dann, um mit §. 31 in Einklang zu bleiben, b_4 nennen. Auf diese Art ergibt sich der ganze obige Cyclus. Da durch die Schnittpunkte mit diesen acht Geraden die Geraden der Fläche festgelegt sind, so ergeben sich sofort die nachfolgenden Cyclen:

Digitized by Google

$$M) \quad \ldots \begin{matrix} b_3 & a_6 & c_{36} & b_2 & a_1 \\ b_5 & a_2 & c_{25} & c_{12} & \\ b_4 & a_3 & c_{34} & & \\ b_6 & c_{46} & a_4 & & \\ c_{13} & c_{26} & c_{45} & & \\ c_{15} & b_1 & a_5 & & \\ c_{14} & c_{23} & c_{56} & & \\ c_{16} & c_{35} & c_{24}. & & \end{matrix}$$

Hiebei folgt, dass b_2 und c_{12} einander involutorisch entsprechen.

M ist ebenso wie ∇ **nicht** durch centrale Collineationen erzeugbar.

§. 48. Besitzt eine Fläche dritter Ordnung der Invarianten $(\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_6 = \sqrt{-1} \quad (\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4) = -1 \quad (\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_5) = -\sqrt{-1}$ indem die Ebene $\mathfrak{E}$ Tangentialebene im Tripelpunkte α ist, so lässt sie auch eine Collineation von der Periode acht zu.

Nach §. 32 lässt sie eine Collineation ∇ von der Periode vier zu, da aus den vorstehenden Gleichungen

$$(\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{E})$$

und

$$(\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_5\,\mathfrak{S}) = (\mathfrak{E}_4\,\mathfrak{E}_3\,\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{S})$$

folgt. Die dort eingeführten Benennungen mögen auch hier beibehalten werden.

Da für die Schnittcurve C^3 von $\mathfrak{A}$ mit F die vier Tangenten $\overline{\sigma 3}$, $\overline{\sigma 4}$, $\overline{\sigma 5}$, $\overline{\sigma 6}$ ein harmonisches Quadrupel bilden, so ist die C^3 die harmonische Curve dritter Ordnung. Dieselbe lässt dem Wendepunkte w zugeordnet, zwei quaternär-cyclische Collineationen der Ebene zu, welche C^3 in sich überführen. Dieselben werden erhalten, wenn man den Punkten 3, 5, 4, 6 die Punkte 5, 4, 6, 3 oder 6, 3, 5, 4 zuordnet. Bezeichnet man die erste Collineation mit δ, so ist die letztere $\delta^3 = \delta^{-1}$.

Wir legen nun im Bündel $[\alpha]$ eine Collineation fest, derart, dass homologe Strahlen die Ebene $\mathfrak{A}$ in homologen Punkten der collinearen Beziehung δ treffen. Es gibt dann ∞^1 Collineationen des Raumes, für welche α und $\mathfrak{A}$ Coïncidenzelemente sind, und welche im Bündel $[\alpha]$ die eben angegebene Collineation inducieren. Für alle sind b_2, c_{12} einander involutorisch entsprechende Gerade, da σ' und σ'' einander in δ involutorisch entsprechen, und a_1 ist Coïncidenzgerade. Um eine der Collineationen unzweideutig festzulegen, kann man einem Punkte x einen Punkt als x' willkürlich zuweisen, sobald $\overline{\alpha x}$ und $\overline{\alpha x'}$ homologe Strahlen vom Bündel $[\alpha]$ sind.

Wir weisen nun dem Punkte β_3, in welchem b_3 die a_1 schneidet, den Punkt β_5 zu, in dem b_5 die a_1 trifft. Durch diese Zuordnung ist auf a_1 eine projectivische Beziehung zwischen den Punkten festgelegt, sobald wir α und σ als Deckpunkte derselben annehmen,

Digitized by Google

die derart beschaffen ist, dass dem Punkte β_5 der Schnittpunkt β_4 einer der in $\mathfrak{E}_4$ gelegenen Geraden von F und diesem der Schnittpunkt β_6 einer in $\mathfrak{E}_6$ gelegenen Geraden zugewiesen ist.[1]) Es werden weiter den Punkten $\beta_6\,\beta_3'\,\beta_5'\,\beta_4'\,\beta_6'$ die Punkte $\beta_3'\,\beta_5'\,\beta_4'\,\beta_6'\,\beta_3$ entsprechen.

Infolge dessen wird in der Collineation den Geraden $\overline{3\,\beta_3} = b_3$, $\overline{5\,\beta_5} = b_5$, $\overline{4\,\beta_4} = b_4$, $\overline{6\,\beta_6} = b_6$, $\overline{3\,\beta_3'} = c_{13}$, $\overline{5\,\beta_5'} = c_{15}$, $\overline{4\,\beta_4'} = c_{14}$ und $\overline{6\,\beta_6'} = c_{16}$ die Geraden $\overline{5\,\beta_5} = b_5$, $\overline{4\,\beta_4} = b_4$, $\overline{6\,\beta_6} = b_6$, $\overline{3\,\beta_3'} = c_{13}$, $\overline{5\,\beta_5'} = c_{15}$, $\overline{4\,\beta_4'} = c_{14}$, $\overline{6\,\beta_5'} = c_{16}$ und $\overline{3\,\beta_3} = b_3$ entsprechen. Die Collineation M ist daher cyclisch vom Index 8 und F entspricht sich selbst vermöge derselben.

Hätte man dem Punkte β_3 den Punkt β_{13} zugewiesen, in welchen b_3 und b_6 die a_1 schneiden, so wäre die hiedurch bestimmte Collineation M^3 entstanden.

Nimmt man an Stelle der obigen Collineation δ in $\mathfrak{A}$ die Collineation δ^3 zur Grundlage, so erhält man bei Zuweisung von β_3 zu β_5 die Collineation M^5 und Zuweisung von β_3 zu β_6 die Collineation M^7.

Die harmonische Fläche dritter Ordnung ist projectivisch bestimmt und besitzt nur die cyclische Gruppe G_8 von acht Collineationen M^n $(n = 0, 1, \ldots 7)$.

VIII. Collineationen von der Periode neun.

§. 49. Die dritte Potenz der nonären Collineation Θ ist eine tricyclische Collineation. Dieselbe kann planar, central oder geschaart sein.

Der erste und letzte Fall kann für die Flächen F' dritter Ordnung nicht auftreten. Denn wären $\Theta^3 = \Omega$ eine geschaart-tricyclische Collineation, welche F in sich transformiert, dann haben wir die äquianharmonische Fläche. Diese besitzt zwar nonäre Collineationen Θ, aber nur solche, deren dritte Potenzen centrale Collineationen sind,

Wäre aber $\Theta_3 = \Pi$ eine planar-tricyclische Collineation, welche F ungeändert lässt, dann treten (§. 7) drei Tripelpunkte α, β, γ auf, und die Ebenen durch die Gerade $\overline{\alpha\,\beta\,\gamma}$ sind Coïncidenzebenen von Π. Sie müssen daher für Θ entweder auch Coïncidenzébene sein, oder sie müssen Cyclen zu drei bilden. In beiden Fällen ist $\overline{\alpha\,\beta\,\gamma}$ eine Coïncidenzgerade der Collineation Θ und die drei

[1]) Dies folgt sofort, wenn man die Punkte $\beta_i\,\beta_i'$ wie auf pag. 40 Fußnote als i und i' auf einen Kreis bringt, so dass α und σ die imaginären Kreispunkte werden. Es stehen vermöge der numerischen Werte der Invarianten die Punkte 3, 5 um $^1/_8$ des Kreisumfanges von einander ab, also auch 5 und 4 und 4 und 6. Der projectivischen Zuordnung β_3, β_5 entspricht also die Rotation des Kreises durch den Winkel von 45°, welche auch 5 mit 4, 4 mit 6, 6 mit 3′ 3′ mit 5′, 5′ mit 4′, 4′ mit 6′ und 6′ mit 3 zur Deckung bringt.

Digitized by Google

Punkte α, β, γ sind entweder Coïncidenzpunkte oder entsprechen einander cyclisch in Θ. Die Punkte wären daher für $\Pi = \Theta^3$ Coïncidenzpunkte, was nicht statthaben kann. Es kann daher Θ^3 nicht planar sein.

§. 50. Mithin bleibt nur der Fall übrig, dass $\Theta^3 = \Phi$ eine centrale Collineation ist, deren Centrum $\mathfrak{a}$ und deren Collineationsebenen $\mathfrak{A}$ sei. Nach § 11 schneidet $\mathfrak{A}$ die F in einer Curve dritter Ordnung C^3, die aus $\mathfrak{a}$ durch einen Kegel projiciert wird, der F längs C^3 osculiert. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ sind Coïncidenzelemente für Θ. Die neun Wendepunkte der C^3 sind Tripelpunkte für F. Sie mögen in folgender Weise auf die vier Dreiecke vertheilt sein.

$\alpha\ \alpha'\ \alpha''$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta'\ \gamma''$	$\alpha\ \beta''\ \gamma'$
I. $\beta\ \beta'\ \beta''$	II. $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	III. $\alpha'\ \beta''\ \gamma$	IV. $\alpha'\ \beta\ \gamma''$
$\gamma\ \gamma'\ \gamma''$	$\alpha''\ \beta''\ \gamma''$	$\alpha''\ \beta\ \gamma'$	$\alpha''\ \beta'\ \gamma$

Die Collineation Θ induciert in $\mathfrak{A}$ eine tricyclische Collineation Θ_0, die aus $\mathfrak{a}$ durch eine tricyclische Collineation in Bündel $[\mathfrak{a}]$ projiciert wird, und die identisch ist mit den von Θ in $[\mathfrak{a}]$ inducierten.

In dieser Collineation Θ_0 können keine drei Wendepunkte einer Geraden einen Cyclus bilden. Denn würden etwa α, α', α'', welche auf der Geraden a liegen sollen, ein Tripel von Θ_0 bilden, so thäten dies auch β, β', β'' auf der Geraden b und γ, γ', γ'' auf der Geraden c. Infolge dessen wären a, b, c drei Coïncidenzgeraden von Θ_0 also auch von Θ, mithin bildeten die vier Ebenen $\overline{\mathfrak{a}a}$, $\overline{\mathfrak{a}b}$, $\overline{\mathfrak{a}c}$ und $\mathfrak{A}$ das Haupttetraeder der Collineation Θ. Die tricyclisch-planare Collineation $A.A'' = \Pi$, welche auch F in sich überführt, hat aber, wie sofort ersichtlich, die Ebenen $\overline{\mathfrak{a}b}$ und $\overline{\mathfrak{a}c}$, als auch den ganzen Büschel durch a zu Coïncidenzebenen. Daher sind Π und Θ miteinander vertauschbar.

In der Ebene $\mathfrak{A}$ induciert Π eine Collineation Π_0, welche mit Θ_0 identisch ist, es wird also $\Pi_0^2\,\Theta_0$ die Identität in $\mathfrak{A}$ hervorbringen. Da nun $\Pi^2\,\Theta = \Theta\,\Pi^2$ eine nonäre Collineation ist, denn es ist $(\Pi^2\,\Theta)^3 = \Pi^2\,\Theta.\Pi^2\,\Theta.\Pi^2\,\Theta = \Pi^6\,\Theta^3 = \Theta^3 = \Phi$, so wäre dieselbe central, weil sie in der Ebene $\mathfrak{A}$ die Identität $\Pi_0^2\,\Theta_0$ induciert. Eine Fläche dritter Ordnung kann aber keine centrale Collineation von der Periode neun zulassen, welche F in sich transformiert.

Da vermöge Θ_0 die vier Wendepunktsdreiecke in einander übergehen müssen, so werden also drei derselben sich cyclisch ineinander transformieren, während das vierte sich selbst nach Obigem so entsprechen muss, dass seine drei Seiten einem Cyclus angehören. Hieraus folgt, dass C_3 eine äquianharmonische Curve

Digitized by Google

dritter Ordnung ist[1]), deren Wendetangenten von α, α', α'' sich im Punkte $\mathfrak{a}_0$ auf b und c, die von β, β', β'' in $\mathfrak{b}_0$ auf a und c und die von γ, γ', γ'' in $\mathfrak{c}_0$ auf a und b schneiden.

Die Tritangentialebenen der F in $\alpha, \alpha', \alpha''$ gehen daher durch die Gerade $\overline{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0}$ und F ist nach §. 27 die äquianharmonische Fläche dritter Ordnung.

IX. Collineationen von der Periode zwölf.

§. 51. Ist N eine Collineation von der Periode zwölf, welche F ungeändert lässt, so hat die Fläche auch eine quaternäre Collineation N^3.

Dieselbe kann von der Art Δ oder Δ sein. (§. 30). Nun fanden wir im §. 33, dass die Fläche F mit einer quaternären Collineation ∇ eine Collineation N von der Periode 12 besitzen kann. Sie hat gleichzeitig dann eine tricyclisch centrale Collineation Φ und lässt eine Gruppe von 108 Collineationen in sich zu. Die Gruppe wird durch N bestimmt und F ist projectivisch festgelegt, da ihre Invarianten numerische Werte haben.

Die Flächen mit einer quaternären Collineation Δ weisen aber keine Collineationen von der Periode 12 auf, mögen sie projectivisch bestimmt sein oder nicht.

---

[1]) Es sei a, b, c das Dreieck, dessen Seiten einem Cyclus von Θ_0 angehören und es möge α dem Punkte β entsprechen, dann kann der diesem entsprechende Punkt γ' oder γ'' sein, denn wäre es γ, so würden nach obigem Schema der 12 Wendepunktsgeraden drei in einer Geraden liegende Wendepunkte einen Cyclus bilden. Es mögen α, β, γ', einen Cyclus von Θ_0 bilden. Dann muss dem Punkte α' der Punkt β' entsprechen; denn wären $\alpha' \beta''$ homologe Punkte, so müsste, da α', β'', γ auf einer Geraden liegen, dem β'' der Punkt γ'' entsprechen, dann müssten schließlich α'', β', γ auch ein Tripel bilden, was nicht zulässig ist, da diese auf einer Geraden liegen. Wir haben also folgende Tripel vermöge

$$\Theta_0) \quad \ldots \quad \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma'' \end{matrix}$$

Je drei untereinander stehende bilden ein solches. Die Collineation $\Pi = \Gamma' A$ transformiert C^3 auch in sich und zwar bilden

$$\Pi = \Gamma' A) \qquad \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma \\ \beta'' & \beta & \beta' \end{matrix}$$

je ein Tripel einander homologer Punkte. Folglich wird auch die Collineation $\Pi\,\Theta_0$ die C^3 in sich transformieren. Diese ist aber central, denn die Punkte α, α', α'' sind Coincidenzpunkte und β, β', β'' sowie γ, γ', γ'' sind zwei Tripel. Der Schnittpunkt $\mathfrak{a}_0$ von b und c ist Collineationscentrum, a Axe derselben. Es schneiden sich daher die Wendetangenten von α, α', α'' in $\mathfrak{a}_0$. Dasselbe folgt für die Wendetangenten in β, β', β'', die sich in $\mathfrak{b}_0$ dem Schnitt von a und c treffen und von den Wendetangenten in γ, γ', γ'', die sich in $\mathfrak{c}_0$ auf a und b schneiden. Die C^3 ist also die äquianharmonische Curve dritter Ordnung. Man erkennt leicht, dass es 2×6 Collineationen von der Art Θ_0 gibt, die C^3 in sich überführen.

Digitized by Google

Tritt daher eine Collineation von der Periode 12 auf, welche eine Fläche dritter Ordnung ungeändert lässt, so ist diese stets die im §. 33 und §. 34 betrachtete Fläche dritter Ordnung mit der Gruppe G_{108} von 108 Collineationen.

X. Schlussbetrachtung.

§. 52. Wir haben im §. 1. gezeigt, dass der Index n einer Collineation, welche die Fläche dritter Ordnung in sich transformieren soll, die Form $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ haben muss.

Im Abschnitte V erkannten wir, dass die Fläche dritter Ordnung, welche eine quinäre Collineation zulässt, projectivisch, d. h. bis auf Raumcollineationen, vollständig bestimmt ist, und dass sie keine Collineation vom höherem Index als fünf besitzt. Es kann daher γ nur den Wert 1 haben und es muss, wenn $\gamma = 1$ ist $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sein. Für alle übrigen Flächen dritter Ordnung kann daher n nur die Form $2^\alpha . 3^\beta$ haben.

Wäre $\alpha > 3$ so würde die Collineation von der Periode $2^\alpha . 3^\beta$ auch eine Collineation von der Periode $2^3 = 8$ nach sich ziehen. Die Fläche dritter Ordnung aber, welche eine Collineation von der Periode 8 besitzt, ist nach VII projectivisch bestimmt und besitzt keine Collineation von höherem Index als 8. Es muss daher $\alpha \leqq 3$, und für $\alpha = 3$ ist nur $\beta = 0$ zulässig.

Ebenso folgert man, dass wenn $\beta > 2$ wäre, eine Collineation von der Periode $3^2 = 9$ existierte, welche F in sich transformiert. Nach VIII ist aber die Fläche mit einer nonären Collineation projectivisch bestimmt und sie enthält keine Collineation von höherem Index als 9. Es muss also $\beta \leqq 2$ und für $\beta = 2$ überdies $\alpha = 0$ sein.

Wir haben also als größten Wert von n die Zahl $2^2 . 3 = 12$.

Projectivisch bestimmt wird eine Fläche dritter Ordnung wenn sie zulassen soll:

1. Eine ternär-gescharte Collineation (äquianharmonische Fläche).
2. Eine Collineation von der Periode fünf (Diagonalfläche).
3. Eine Collineation von der Periode sechs, deren Quadrat eine geschaart-tricyclische ist (1).
4. Eine Collineation von der Periode acht. (harmonische Fläche).
5. Eine Collineation von der Periode neun, was auf den ersten Fall zurückführt.
6. Eine Collineation von der Periode zwölf.

Digitized by Google

Neue Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für Kegelschnitte.

Von **Eduard Janisch** in Bielitz.

Es sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer auf die Hauptaxen bezogenen Ellipse. Man hat dann bekanntlich für die Coordinaten des Mittelpunktes Ω des osculierenden Kreises im Punkte $P\ (x',\ y')$ der Ellipse die Werte:

$$X = + \frac{c^2}{a^4} x'^3,\ Y = - \frac{c^2}{b^4} y'^3,\ \text{wo } c^2 = a^2 - b^2 \text{ ist.}$$

Wir stellen uns nun die Frage nach der Enveloppe der Inversen der über den Verbindungsstrecken der einzelnen Krümmungsmittelpunkte mit dem Mittelpunkte O der Ellipse als Durchmesser construierten Kreise für O als Inversionscentrum und für c^2 als Inversionspotenz. [1])

Wir haben als Gleichung eines solchen Kreises K:

$$x^2 + y^2 = x\,X + y\,Y;$$

seiner Inversen kommt daher die Gleichung zu:

$$x\,X + y\,Y = c^2,$$

oder

$$x \frac{x'^3}{a^4} - y \frac{y'^3}{b^4} = 1.$$

Differentieren wir die Gleichung, so kommt:

$$x \frac{x'^2}{a^4} - y \frac{y'^2}{b^4} \cdot \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

[1]) Die Wahl von $-c^2$ als Inversionspotenz könnte ebensogut platzgreifen. Die Modificationen, welche hiedurch die nachstehenden Entwicklungen und die aus ihnen gezogenen Consequenzen erfahren, sind indessen so naheliegend, dass der Hinweis auf diesen Umstand genügt.

Digitized by Google

Hierin den Wert von

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

eingeführt, haben wir schließlich:

$$x\frac{x'}{a^2} + y\frac{y'}{b^2} = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $x\frac{x'^3}{a^4} - y\frac{y'^3}{b^4} = 1$ liefert für x, y:

$$x = \frac{a^2}{x'},\ y = -\frac{b^2}{y'},\ \text{da}\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\ \text{ist.}$$

Die so erhaltenen Werte für x, y sind die Coordinaten des Berührungspunktes Π der Tangente $xX + yY = 1$ der gesuchten Enveloppe.

Wir wollen den Punkt Π und die Tangente $xX + yY = 1$ als zum Punkte $P(x', y')$ der Ellipse gehörig bezeichnen und erkennen nun sofort aus der Form der Ausdrücke für die Coordinaten von Π, dass die Abscisse x gleichkommt der Abscisse des Schnittpunktes der Hauptaxe der Ellipse und der an die Curve in P gezogenen Tangente, während die Ordinate y von Π bloß dem Zeichen nach verschieden ist von der Ordinate des Schnittpunktes jener Tangente mit der Nebenaxe. Hiernach ist die Construction des zu irgend einem Ellipsenpunkte P gehörigen Punktes Π evident. Beiläufig sei bemerkt, dass die Gerade $O\Pi$ offenbar zur Elipsentangente in P parallel läuft.

Substituieren wir jetzt in die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ für x', y' die sich ergebenden Werte in den x, y des Punktes Π, so finden wir die Gleichung des Ortes aller Punkte Π:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = x^2 y^2.$$

Diese Punkte erfüllen demnach eine Curve $C^{(4)}$ vierter Ordnung. Gelingt es uns, eine einfache Tangentenconstruction für diese Curve zu finden, so haben wir damit augenscheinlich auch eine einfache Construction für die Krümmungsmittelpunkte der gegeben Ellipse gewonnen. Denn die Senkrechte aus dem Mittelpunkte O der Ellipse auf irgend eine Tangente der $C^{(4)}$ geht der Definition der Curve zufolge stets durch den Mittelpunkt Ω des osculierenden Kreises im Ellipsenpunkte P, welcher dem Berührungspunkte Π jener Tangente der $C^{(4)}$ entspricht.

Solche Tangentenconstructionen ergeben sich aber unschwer, wenn man die $C^{(4)}$ darstellt als Projectionscurve des Schnittes zweier Flächen zweiter Ordnung.

Betrachten wir beispielsweise die beiden Flächen:

Digitized by Google

$$xy = az,\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2z^2,$$

so sehen wir unmittelbar, dass die Projection ihrer Schnittcurve $\mathfrak{C}^{(4)}$ auf die xy-Ebene mit unserer Curve $C^{(4)}$ identisch ist, da das Resultat der Elimination von z aus den beiden Flächengleichungen mit der Gleichung der $C^{(4)}$ übereinstimmt.

Nun gehört die erste der beiden Flächengleichungen einem orthogonalen hyperbolischen Paraboloide an, dessen Richtebenen die xz- und die yz-Ebene sind, während die x- und die y-Axe der Fläche als Erzeugende angehören. Ist Π die Projection irgend eines Punktes $\mathfrak{P}$ des Paraboloides auf die xy-Ebene, so ist demnach die Verbindungslinie der Fußpunkte der von Π auf die x- und auf die y-Axe gefällten Perpendikel die Schnittlinie der xy-Ebene und der Tangentialebene der Fläche in $\mathfrak{P}$.

Die zweite der Flächengleichungen bestimmt einen Kegel zweiter Ordnung mit dem Ursprung O als Centrum. Der Kegel wird von der Ebene $z = b$ in einer Ellipse geschnitten, deren Projection auf die xy-Ebene mit der gegebenen Ellipse coincidiert. Demzufolge wird die Schnittlinie der xy-Ebene und der Tangentialebene in irgend einem Punkte $\mathfrak{P}$ des Kegels mit dem der Richtung $O\Pi$ conjugierten Diameter unserer Ellipse übereinstimmen, wenn Π wiederum die Projection von $\mathfrak{P}$ auf die xy-Ebene bedeutet.

Wenn also $\mathfrak{P}$ ein beiden Flächen gemeinsamer Punkt — ein Punkt der $\mathfrak{C}^{(4)}$ — ist, dann gehört Π der $C^{(4)}$ an und die Tangente in Π an die $C^{(4)}$ geht durch den Schnittpunkt des der Richtung $O\Pi$ conjugierten Durchmessers (d. i. OP) und der Verbindungslinie der senkrechten Projectionen von Π in die Axen der Ellipse.

Wir haben demnach die folgende Krümmungsmittelpunkt-Construction für einen Punkt P einer Ellipse:

> „Man ziehe in P die Tangente t und die Normale n an die Ellipse, ferner durch den Mittelpunkt O eine Parallele zu t. Letztere bringe man in Π zum Schnitte mit der durch den Schnittpunkt der t und der Hauptaxe gezogenen Parallelen zur Nebenaxe. Hierauf verbinde man Π mit dem Schnittpunkte der OP und der rücksichtlich der Hauptaxe zur t symmetrischen Tangente der Ellipse. Es trifft alsdann die aus O auf jene Verbindungsgerade gefällte Senkrechte die Normale n im Krümmungsmittelpunkte Ω."

In principiell gleicher Art können wir indessen noch eine zweite Methode zur Construction der Krümmungscentra ableiten. Schreiben wir nämlich die Gleichung der $C^{(4)}$ in der Form:

$$y^2(x^2 - a^2) = b^2x^2$$

und setzen wir

$$yz = bx,\ z^2 = x^2 - a^2,$$

Digitized by Google

so ist das Resultat der Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen übereinstimmend mit der Gleichung der $C^{(4)}$, d. h. die $C^{(4)}$ darf aufgefasst werden als die Projection auf die xy-Ebene einer Raumcurve $\mathfrak{C}_1^{(4)}$, welche die Schnittlinie der beiden Flächen $yz = bx$ und $z^2 = x^2 - a^2$ ist.

Es gelingt nun wiederum leicht, den Schnittpunkt irgend einer Tangente der $\mathfrak{C}_1^{(4)}$ mit der xy-Ebene anzugeben, wenn die Projection Π des Berührungspunktes $\mathfrak{P}_1$ auf die xy-Ebene gegeben vorliegt. Damit ist dann auch die Tangente in Π an die $C^{(4)}$ bestimmt.

Wir erkennen zuförderst in der ersten der beiden Flächen ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, welches die y- und die z-Axe zu Erzeugenden und die xz-, sowie die xy-Ebene zu Richtebenen besitzt. Die Schnittlinie der xy-Ebene mit der Tangentialebene in einem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Fläche wird demnach gefunden als Parallele zu $O\Pi$ durch den Schnittpunkt der Ordinatenaxe mit der durch Π gelegten Parallelen zur Abscissenaxe, wenn Π die Projection von $\mathfrak{P}_1$ auf die xy-Ebene bedeutet.

Die zweite Fläche ist hingegen ein gleichseitiger hyperbolischer Cylinder, mit zur y-Axe parallelen Erzeugenden. Insbesondere sind die durch die Scheitel A, A_1 der großen Axe der Ellipse gehenden Parallelen zur y-Axe seine Scheitelerzeugenden und es ist die natürlich ebenfalls zur y-Axe parallele Schnittlinie der Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{P}_1$ des Cylinders mit der xy-Ebene durch die Punkte A, A_1 harmonisch getrennt von der durch Π (der Projection von $\mathfrak{P}_1$ auf die xy-Ebene) zur y-Axe parallel geführten Geraden.

Ist jetzt $\mathfrak{P}_1$ ein gemeinsamer Punkt beider Flächen — ein Punkt der $\mathfrak{C}_1^{(4)}$, Π also ein Punkt der $C^{(4)}$, dann erhalten wir einen Punkt der Tangente in Π an die $C^{(4)}$ und zwar den Schnittpunkt der xy-Ebene mit der Tangente in $\mathfrak{P}_1$ an die $\mathfrak{C}_1^{(4)}$ und somit weiterhin den Krümmungsmittelpunkt Ω für den zu Π gehörigen Punkt P der Ellipse in folgender Art:

„Man ziehe durch die Projection des Punktes Π in die Nebenaxe der Ellipse die Parallele zur Tangente t und bringe diese Parallele zum Schnitte mit der durch den Ellipsenpunkt P zur Nebenaxe parallel geführten Geraden. Den Schnittpunkt verbinde man hierauf mit Π und fälle aus dem Mittelpunkte O der Ellipse die Senkrechte auf die Verbindungslinie; diese Senkrechte trifft dann die Normale n in Ω."

Es unterliegt nicht der geringsten Schwierigkeit, eine vollständig analoge Discussion, ausgehend von der Form $x^2(y^2 - b^2) = a^2 y^2$ der Gleichung der $C^{(4)}$, durchzuführen. Das Ergebnis überblickt man nach dem Vorangehenden ohneweiters; es wird lauten:

„Zieht man durch den zu P bezüglich der Hauptaxe symmetrischen Punkt der Ellipse zu

Digitized by Google

dieser Axe die Parallele und verbindet den Schnittpunkt der Parallelen und der Tangente t in P mit Π, so geht die Senkrechte aus dem Mittelpunkte O auf diese Verbindungslinie durch Ω."

Beide Resultate lassen sich nun zu dem Satze verbinden:

Sind P', P'' zwei diametral gegenüberliegende Punkte einer Ellipse und ist P der rücksichtlich der Hauptaxe zu P' symmetrische Punkt der Curve, so geht die Senkrechte durch den Mittelpunkt O auf die Verbindungslinie des Schnittpunktpaares (t', PP''), (t'', PP') — unter t', t'' die Tangenten in P', resp. P'' verstanden — durch die Krümmungsmittelpunkte in P', P''."

Es bedarf wohl kaum der ausdrücklichen Bemerkung, dass die hier gefundenen Constructionen und der vorstehende Satz unverändert für die Hyperbel gelten. Zum Schlusse wollen wir unsere Betrachtungsweise aber auch auf die Parabel ausdehnen. Es steht zwar von vorneherein zu erwarten, dass für die Parabel keine den vorigen Constructionen analoge hiedurch gefunden werden, allein es ergeben sich anderweitige Resultate von einigem Interesse.

Nehmen wir den Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel einer Parabel vom Parameter p zum Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Axe der Parabel zur Abscissenaxe, so lautet die Gleichung der Curve: $y^2 = 2p\,(x + p)$. Für die Coordinaten X, Y des Krümmungsmittelpunktes Ω für den Punkt $P(x', y')$ der Parabel haben wir die Werte:

$$X = 3\,(x' + p),\quad Y = -\frac{y'^3}{b^2}.$$

Nach früherem stellt alsdann die Gerade

$$x\,X + y\,Y = c^2$$

die Inverse des über der Verbindungsstrecke des Anfangspunktes O und des Krümmungsmittelpunktes Ω als Durchmesser beschriebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = x\,X + y\,Y$$

dar, wenn O das Inversionscentrum ist und c^2 die Inversionspotenz bedeutet.

Die Werte für X, Y eingeführt, haben wir daher als Gleichung jener Geraden

$$3\,(x' + p)\,x - \frac{y'^3}{p^2}\,y = c^2.$$

Dieselbe nach x' differentiert gibt:

$$x - \frac{y'^2}{p^2}\,\frac{dy'}{dx'}\,y = 0$$

Digitized by Google

oder wegen $\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{y'}$,

$$p\,x - y'\,y = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer zur Parabeltangente in (x', y') Parallelen durch den Ursprung O. Eliminieren wir nun aus den Gleichungen

$$3\,(x' + p)\;x - \frac{y'^3}{p^2}\,y = c^2,\; p\,x - y'\,y = 0 \text{ und } y'^2 = 2\,p\,(x' + p)$$

x' und y', so kommt als Gleichung der Einhüllenden der Geraden $x\,X + y\,Y = c^2$:

$$y^2 = \frac{p\,x^3}{2\,c^2}.$$

Diese Enveloppe ist also eine Neil'sche Parabel; sie wird identisch mit der Evolute $y^2 = \frac{8\,x^3}{27\,p}$ der gegebenen Parabel, wenn die Inversionspotenz $c^2 = \frac{27\,p^2}{16}$ gewählt wird.

Eine leichte Überlegung lässt uns schon die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

„Das Product der Entfernung irgend einer Tangente einer Neil'schen Parabel von der Spitze der Curve in die durch die Spitze gehende, zu jener Tangente normalen Sehne ist constant und zwar $= \frac{4q^2}{27}$, wenn $q\,y^2 = x^3$ die Gleichung der Neil'schen Parabel ist." —

Beachtung verdient die überaus einfache Beziehung zwischen den trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe der Normale im Punkte (x', y') und der Senkrechten zur zugehörigen Geraden $x\,X + y\,Y = c^2 = \frac{27\,p^2}{16}$. Die Werte der bezüglichen trigonometrischen Tangenten sind:

$$-\frac{y'}{p} \text{ und } \frac{Y}{X} = -\frac{y'^3}{3\,p^2\,(x' + p)} = -\frac{2\,y'}{3\,p}.$$

Letzterer Wert beträgt also gerade $\frac{2}{3}$ des ersteren. Da nun speciell die durch O gehende Senkrechte $(x\,Y - y\,X = 0)$ zur $x\,X + y\,Y = c^2$ den Krümmungsmittelpunkt $\Omega\,(X, Y)$ enthält, so haben wir auf Grund des gefundenen Resultates die folgende Construction für Ω:

„Man projiciere P in die Axe der Parabel nach P_0 und verlängere die Subnormale $\overline{P_0 N} = p$ um ihre halbe Länge über N hinaus bis P_1 und ziehe

Digitized by Google

durch den Krümmungsmittelpunkt O des Scheitels zur Geraden PP_1 die Parallele, deren Schnittpunkt mit der Normalen n des Punktes P schon den Punkt Ω ergibt."

Denn es ist $tan\,(PP_1, Ox) = \frac{2}{3}\,tan\,(PN, Ox)$, wie unmittelbar ersichtlich.

Wenn man bedenkt, dass die Gerade $xX + yY = \frac{27\,p^2}{16}$ offenbar ebenfalls eine Normale der Parabel ist, so drängt sich die Frage auf nach dem zugehörigen Parabelpunkt P' (x'', y'').

Die Gleichung der Normalen in P' lautet aber:

$$(x - x'')\,y'' + (y - y'')\,p = 0;$$

vergleichen wir diese Gleichung mit der dieselbe Gerade darstellenden Gleichung

$$xX + yY = 3\,(x' + p)\,x - \frac{y'^3}{p^2}\,y = \frac{27\,p^2}{16},$$

so ergibt sich zunächst durch Gleichsetzung der Richtungscoefficienten $-\frac{y''}{p} = \frac{3\,(x' + p)\,p^2}{y'^3} = \frac{3\,p}{2\,y''}$, demnach $y'' = -\frac{3\,p^2}{2\,y''}$, und daraus $x'' + p = \frac{y''^2}{2\,p} = \frac{9\,p^2}{16(x' + p)}$.

Für solche Punkte P', P'' ist also das Product der Ordinaten $-y'\,y''$ — sowohl, als auch das Product der vom Parabelscheitel aus gemessenen Abscissen $-(x' + p)\,(x'' + p)$ — constant. Alle diese Punktepaare bilden daher eine Involution und man wird leicht nachweisen, dass die Verbindungslinien der Punkte sämmtlicher Paare durch jenen Punkt der Parabelaxe gehen, welcher vom Scheitel die Entfernung $\frac{3}{4}\,p$ besitzt. Wegen $\frac{p}{y''} = -\frac{2\,y'}{3\,p} = \frac{Y}{X}$ gilt nun der Satz:

„Sind P, P' zwei Punkte einer Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und geht die Verbindungslinie PP' durch den Punkt $\left(\frac{3}{4}\,p,\ 0\right)$, so liegt der Krümmungsmittelpunkt von $\left.\begin{matrix} P \\ P' \end{matrix}\right\}$ auf der durch den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels gehenden Parallelen zur Tangente in $\left.\begin{matrix} P \\ P' \end{matrix}\right\}$."

Digitized by Google

Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art.

Von **Leopold Gegenbauer** in Wien.

In seiner im 25. Bande der „Proceedings of the London Mathematical Society" (p. 49–75) enthaltenen Abhandlung „On Bessels Functions and Relations connecting them with Hyper-Spherical and Spherical Harmonics" hat Herr E. W. Hobson u. a. folgende interessante Relationen abgeleitet:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^m(r\sin\vartheta)\sin^{m+1}\vartheta\, d\vartheta = \frac{J^{m+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m-\frac{1}{2}}(r\sin\vartheta)\sin^{m+\frac{1}{2}}\vartheta\, d\vartheta = \frac{J^m(r)}{\sqrt{r}}$$

$$e^{r\cos\varphi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r\sin\varphi) = \frac{\Pi(2\nu-1)\,(r\sin\varphi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{r\,C_\lambda^\nu(\cos\varphi)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)}$$

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r\sin\varphi) = \sqrt{2}\,\frac{\Pi(2\nu-1)\,(r\sin\varphi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) r^{\frac{2\nu+1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(2\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda-1}{\Pi(\lambda)\,\Pi(2\nu+2\lambda-1)} J^{\nu+2\lambda}(r)\, C_{2\lambda}^\nu(\cos\varphi)$$

und speciell für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r) = \sqrt{2}\,\frac{\Pi(2\nu-1)}{r\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu-1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(\lambda+\nu-1)}{\Pi(\lambda)}\right]^2 J^{\nu+2\lambda}(r)$$

in denen m eine ganze Zahl, ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

Digitized by Google

Diese Formeln gelten für jedes reelle ν, welches größer als $-\frac{1}{2}$ ist, und sind in allgemeinen Relationen enthalten, wie aus der von mir in den Jahren 1877 [1]) und 1881 [2]) mitgetheilten, für alle (reellen und complexen) ψ giltigen Gleichung

$$\int_0^{\pi} e^{ai\cos\varphi\cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi)\, C_n^{\nu}(\cos\varphi)\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d\varphi = i^n\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}.$$

(I)
$$\cdot\left[\frac{2^{2\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu-1)}\right]\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi\, C_n^{\nu}(\cos\psi)\, J^{n+\nu}(\alpha),$$ [3])

auf welche ich einen Beweis des Additionstheorems der Bessel'schen Functionen erster Art basiert habe, folgt.

Da ich einen Beweis dieser Gleichung bisher nicht veröffentlicht habe, so will ich zunächst einen solchen angeben.

Weil die Bessel'schen Functionen erster Art, wie ich wiederholt hervorgehoben habe, abgesehen von einem von x unabhängigen Factor die Coefficienten der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Functionen $C_n^{\nu}(x)$ sind, so besteht die Gleichung

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi) = \frac{(\alpha\sin\varphi\sin\psi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-1)}\int_{-1}^{+1} e^{\alpha z i\sin\varphi\sin\psi}(1-z^2)^{\nu-1}\,dz$$
$$\left(\nu > -\frac{1}{2}\right),$$

aus der die Beziehung

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi)\, C_n^{\nu}(\cos\varphi)\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d\varphi = \frac{(\alpha\sin\psi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-1)}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{\pi} C_n^{\nu}(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi\int_{-1}^{+1} e^{\alpha i(\cos\varphi\cos\psi + z\sin\varphi\sin\psi)}(1-z^2)^{\nu-1}\,dz$$

folgt.

---

[1]) „Zur Theorie der Bessel'schen Functionen". Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. 75. Band. II. Abth. In dieser Mittheilung habe ich diese Relation durch Trennung ihres reellen und imaginären Theiles in vier Formeln gespalten und darauf hingewiesen, dass der specielle Fall $\nu = 0$ derselben schon im Jahre 1824 von Bessel in seiner in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften enthaltenen Abhandlung „Untersuchung des Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht", abgeleitet wurde.

[2]) „Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten." Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe, 85. Band, II. Abth.

[3]) Den speciellen Fall $n = 0$ dieser Relation hat auf anderem Wege Herr Sonine in seiner im 16. Bande der „Mathematischen Annalen" (1880) enthaltenen Abhandlung „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries" hergeleitet

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\alpha^\nu e^{\alpha i(\cos\varphi\cos\psi+z\sin\varphi\sin\psi)} = 2^\nu \Pi(\nu-1)$$
$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda(\nu+\lambda) J_{(\alpha)}^{\nu+\lambda} C_\lambda^\nu(\cos\varphi\cos\psi+z\sin\varphi\sin\psi)$$

und daher wird:

$$\int_0^\pi e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi) C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi\,.$$
$$\cdot\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda(\lambda+\nu) J_{(\alpha)}^{\lambda+\nu}\int_0^\pi C_n^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\nu-1}\cdot$$
$$\cdot C_\lambda^\nu(\cos\varphi\cos\psi+z\sin\varphi\sin\psi)\, dz.$$

Da aus dem durch die Gleichung

$$C_\lambda^\nu(\cos\varphi\cos\psi+z\sin\varphi\sin\psi) = \Pi(2\nu-2)\left[\frac{2^\lambda\Pi(\lambda+\nu-1}{\Pi(\nu-1)}\right]^2\cdot$$
$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda}(-1)^\varrho\frac{2\nu+2\varrho-1}{\Pi(\lambda-\rho)\Pi(2\nu+\lambda+\rho-1)} C_\lambda^{\nu,\varrho}(\cos\varphi) C_\lambda^{\nu,\varrho}(\cos\psi) C_\varrho^{\frac{2\nu-1}{2}}(z)$$

gegebenen Additionstheoreme der Functionen $C_n^\nu(x)$, in welchem

$$C_\lambda^{\nu,\varrho}(x) = \frac{\Pi(\lambda-\rho)\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\lambda-\varrho}\Pi(\lambda+\nu-1)}(x^2-1)^{\frac{\varrho}{2}} C_{\lambda-\varrho}^{\nu+\varrho}(x)$$

ist, auf Grund der bekannten Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} C_n^\nu(x)\, C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx =$$

(II)

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)}{(n+\nu)\Pi(n)}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2\delta_{m,n}\,(\delta_{\lambda,\mu}=0\ \lambda\gtrless\mu;\ \delta_{\lambda,\lambda}=1)$$

die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} C_\lambda^\nu(\cos\varphi\cos\psi+z\sin\varphi\sin\psi) C_\varrho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= (-1)^\varrho\frac{2^{2\lambda+2\nu-1}\Pi(2\nu+\rho-2)[\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{\Pi(\rho)\Pi(\lambda-\rho)\Pi(2\nu-2)\Pi(2\nu+\lambda+\rho-1)} C_\lambda^{\nu,\varrho}(\cos\varphi) C_\lambda^{\nu,\varrho}(\cos\psi),$$

Digitized by Google

folgt, so verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende

$$\int_0^\pi e^{\alpha i \cos\varphi \cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha \sin\varphi \sin\psi)\, C_n^\nu(\cos\varphi) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2^{\frac{4\nu-1}{2}} \sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi\, [\Pi(\nu-1)]^2}{\sqrt{\alpha\pi}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda (\lambda+\nu) J^{\lambda+\nu}(\alpha)\, C_\lambda^\nu(\cos\psi).$$

$$\cdot \int_0^\pi C_\lambda^\nu(\cos\varphi)\, C_n^\nu(\cos\varphi) \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi,$$

welche nach (II) unmittelbar die Relation (I) liefert.

Dieselbe zeigt, dass sich $e^{\alpha i \cos\varphi \cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha \sin\varphi \sin\psi$ in folgende nach den Functionen $C_n^\nu(\cos\varphi)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt:

III
$$e^{\alpha i \cos\varphi \cos\psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha \sin\varphi \sin\psi) = 2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2 (\sin\varphi \sin\psi)^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda \frac{(\lambda+\nu)\,\Pi(\lambda)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)} J^{\nu+\lambda}(\alpha)\, C_\lambda^\nu(\cos\varphi)\, C_\lambda^\nu(\cos\psi).$$

Setzt man in (I) $n=0, \nu=m+\frac{1}{2}, m$, so erhält man sofort die zwei Hobson'schen Integrale.

Wird in (III) $\rho=\frac{\pi}{2}, \alpha=r$ gesetz, so ergibt sich wegen

$$C_{2\nu+1}^\nu = 0,\ C_{2r}^\nu = \frac{\Pi(\nu+r-1)}{\Pi(r)\,\Pi(\nu-1)}$$

die Erweiterung der zweiten Hobson'schen Reihe für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$ und aus ihr die analoge Erweiterung der dritten Hobson'schen Formel.

Macht man endlich in (III) $\psi = i\omega$ und bestimmt die Grenze der beiden Seiten dieser Gleichung für $\lim \omega = \infty$, so entsteht die Ausdehnung der erten Reihe des Herrn Hobson auf jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

Digitized by Google

TESCHEN.
K. und k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska.

Digitized by Google

X. Jahrgang 1899. *3. Vierteljahr.*

MONATSHEFTE

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JUN 24 1899
CAMBRIDGE, MASS.

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR CULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. G. v. ESCHERICH und Prof. L. GEGENBAUER

IN WIEN.

WIEN, 1899.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Digitized by Google

Bezugspreis: Jährlich 7 fl.

INHALT.

Seite

Studnička, F. J., Prof., Dr., Beitrag zur Theorie der cyclischen Determinanten 193

Klug, L., Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschließende Bemerkungen 198

Klekler, Paula, Note über die Polynomialcoefficienten 218

Janisch, Eduard, Über die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien 223

Igel, B., Einiges aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen 229

Schwarz, A., Über die Krümmung der cyklichen Curven nebst einem Beitrage zur neuern Dreiecksgeometrie 250

Literatur-Berichte.

Oltramare, G., Calcul de Généralisation. 31

Engel, Friedrich, und *Stäckel, Paul*, Urkunden zur Geschichte der nicht-euklicischen Geometrie 31

Appell, M., Elements d'analyse mathématique 32

Leiss, C., Die optischen Instrumente der Firma Fuess 33

Poincaré, H, Cours de physique mathématique 33

Arnal, L. und *Gauthier, G.*, Encyclopédie théorique 34

Murani, Oreste, Prof., Luce e raggi Röntgen 35

Nédélec, G., Le calcul vectoriel 35

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. . 36

Tisserand, F., Leçons sur la détermination des orbites 37

Longchamps, G., Cours de problèmes 38

Wiedemann, G. Die Lehre von der Elektricität IV. 38

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JUN 24 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Beitrag zur Theorie der cyclischen Determinanten.

Von Prof. Dr. F. J. **Studnička** in Prag.

Bekanntlich wird der Wert einer cyclischen Determinante n^{ten} Grades

$$C_n = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n) \tag{1}$$

gegeben durch die Formel

$$C_n = (-1)^{(n-1)_2} \prod_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k), \tag{2}$$

wenn hiebei die Bezeichnung

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} \tag{3}$$

eingeführt wird und

$$\varepsilon_k\ (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

die Wurzeln der binomischen Gleichung

$$x^n - 1 = 0 \tag{4}$$

vorstellen.

Bilden nun die Elemente

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

eine arithmetische Reihe erster Ordnung, so dass allgemein

$$a_k - a_{k-1} = d, \tag{5}$$

ist, so erhält man statt der complicirten Auswertungsformel (2) die einfachere

$$C_n = (-1)^{n_2}\, n^{n-2} (n_1 a_1 + n_2 d)\, d^{n-1}, \tag{6}$$

wenn wir mit n_k den k^{ten} Binomialcoefficienten bezeichnen.

Digitized by Google

Vergleichen wir nun diese Formel mit (2), so können wir folgendes Theorem ableiten:

Stellen die n Wertepaare

$$\varepsilon_k \text{ und } k(\varepsilon_k),\ (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

die complexen conjugierten Wurzeln der reciproken Gleichung

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + x + 1 = 0 \tag{7}$$

vor, und bildet man das Polynom

$$f(x) = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \cdots + (a+2nd)x^{2n}, \tag{8}$$

so erhält man zunächst die Relation

$$\prod_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k) f(k(\varepsilon_k)) = (2n+1)^{2n-1} d^{2n}; \tag{9}$$

wird ferner erwogen, dass gleichzeitig

$$f(\varepsilon_k) = A_k + i B_k,$$
$$f\big(k(\varepsilon_k)\big) = A_k - i B_n,$$

ist, so liefert die letzte Relation die Formel

$$\prod_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2) = (2n+1)^{2n-1} d^{2n}, \tag{10}$$

deren Bedeutung dem Vorangehenden entsprechend zu interpretieren ist.

Hätte man z. B. im einfachsten Falle

$$a = 1,\ d = 3,\ n = 1,$$

so erhielte man die Identität

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3.3^2 = 27.$$

Stellen jedoch die Elemente einer cyclischen Determinante n^{ten} Grades eine geometrische Reihe vor, so dass man hat

$$C_n \equiv (1\, x^1\, x^2 \ldots x^{n-1}), \tag{13}$$

so ist auch dann ihre Auswertung sehr einfach, indem sich in diesem Falle ergibt

$$C_n = (-1)^{(n-1)_2} (1 - x^n)^{n-1} = (-1)^{n_2} (x^n - 1)^{n-1}, \tag{14}$$

Digitized by Google

wie leicht zu begründen ist, wenn man den Grad derselben nach bekannter Regel um eine Einheit erniedrigt; man erhält nämlich

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & \ldots, x^{n-2}, x^{n-1} \\ x, & x^2, & \ldots, x^{n-1}, 1 \\ \vdots & & \\ x^{n-2}, x^{n-1}, & \ldots, x^{n-4}, x^{n-3} & \\ x^{n-1}, & 1, & \ldots, x^{n-3}, x^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & (1-x^n) \\ 0, & 0, & \ldots, (1-x^n), & . & \\ \vdots & & & & \\ 0, & (1-x^n), \ldots, & ., & . & \\ (1-x^n), & ., & \ldots, & ., & . \end{vmatrix},$$

woraus sich Formel (14) sofort ableiten lässt.

Wird indessen die Auswertung auch nach der allgemeinen Formel vorgenommen, so gelangt man, da

$$f(\varepsilon_k) = 1 + x\,\varepsilon_k + x^2\,\varepsilon_k^2 + \cdots + x^{n-1}\,\varepsilon_k^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x\,\varepsilon_k},$$

ist schließlich zu der Identität

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x\,\varepsilon_k) = 1 - x^n, \tag{15}$$

aus welcher folgt und zwar einerseits, wenn K_n^m eine Combination m^{ter} Classe der n Elemente ε_k ausdrückt,

$$\Sigma K_n^m = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

und anderseits

$$K_n^m \equiv \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n = (-1)^{n-1},$$

was mit der Bedeutung der Einheitswurzeln ε_k übereinstimmt. Was also in der Theorie der algebraischen Gleichungen auf besondere Weise begründet werden muss, ergibt sich hier in einem speciellen Falle von selbst.

Schließlich wollen wir noch bemerken, dass in dem Falle, wo unsere Determinante (13) sich anticyclisch (gobbo circolante) gestaltet, also

$$C_n' \equiv \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, \ldots, x^{n-1} \\ -x, & x^2, & -x^3, \ldots, 1 \\ -x^2, & -x^3, & x^4, \ldots, x \\ \vdots & & \\ -x^{n-1}, & -1, & -x^2, \ldots, x^{n-2} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

ist auch deren Auswertung sehr einfach erfolgt, indem man hat

$$C_n' = (x^n + 1)^{n-1}, \tag{17}$$

wie durch Induction oder durch successive Herabsetzung des Determinantengrades gezeigt werden kann.

Digitized by Google

Ist also in Formel (13) x negativ und n eine ungerade Zahl, z. B.:

$$n = 2m + 1,$$

und vergleicht man unter dieser Voraussetzung, wo also

$$(18)\quad C''_{m+1} \equiv \begin{vmatrix} 1, & -x, & x^2, \ldots, & x^{2m} \\ -x, & x^2, & -x^3, \ldots, & 1 \\ x^2, & -x^3, & x^4, \ldots, & -x \\ \vdots & & & \\ x^{2m}, & 1, & -x, \ldots, & -x^{2m-1} \end{vmatrix},$$

die beiden Auswertungsformeln (14) und (17) mit einander so erhält man die interessante Relation

$$(19)\quad C'_{2m+1} = (-1)^m C''_{2m+1}.$$

Darnach ist z. B.:

$$C''_5 = \begin{vmatrix} 1, & -x, & x^2, & -x^3, & +x^4 \\ -x, & x^2, & -x^3, & +x^4, & 1 \\ x^2, & -x^3, & +x^4, & 1, & -x \\ -x^3, & x^4, & 1, & +x, & -x^2 \\ x^4, & 1, & -x, & x^2, & -x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & x^3, & x^4 \\ -x, & x^2, & x^3, & x^4, & 1 \\ -x^2, & -x^3, & x^4, & 1 & x \\ -x^3, & -x^4, & -1, & x, & x^2 \\ -x^4, & -1, & -x, & -x^2, & x^3 \end{vmatrix} = (x^5+1)^4,$$

obwohl im ersten Falle die mit der Nebendiagonale parallel laufenden Elementenreihen abwechselnd positiv und negativ sind, während im zweiten Falle alle links von der Hauptdiagonale stehenden Elemente negativ auftreten. Darnach ist z. B.:

$$= \begin{vmatrix} 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & 1, & -1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & -1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & -1, & -1, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & 1 \end{vmatrix} = 2^6,$$

was auch direct erhalten wird, wenn wir den Grad dieser anticyclischen Determinante um 1 erniedrigen, indem sich dann ergibt

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^6.$$

Digitized by Google

Dieselbe Determinante erinnert an eine ähnliche, wo nur die links von der Hauptdiagonale, dieser zunächst stehenden Elemente negativ auftreten, deren Typus also ist

$$(20) \qquad \delta_n \equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \ldots, & 1, 1 \\ -1, & 1, & 1, \ldots, & 1, 1 \\ 1, & -1, & 1, \ldots, & 1, 1 \\ 1, & 1, & -1, \ldots, & 1, 1 \\ \vdots & & & \\ 1, & 1, & 1, \ldots, & -1, 1 \end{vmatrix} = 2^{n-1},$$

wie denn überhaupt eine Determinante, deren Elemente theils positive, theils negative Einheiten sind, den Wert $k.2^{n-1}$ besitzt, wobei jedoch k auch Null sein kann. [1])

[1]) Vergleiche Studnička „Über eine neue Determinanteneigenschaft", Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1880.

Digitized by Google

Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschliessende Bemerkungen.

Von **L. Klug** in Klausenburg.

Im 62. Bande des Crelle'schen Journals, in dem Aufsatze „Über die Steiner'schen Gegenpunkte etc." von Staudt befinden sich (Seite 147–150) zwei Sätze, laut welchen man Pascal'sche Sechsecke aus sechs, sich zu dreien in ein Steiner'sches Gegenpunktepaar schneidenden Pascal'schen Geraden construieren kann. Die Sätze sagen ferner, dass diesen ∞^1 Pascal'schen Sechsecken umschriebenen Kegelschnitte einem Büschel mit zwei Paar conjugiert-imaginären Grundpunkten angehören, und dass man in jedem Kegelschnitte des Büschels zwei solche Sechsecke einbeschreiben kann, dass sechs ihrer Pascal'schen Geraden, mit den gegebenen coincidieren.

Diese Sätze, welche auch noch andere Eigenschaften der Sechsecke, so wie der ihnen umschriebenen Kegelschnitte ausdrücken, sind an der citierten Stelle nicht bewiesen, oder wenigstens folgen sie nicht unmittelbar aus den Vorhergehenden. Ich habe desshalb versucht diese, bisher wenig beachteten Sätze, die im siebenten Punkte dieses Aufsatzes mit geänderter Bezeichnung wörtlich folgen, zu beweisen.

* * *

1. Auf einen Kegelschnitt k nehmen wir sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 an. Dieselben sind die Eckpunkte von sechs einfachen Pascal'schen Sechsecken

$$1\,6\,3\,2\,5\,4 = p^{\mathrm{I}} \qquad 1\,6\,3\,4\,5\,2 = \pi^{\mathrm{IV}}$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6 = p^{\mathrm{II}} \qquad 1\,2\,3\,6\,5\,4 = \pi^{\mathrm{V}}$$
$$1\,4\,3\,6\,5\,2 = p^{\mathrm{III}} \qquad 1\,4\,3\,2\,5\,6 = \pi^{\mathrm{VI}}$$

von deren Pascal'schen Geraden $p^{\mathrm{I}}\ p^{\mathrm{II}}\ p^{\mathrm{III}}$ und $\pi^{\mathrm{IV}}\ \pi^{\mathrm{V}}\ \pi^{\mathrm{VI}}$ sich in Steiner'sches Gegenpunktepaar

Digitized by Google

$$P = (p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}), \quad \Pi = (\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$$

schneiden.

Durch P und Π ziehen wir je drei Geraden $p'^{\mathrm{I}}\, p'^{\mathrm{II}}\, p'^{\mathrm{III}}$, $\pi'^{\mathrm{IV}}\, \pi'^{\mathrm{V}}\, \pi'^{\mathrm{VI}}$ derart, dass $p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, p^{\mathrm{I}}\, p'^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{III}}\, p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p'^{\mathrm{II}}$, $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, p'^{\mathrm{III}}$, $\pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi'^{\mathrm{IV}}$, $\pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi'^{\mathrm{V}}$, $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi'^{\mathrm{VI}}$ harmonische Würfe bilden sollen.

Wird zur Abkürzung der Punkte $(p'^{i}\, \pi'^{l})$ mit $(p^{i}\, \pi^{l})'$ bezeichnet, dann lässt sieh zeigen, dass

$(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{IV}})'$ auf der Geraden 56, $(p^{\mathrm{II}}\, \pi^{\mathrm{IV}})'$ auf der Geraden 14,
$(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{V}})'$ „ „ „ 34, $(p^{\mathrm{II}}\, \pi^{\mathrm{V}})'$ „ „ „ 25,
$(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ „ „ „ 12, $(p^{\mathrm{II}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ „ „ „ 36,
$(p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{IV}})'$ auf der Geraden 23,
$(p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{V}})'$ „ „ „ 16,
$(p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ „ „ „ 45

liegt.

Es sind nämlich

$p^{\mathrm{I}}, \pi^{\mathrm{IV}}$, 56 die Diagonalen des Viereckes [16 25 45 36],
$p^{\mathrm{I}}, \pi^{\mathrm{V}}$, 34 „ „ [14 23 45 36],

also wird die Diagonale p^{I} die Punkte $(\pi^{\mathrm{IV}}, 56)$, $(\pi^{\mathrm{V}}, 36)$ so wie ihre Verbindungslinie harmonisch trennen von 45, 36. Aber die Schnittpunkte (12, 45), (12, 36) liegen bezw. auf $p^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}$, also geht die Gerade p'^{I} durch den Schnittpunkt von 12 mit der Geraden $|\,(\pi^{\mathrm{IV}}, 56)(\pi^{\mathrm{V}}, 34)\,|$. Dieser Schnittpunkt ist aber ein Diagonalpunkt des Vierseits $[\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, 56\, 34]$ welcher daher die Diagonale π^{VI} von den Seiten $\pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{V}}$ harmonisch trennt und als solcher auf der Geraden π'^{VI} liegt. Der Punkt $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ ist daher schließlich ein Punkt der Geraden 12.

Nachdem der Punkt $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ die Gerade p^{I} von 45, 36 und die Gerade π^{VI} von 34, 56 harmonisch trennt, so trennen die Punkte $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$, $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ sämmtliche Gegenseiten des Viereckes 3 4 5 6 harmonisch und sind daher conjugierte Pole in Hinsicht auf den Kegelschnitt k. Bezeichnet man also mit Staudt solche Punkte wie $(p^{i}\, \pi^{l})$, $(p^{i}\, \pi^{l})'$ gegenüberliegend, so hat man:

Die Pascal'schen Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$ der Sechsecke 1 6 3 2 5 4, 1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2 schneiden die Pascal'schen Geraden $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ der Sechsecke 1 6 3 4 5 2, 1 2 3 6 5 4, 1 4 3 2 5 6 in neun Punkten, und die drei Geraden $(p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}})'$, welche je zwei der drei ersten Pascal'schen Geraden von der dritten harmonisch trennen, schneiden die drei Geraden $(\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$, welche je zwei der anderen Pascal'schen Geraden von der dritten harmonisch trennen, ebenfalls in neun Punkten. Von diesen achtzehn Schnittpunkten sind je zwei gegenüberliegende, wie $(p^{i}\, \pi^{l})$, $(p^{i}\, \pi^{l})'$, conjugierte Pole in

Digitized by Google

Hinsicht auf den, dem Pascal'schen Sechseck 123456 umschriebenen Kegelschnitt k. Die neun letzteren Schnittpunkte $(p^i \pi^t)'$ liegen auf denjenigen neun Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden.

2. Die Strahlenpaare $p^{\mathrm{I}}\, p'^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}}\, p'^{\mathrm{II}}$, $p^{\mathrm{III}}\, p'^{\mathrm{III}}$ und $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi'^{\mathrm{IV}}$, $\pi^{\mathrm{V}}\, \pi'^{\mathrm{V}}$, $\pi^{\mathrm{VI}}\, \pi'^{\mathrm{VI}}$ sind conjugierte Strahlen einer Involution J_p und einer Involution J_π. Es seien $p^t\, p^{t'}$ und $\pi^u\, \pi'^u$ zwei beliebige Paare conjugierte Strahlen der involutorischen Büschel J_p, J_π, und l möge irgend einen der Zeiger IV, V, VI bedeuten.

Wegen J_p ist

$$\pi^l\,(p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, p^t) \overline{\wedge}\, \pi'^l\,(p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, p^t)'$$

und da die drei ersten Paare entsprechender Punkte conjugierte Pole sind in Hinsicht auf k, so sind es auch die Punkte $(\pi^l\, p^t)$, $(\pi^l\, p^t)'$. Daher werden in der projectiven Beziehung

$$p^t\,(\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^u) \overline{\wedge}\, p'^t\,(\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^u)'$$

die drei ersten, also auch das letzte entsprechende Punktepaar conjugierten Pole sein in Hinsicht auf k. D. h.:

Zwei beliebige conjugierte Strahlen des involutorischen Büschels J_p, schneiden zwei beliebige conjugierte Strahlen des involutorischen Büschels J_π, in conjugierten Polen in Hinsicht auf k.

Davon haben wir als besonderen Fall:

Die conjugiert-imaginären Doppelstrahlen $x x_1$, $y y_1$ der involutorischen Büschel J_p, J_π schneiden sich auf den Kegelschnitt k.

Oder allgemeiner gefasst:

Diejenigen conjugiert-imaginären Strahlenpaare, welche mit den durch ein Steiner'sches Gegenpunktepaar gehenden Pascal'schen Geraden äquianharmonisch liegen, schneiden sich auf den, dem Pascal'schen Sechseck umschriebenen Kegelschnitt.

Anmerkung. Trennen in J_p die conjugierten Strahlenpaare $P\Pi$, PO; r, r' einander harmonisch, und trennen in J_π die conjugierten Strahlenpaare ΠP, ΠO; ρ, ρ' einander ebenfalls harmonisch, dann schneidet jede der reellen Geraden

$$t_{135} = |\,(r\rho)\,(r'\rho')\,|,\quad t_{246} = |\,r\rho')\,r'\rho)\,|$$

die J_p und J_π in dieselbe involutorische Punktreihe. Die Geraden $P\Pi, t_{135}, t_{246}$ sind daher die reellen Diagonalen des imaginären Vierseits $x x_1\, y y_1$, und das Geradenpaar $t_{135}\, t_{246}$ trennt das Punktepaar $P\Pi$ harmonisch.

Ferner ist der Schnittpunkt O der Geraden $t_{135}\, t_{246}$, wie auch der Schnittpunkt der zu $|\,P\Pi\,|$ conjugierten Strahlen in J_p, J_π, der Pol der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf k.

Digitized by Google

3. Nachdem die Strahlen $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, x\, x_1$, $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, y\, y_1$ äquianharmonisch sind, so hat man

$$p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, x\, x_1 \ldots \overline{\wedge} \begin{cases} \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, y\, y_1 \ldots \\ \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, y\, y_1 \ldots \\ \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, y\, y_1 \ldots \\ \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, y_1\, y \ldots \\ \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{VI}}\, y_1\, y \ldots \\ \pi^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, y_1\, y \ldots . \end{cases}$$

Die Erzeugnisse der Strahlenbüschel, welche durch diese sechs projective Beziehungen bestimmt sind, seien die Kegelschnitte $k_5\, k_3\, k_1\, k_6\, k_4\, k_2$.

Diese Kegelschnitte gehen nicht bloß durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der drei ersten Paare $(p^i\, \pi^i)$, sondern auch durch die gegenüber liegenden Punkte $(p^i\, \pi^l)'$. Ausserdem gehen die drei ersten Kegelschnitte durch die conjugiert-imaginären Punkte $(x\, y)\, (x_1\, y_1)$, die drei übrigen durch die conjugiert-imaginären Punkte $(x\, y_1)\, (x_1\, y)$.

Also schneiden die Kegelschnitte $k\, k_1\, k_3\, k_5$ die Gerade t_{135}, und die Kegelschnitte $k\, k_2\, k_4\, k_6$ die Gerade t_{246}, in denselben zwei conjugiert-imaginären Punkten.

Die Kegelschnitte $k_1\, k_2\, k_3\, k_4\, k_5\, k_6$ gehen noch bezw. durch die Eckpunkte 1 2 3 4 5 6 des Pascal'schen Sechseckes.

Betrachtet man nämlich die Punkte

$$(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{IV}})'\; P(p^{\mathrm{II}}\, \pi^{\mathrm{V}})\; \Pi\, (p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'\, 5$$

als die auf einander folgenden Punkte eines einfachen Sechseckes, dann sind die auf einander folgenden Seiten desselben

$$p'^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi'^{\mathrm{IV}}\, 45\, 56,$$

von welchen sich die gegenüber liegenden in der Geraden $\overline{12}$ schneiden. Aber der Kegelschnitt, welcher durch die fünf ersten angenommenen Punkte geht, ist k_5, also geht k_5 auch durch den Punkt 5. Daher:

Drei durch einen Steiner'schen Punkt gehende Pascal'sche Geraden schneiden die drei durch seinen Gegenpunkt gehenden Pascal'schen Geraden in neun Punkten; von diesen liegen je drei, von welchen keine zwei derselben Pascal'schen Geraden angehören, mit den Steiner'schen Gegenpunkten und mit einem Eckpunkte des Pascal'schen Sechseckes auf einen Kegelschnitt. Es gibt sechs solche Kegelschnitte; von diesen schneiden drei und ebenso die übrigen drei, den dem Pascal'schen Sechseck umschriebenen Kegelschnitt k in denselben conjugiert-imaginären

Digitized by Google

Punkten. Der Schnittpunkt der zwei reellen Träger dieser zwei Paar conjugiert-imaginären Punkte ist der Pol der Verbindungsgeraden der Steiner'schen Gegenpunkte in Hinsicht auf k.

4. Betrachten wir das Punktepaar $P\Pi$ als einen degenerierten Kegelschnitt $[P\Pi]$, die Strahlen $p^i\, p'^i\, \pi^i\, \pi'^i$ als seine Tangenten. Beziehen wir diese Strahlen projectiv so auf einander, dass den Strahlen

$$p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$$

die Strahlen

$$\begin{array}{lll} \pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{V}} & \pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{IV}} & \pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{VI}} \\ \pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{IV}} & \pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{VI}} & \pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{V}} \\ (\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{V}})' & (\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{IV}})' & (\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{VI}})' \\ (\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{IV}})' & (\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{VI}})' & (\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{VI}}\,\pi^{\mathrm{V}})' \end{array}$$

entsprechen, und bezeichnen wir die zwölf Projectivität-Mittelpunkte welche zu diesen zwölf projectiven Beziehungen gehören, mit

$$\begin{array}{lll} K_1 & K_3 & K_5 \\ K_2 & K_4 & K_6 \\ K_1' & K_3' & K_5' \\ K_2' & K_4' & K_6'. \end{array}$$

Den Strahlen $(p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}})'$ entsprechen bei den sechs ersten Beziehungen ebensolche mit „$'$“ versehene Strahlen π^i, in den übrigen Bezeichnungen ebensolche Strahlen π^i aber ohne „$'$“, wie den drei Strahen $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$.

Die gegenüberliegenden Punktepaare

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$
bilden auf k_1 eine Involution J_1

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$
bilden auf k_3 eine Involution J_3

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$
bilden auf k_5 eine involution J_5

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$
bilden auf k_2 eine Involution J_2

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$
bilden auf k_4 eine Involution J_4

$(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$
bilden auf k_6 eine Involution J_6,

deren Involutions-Mittelpunkte $K_1'\; K_3'\; K_5'\; K_2'\; K_4'\; K_6'$ sind.

Die Pole der Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Punkte in Hinsicht auf die Kegelschnitte k_i, auf welchen sie liegen,

Digitized by Google

ferner die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit den Involutions-Axen der durch die gegenüber liegenden Punkte als conjugierten Punkten bestimmten Involutionen J_i sind bezw.

$$\begin{array}{ll} K_2\,K_4\,K_6 & K_2'\,K_4'\,K_6' \\ K_4\,K_6\,K_2 & K_4'\,K_6'\,K_2' \\ K_6\,K_2\,K_4 & K_6'\,K_2'\,K_4' \\ K_1\,K_5\,K_3 & K_1'\,K_5'\,K_3' \\ K_3\,K_1\,K_5 & K_3'\,K_1'\,K_5' \\ K_5\,K_3\,K_1 & K_5'\,K_3'\,K_1'. \end{array}$$

So z. B. ist der Pol der Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Punkte $(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$ in Hinsicht auf k, der Schnittpunkt K_2 der Geraden $|\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,|$, $|\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})'\,|$.

Ferner schneidet die Gerade $|\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\;(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'\,|$, welche die conjugierten Punkte $(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})$, $(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$ der Involution J_1 verbindet, die zu dieser Involution gehörige Involutions-Axe im Schnittpunkte K_2' der Geraden $|\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})'\,|$, $|\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'\,|$.

Die conjugierten Punktepaare $K_2\,K_2'$, $K_4\,K_4'$, $K_6\,K_6'$ bilden eine Involution J_{135}, die conjugierten Punktepaare $K_1\,K_1'$, $K_3\,K_3'$, $K_5\,K_5'$ bilden eine Involution J_{246}; die erste Involution hat mit $J_1\,J_3\,J_5$, die zweite Involution hat mit $J_2\,J_4\,J_6$ gemeinsame conjugiert-imaginäre Doppelpunkte, welche die gemeinsamen Schnittpunkte $(x\,y)\,(x_1\,y_1)$, $(x\,y_1)\,(x_1\,y)$ der Kegelschnitte $k_1\,k_3\,k_5$, beziehungsweise $k_2\,k_4\,k_6$ sind. Daher sind die Träger der Involutionen J_{135}, J_{246} die früheren Geraden t_{135}, t_{246}, und es ist

$$t_{135} \equiv |\,K_2\,K_4\,K_6\,K_2'\,K_4'\,K_6'\,|$$
$$t_{246} \equiv |\,K_1\,K_3\,K_5\,K_1'\,K_3'\,K_5'\,|.$$

Die neun Verbindungsgeraden der Punkte $K_1'\,K_3'\,K_5'$ mit den Punkten $K_2'\,K_4'\,K_6'$ sind zugleich die Verbindungsgeraden der neun Paar gegenüber liegenden Punkte $(p^i\,\pi^l)\,(p^i\,\pi^l)'$, und auf jeder dieser Geraden werden die gegenüber liegenden Punkte von den zwei Punkten K_i' harmonisch getrennt. Es strahlen aber noch aus jedem der sechs Punkte K_i' auch solche sechs Geraden aus, die zwei Punkte wie $(p^i\,\pi^l)\,(p^j\,\pi^m)'$ tragen, welche aber nicht gegenüber liegende sind. So z. B. trennen die Punktepaare $K_1'\,K_2'$, $K_1'\,K_4'$, $K_1'\,K_6'$, beziehungsweise die Punktepaare $(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$ harmonisch, und aus K_1' strahlen aus die Geraden $(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{V}})'$, $(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{IV}})\,(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$, $(p^{\mathrm{II}}\,\pi^{\mathrm{V}})\,(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{VI}})\,(p^{\mathrm{I}}\,\pi^{\mathrm{V}})'$.

Digitized by Google

Die Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1\, k_2 \ldots k_6$ sind die Punkte $K_1\, K_2 \ldots K_6$, denn es schneiden sich z. B. die Diagonale $(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{IV}})(p^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{VI}})$, $(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{V}})(p^{\mathrm{III}}\pi^{\mathrm{VI}})$ der dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenen Vierecke $P\Pi\,(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{VI}})(p^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{IV}})$, $P\Pi\,(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{VI}})(p^{\mathrm{III}}\pi^{\mathrm{V}})$, im Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf k_1.

Daraus folgt ferner, dass der Pol der Geraden t_{135} in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_2\, k_4\, k_6$, der Punkt $(t_{246}, |P\Pi|)$, und der Pol der Geraden t_{246} in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1\, k_3\, k_5$ der Punkt $(t_{135}, |P\Pi|)$ ist. Denn die Punkte K_1', K_1 sind die Pole der Geraden $t_{135}, |P\Pi|$ in Hinsicht auf k_1, also ist der Punkt $(t_{135}, |P\Pi|)$ der Pol der Geraden $t_{246} = K_1\, K_1'$.

Die erhaltenen Resultate können wir als Fortsetzung der früheren Sätze in Folgendem zusammenfassen:

Die auf jeden der Kegelschnitte $k_1\, k_3\, k_5\, k_2\, k_4\, k_6$ liegenden drei Punktepaare $(p^i\pi^l)(p^i\pi^l)'$ sind conjugierte Punkte von Involutionen $J_1 J_3 J_5\, J_2 J_4 J_6$; ihre Involutions-Mittelpunkte sind $K_1' K_3' K_5'\, K_2' K_4' K_6'$. Die gemeinsame Involutions-Axe der Involutionen $J_1 J_3 J_5$ ist die durch die Punkte $K_2' K_4' K_6'$ gehende Gerade t_{135}, und die gemeinsame Involutions-Axe der Involutionen ist die durch die Punkte $K_1' K_3' K_5'$ gehende Gerade t_{246}.

Die Pole $K_1\, K_3\, K_5$ und $K_2\, K_4\, K_6$ der Geraden $|P\Pi|$ in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1 k_3 k_5$, beziehungsweise $k_2 k_4 k_6$, liegen auf der Geraden t_{246}, beziehungsweise t_{135}; $K_1\, K_1'$, $K_3\, K_3'$, $K_5 K_5'$, so wie $K_2 K_2'$, $K_4 K_4'$, $K_6 K_6'$ sind conjugierte Punkte von zwei Involutionen J_{135}, J_{246}. Die gemeinsamen Doppelpunkte der Involutionen $J_1 J_3 J_5\, J_{135}$, und $J_2 J_4 J_6\, J_{246}$ sind die früheren Punkte $(xy)(x_1 y_1)$, $(xy_1)(x_1 y)$, welche mit jedem der drei auf den Kegelschnitten $k_1\, k_2 \ldots k_6$ liegenden Punkten $(p^i\pi^l)$, wie auch $(p^i\pi^l)'$, und mit den auf den Geraden t_{135}, t_{246} liegenden Punkte K_i, wie auch K_i', äquianharmonisch sind.

Aus jedem der sechs Punkte K_i' Strahlen neun Gerade aus, welche einen Punkt $(p^i\pi^l)$ und einen Punkt $(p^j\pi^m)'$ tragen; auf dreien dieser Geraden sind die genannten Punkte gegenüber liegende, und trennen die zwei auf diesen Geraden befindlichen Punkte K_i' harmonisch.

5. Wir müssen hier folgenden Hilfssatz über Kegelschnitte beweisen: „Wenn zwei Kegelschnitte zwei gegenüber liegende Eckpunkte eines Vierseits mit einander gemein haben, und jeder auch noch durch zwei außerhalb des anderen liegende Eckpunkte des Vierseits geht, so schneiden sich die Geraden, welche den einen,

Digitized by Google

gleichviel welchen von den beiden Kegelschnitten in jenen gemeinschaftlichen Punkten berühren, und die Geraden, welche den anderen in den übrigen gemeinschaftlichen Punkten der beiden Kegelschnitte sich anschmiegen, in einem und demselben Punkte" (Staudt l. c.).

Beweis: Nach einem bekannten Satze von Steiner sind die acht Geraden, welche zwei Kegelschnitte in ihren vier Schnittpunkten berühren, die Tangenten eines Kegelschnittes. Schneiden sich also drei dieser Tangenten in einem Punkte U, so degeneriert dieser Kegelschnitt in ein Punktepaar UV. Die übrigen fünf Tangenten können aber nicht alle durch den anderen Punkt V gehen, da sie aus den vier Schnittpunkten ausstrahlen und also zwei derselben keinen zweiten gemeinsamen Punkt haben können; es müssen daher in dem betrachteten Falle vier der Tangenten durch einen Punkt U und vier durch einen Punkt V gehen.

Um aber zu zeigen, dass die Tangenten in drei Schnittpunkten der im Satze angegebenen Kegelschnitte sich in einem Punkt schneiden, bezeichnen wir die Kegelschnitte, welche durch die Gegeneckpunkte BB_1, CC_1 und AA_1, CC_1 eines Vierseits $AA_1\, BB_1\, CC_1$ gehen, mit k_a, k_b; diese haben außer CC_1 noch die Schnittpunkte DD_1.

Der Pol U der Geraden $|\, CC_1\,|$ in Hinsicht auf k_a ist der Schnittpunkt der zu $|\, CC_1\,|$ conjugierten Polaren $|\, AA_1\,|$, $t = |\, (C_1B_1, CD)\, (CB_1, C_1D\,|$, wie dies aus den Vierecken $CC_1\, BB_1$, $CC_1\, B_1D$ ersichtlich. Die Gerade t ist aber die Pascal'sche Gerade der dem Kegelschnitt k_b einbeschriebenen Sechsecke $CA_1\, AC_1\, DD$, (denn $CB_1 \equiv CA_1$, $C_1B \equiv C_1A$), also berührt die durch den Punkt U gehende Gerade t den Kegelschnitt k_b im Schnittpunkte D.

Wir bemerken noch, dass der Pol der Geraden BB_1 in Hinsicht auf k_1, welcher den Punkt U vom Punktepaare AA_1 harmonisch trennt, auf der Geraden DD_1 liegt.

6. Wir kehren wieder zu der früheren Configuration zurück. Der Kegelschnitt k geht durch die Eckpunkte $(xy)\,(x_1y_1)\,(xy_1)\,(x_1y)$, die Kegelschnitte $k_1\, k_3\, k_5$ gehen durch die Eckpunkte $PII\,(xy)\,(x_1y_1)$, und die Kegelschnitte $k_2\, k_4\, k_6$ gehen durch die Eckpunkte $PII\,(xy_1)\,(x_1y)$ des Vierseits $xy\, x_1y_1$. Daher hat der Kegelschnitt k gegenüber den Kegelschnitten $k_1\, k_2 \ldots k_6$, und $k_1\, k_3\, k_5$ gegenüber $k_2\, k_4\, k_6$ dieselbe Lage, wie die Kegelschnitte k_a, k_b der früheren Nummer.

Der Kegelschnitt k schneidet schon die Kegelschnitte $k_1 k_2 \ldots k_6$ in den Punkten $1\,2 \ldots 6$, und wir wollen die vierten Schnittpunkte mit $1'2' \ldots 6'$ bezeichnen.

Also gehen die Tangenten des Kegelschnittes k in den Punktepaaren $11'$, $33'$, $55'$ und $22'$, $44'$, $66'$ durch die Pole $K_1'K_3'K_5'$ der Geraden t_{135} in Hinsicht auf $k_1\, k_3\, k_5$, beziehungsweise durch die Pole $K_2'K_4'K_6'$ der Geraden t_{246} in Hinsicht auf $k_2\, k_4\, k_6$. Außer

Digitized by Google

diesem schneiden die Geraden 11′, 33′, 55′, die Gerade t_{246} und die Geraden 22′, 44′, 66′, die Gerade t_{135} in denjenigen Punkten $K_1\ K_3\ K_5$, beziehungsweise $K_2\ K_4\ K_6$, welche das Punktepaar $(xy_1)(x_1y)$ beziehungsweise das Punktepaar $(xy)(x_1y_1)$ von den Punkten $K_1'\ K_3'\ K_5'$, beziehungsweise $K_2'\ K_4'\ K_6'$ harmonisch trennen. Die Tangenten des Kegelschnitts k in den Punkten 1 2 ... 6 gehen also durch die Punkte $K_1'\ K_2'\ \ldots\ K_6'$.

Anderseits schneiden sich die Tangenten von $k_1\ k_3\ k_5$ und $k_2\ k_4\ k_6$ in den Punktepaaren 11′, 33′, 55′ und 22′, 44′, 66′ in den Polen T_{135}, beziehungsweise T_{246} der Geraden t_{135}, t_{246} in Hinsicht auf k; ferner trennt der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden 11′, 33′, 55′, so wie der Geraden 22′, 44′, 66′ die Punkte T_{135}, beziehungsweise T_{246} vom Punktepaare $P\Pi$ harmonisch. Aber diese Schnittpunkte sind beziehungsweise T_{246}, T_{135}, denn die Pole der drei ersten Geraden in Hinsicht auf k sind die auf t_{246} liegende Punkte $K_1'K_3'K_5'$, und die Pole der drei anderen Geraden in Hinsicht auf k sind die auf t_{135} liegende Punkte $K_2'K_4'K_6'$.

Nachdem die Tangenten von k in den Punkten 1 3 5 und 1′3′5′ die Gerade t_{246} in den Punkten $K_1'K_3'K_5'$ schneiden und $K_1'K_3'K_5'(xy_1)(x_1y)$ äquianharmonische Punkte sind, so werden auch $135(xy_1)(xy_1)$ und $1'3'5'(xy_1)(x_1y)$ äquianharmonisch sein, und es gehen also die Geradenpaare 35, 3′5′; 51, 5′1′; 13, 1′3′ durch die Punkte $K_1'K_3'K_5'$. Aus demselben Grunde sind die Punkte $246(xy)(x_1y_1)$, $2'4'6'(xy)(x_1y_1)$ äquianharmonisch und die Geradenpaare 46, 4′6′; 62, 6′2′; 24, 2′4′ schneiden sich in den Punkten $K_2'K_4'K_6'$.

In Anbetracht dessen, dass die Punkte 1′2′ ... 6′ gegenüber den Kegelschnitten $k\,k_1\,k_2\,\ldots\,k_6$, den Geraden $t_{135}\,t_{246}$, den Punkten $P\Pi\ T_{135}\ T_{246}\ K_1K_2\ \ldots\ K_6\ K_1'K_2'\ \ldots\ K_6'$ dieselbe Lage haben, wie die Punkte 1 2 ... 6, werden die sechs Pascal'sche Gerade $p^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}}\ldots p^{\mathrm{VI}}$, auch Pascal'sche Geraden des Sechseckes 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ sein.

Daher: Die Kegelschnitte $k_1\,k_2\,\ldots\,k_6$ schneiden k in den reellen Punktepaaren 11′22′, ..., 66′, deren Verbindungsgeraden durch die Punkte $K_1\,K_2\,\ldots\,K_6$ gehen. Die Tangentenpaare in diesen Punktepaaren zu dem Kegelschnitt k schneiden sich in den Punkten $K_1'K_2'\ldots K_6'$, und zu den Kegelschnitten $k_1\,k_3\,k_5, k_2\,k_4\,k_6$ in den Polen T_{135}, T_{246} der Geraden t_{135}, t_{246} in Hinsicht auf k. Diese Pole T_{135}, T_{246} trennen $P\Pi$ harmonisch. Die Geraden $p^{\mathrm{I}}\,p^{\mathrm{II}}\,\ldots\,\pi^{\mathrm{VI}}$ sind Pascal'sche Geraden des Sechseckes 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′.

7. Man sieht aus dem Früheren, dass die Geraden $(p^{\mathrm{I}}\,p^{\mathrm{II}}\,p^{\mathrm{III}}\,\pi^{\mathrm{IV}}\,\pi^{\mathrm{V}}\,\pi^{\mathrm{VI}})'$ die Kegelschnitte $k_1\,k_2\,\ldots\,k_6$, die Geraden t_{135}, t_{246} und die auf diesen liegende Punkte $K_2\,K_4\,K_6\,K_2'\,K_4'\,K_6'(xy)(x_1y_1)$, $K_1\,K_3\,K_5\,K_1'\,K_3'\,K_5'(xy_1)(x_1y)$, durch die sechs sich zu dreien in

Digitized by Google

den Punkten P, Π schneidenden Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ bestimmt sind. In Anbetracht dessen, dass die neun Verbindungsgeraden der Eckpunkte des Dreieckes 1 3 5 mit den Eckpunkten des Dreieckes 2 4 6 durch die neun Punkte $(p^i \pi^l)'$, und ihre sechs Seiten durch die Punkte $K_1' K_3' K_5'$, $K_2' K_4' K_6'$ gehen, kann man, wenn die Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ und ein Eckpunkt des Sechseckes 1 2 ... 6 gegeben ist, die übrigen fünf Eckpunkte, den durch dieselben gehenden Kegelschnitt k, und die neun Punkte $1'\ 2'\ \ldots\ 6'$, construieren.

Beschreibt der Punkt 1 auf k_1 eine Reihe R_1, so werden die Punkte 2 3 ... 6 auf den Kegelschnitten $k_2\ k_3\ \ldots\ k_6$ mit R_1 projective Reihen $R_2, R_3, \ldots, R_6$ beschreiben, in welchen der Punkt P und der Punkt Π entsprechend ist. Diese Punktreihen sind zugleich projectiv mit denjenigen neun Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte die Punkte $(p^i \pi^l)'$ sind und welche die Punktreihen R_1, R_3, R_5, in die Punktreihen R_2, R_4, R_6 projiciern. Jeder der Kegelschnitte $k_1 k_2 \ldots k_6$ ist das Erzeugnis von solchen drei dieser Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte auf dem betreffenden Kegelschnitt liegen. Hingegen ist das Erzeugnis von zwei solchen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte mit dem Punkte P oder mit dem Punkte Π auf einer Geraden (p'^i oder π'^l) liegen, eine Gerade π^m oder p^j, welche von den Mittelpunkten der Strahlenbüschel durch den auf dem gemeinsamen Strahle der Büschel liegenden dritten Mittelpunkt der Büschel harmonisch getrennt ist.

Es ist z. B. das Erzeugnis der Büschel mit den Mittelpunkten $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{IV}})'$, $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{V}})'$, bei der obigen projectiven Beziehung die Gerade π^{VI}, da sich die entsprechenden Strahlenpaare $\pi'^{\mathrm{IV}}, \pi'^{\mathrm{V}}$; 56, 34, auf der Geraden π^{VI} schneiden.

Nach diesem können wir die zwei in der Einleitung erwähnten Sätze von Staudt mit der hier benützten Bezeichnung aufschreiben; sie lauten:

„11. Durch sechs in einerlei Ebene liegende Geraden, von welchen drei $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$ in einem Punkte P, die übrigen drei $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ in einem anderen Punkte Π sich schneiden, sind im allgemeinen sechs Curven $k_1\, k_3\, k_5\, k_2\, k_4\, k_6$ zweiter Ordnung bestimmt, welche projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass auch je sechs homologe Punkte 1, 3, 5, 2, 4, 6 derselben in einer Curve k zweiter Ordnung liegen und überdies die Pascal'schen Geraden der Sechsecke

163254, 123456, 143652
163452, 123654, 143256

mit den gegebenen Geraden zusammenfallen.

Jede der sechs festen Curven geht durch die beiden Punkte P, Π und durch drei von den neun Punkten $p\pi$, in welchen nämlich die drei Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$ von den drei Geraden $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ geschnitten werden, und zwar geht

Digitized by Google

k_1 durch $p^{I}\pi^{VI}, p^{II}\pi^{VI}, p^{III}\pi^{V}$
k_3 „ $p^{I}\pi^{V}, p^{II}\pi^{VI}, p^{III}\pi^{IV}$
k_5 „ $p^{I}\pi^{IV}, p^{II}\pi^{V}, p^{III}\pi^{VI}$
k_2 „ $p^{I}\pi^{VI}, p^{II}\pi^{V}, p^{III}\pi^{IV}$
k_4 „ $p^{I}\pi^{V}, p^{II}\pi^{IV}, p^{III}\pi^{VI}$
k_6 „ $p^{I}\pi^{IV}, p^{II}\pi^{VI}, p^{III}\pi^{V}$.

Legt man durch den Punkt P die Geraden $p'^{I}\,p'^{II}\,p'^{III}$ und durch den Punkt Π die Geraden $\pi'^{IV}\,\pi'^{V}\,\pi'^{VI}$ so dass $p^{II}\,p^{III}\,p^{I}\,p'^{I}$, $p^{III}\,p^{I}\,p^{II}\,p'^{II}$, $p^{I}\,p^{II}\,p^{III}\,p'^{III}$, $\pi^{V}\,\pi^{VI}\,\pi^{IV}\,\pi'^{IV}$, $\pi^{VI}\,\pi^{IV}\,\pi^{V}\,\pi'^{V}$, $\pi^{IV}\,\pi^{V}\,\pi^{VI}\,\pi'^{VI}$ harmonische Würfe sind, so geht nun auch jede der sechs festen Curven durch drei der neun Punkte $p'^{i}\,\pi'^{l}$ so dass jede der drei Curven $k_1\,k_3\,k_5$, jede der drei Curven $k_2\,k_4\,k_6$ in den Punkten P, Π und in zwei einander gegenüber liegenden von den achtzehn Punkten $p\,\pi$, $p'\,\pi'$ schneidet, wenn man nämlich dem Punkte $p^{i}\,\pi^{l}$ den Punkt $p'^{i}\,\pi'^{l}$ gegenüber liegend nennt.

Der Strahlenbüschel P enthält zwei Strahlen x, x_1, der Strahlenbüschel Π zwei Strahlen y, y_1, so dass die Gebilde $p^{I}\,p^{II}\,p^{III}\,x\,x_1$, $p^{II}\,p^{III}\,p^{I}\,x\,x_1$, $\pi^{IV}\,\pi^{V}\,\pi^{VI}\,y\,y_1$ zu einander, mithin zu denselben auch die Gebilde $p^{III}\,p^{I}\,p^{II}\,x\,x_1$, $p^{I}\,p^{III}\,p^{II}\,x_1\,x$ u. s. w. projectivisch sind, daher die drei Curven $k_1\,k_3\,k_5$ in den vier Punkten P, Π $x\,y, x_1\,y_1$, die drei Curven $k_2\,k_3\,k_4$ aber in den vier Punkten $P, \Pi, x\,y_1, x_1\,y$ sich schneiden.

Die Brianchon'schen Punkte K_1, K_3, K_5 der Sechsseiten $p^{I}\,\pi^{V}\,p^{II}\,\pi^{VI}\,p^{III}\,\pi^{IV}$, $p^{I}\,\pi^{IV}\,p^{II}\,\pi^{V}\,p^{III}\,\pi^{VI}$, $p^{I}\,\pi^{VI}\,p^{II}\,\pi^{IV}\,p^{III}\,\pi^{V}$ sind die Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf die Curven k_1, k_3, k_5 und liegen daher in der Geraden t_{246}, welche den Punkt $x\,y_1$ mit dem Punkte $x_1\,y$ verbindet. Die Brianchon'schen Punkte K_2, K_4, K_6 der Sechseiten $p^{I}\,\pi^{IV}\,p^{II}\,\pi^{VI}\,p^{III}\,\pi^{V}$, $p^{I}\,\pi^{VI}\,p^{II}\,\pi^{V}\,p^{III}\,\pi^{IV}$ $p^{I}\,\pi^{V}\,p^{II}\,\pi^{IV}\,p^{III}\,\pi^{VI}$ sind die Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf die Curven $k_2\,k_4\,k_6$ und liegen daher in der Geraden t_{135}, welche den Punkt $x\,y$ mit dem Punkte $x_1\,y_1$ verbindet.

In der Geraden t_{246} liegen auch K_1', K_3', K_5' welche die Pole der Geraden t_{135} in Hinsicht auf die Curven k_1, k_3, k_5 sind. Ebenso liegen in der Geraden t_{135} die Punkte K_2', K_4', K_6', welche die Pole der Geraden t_{246} in Hinsicht auf die Curven $k_2\,k_4\,k_6$ sind Jede der neun Geraden, welche die Punkte K_1', K_3', K_4' mit den Punkten K_2', K_4', K_6' verbindet, geht durch zwei einander gegenüber liegende von den achtzehn Punkten $p\,\pi, p'\,\pi'$. Durch jeden der Punkte $K_1', K_2', \ldots, K_6'$ gehen aber sechs von den sechsunddreißig Geraden, deren jede nur eine der Curven $k_1, k_2, \ldots, k_6$ in einem der Punkte $p\,\pi$ und zugleich in einem der Punkte $p'\,\pi'$ schneidet.

Die neun Strahlenbüschel, welche die Punkte $p'\,\pi'$ zu Mittelpunkten haben, können projectivisch so auf einander bezogen

Digitized by Google

werden, dass je zwei Büschel, deren Mittelpunkte mit dem Punkte P oder mit dem Punke II und also auch mit dem Mittelpunkte eines dritten Büschels in einer und derselben Geraden liegen, ein gerades Gebilde erzeugen, welches im ersten Falle in derjenigen Geraden π, im letzteren aber in derjenigen Geraden p liegt, welche vom Mittelpunkte des dritten Büschels harmonisch getrennt ist. Je drei Büschel, deren Mittelpunkte in einer und derselben von den sechs Curven $k_1, k_2, \ldots, k_6$ liegen, erzeugen diese Curve. Es sind hierdurch auch die sechs erwähnten Curven auf die Büschel und daher auch auf einander projectivisch bezogen, und zwar auf die im Satze angegebene Weise. Die Curve k geht immer durch die vier Punkte xy, x_1y_1, xy_1, x_1y."

„12. Wenn zwei Curven zweiter Ordnung zwei einander gegenüber liegende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit einander gemein haben und jede auch noch durch zwei außerhalb der anderen liegende Eckpunkte des Vierseits geht, so schneiden sich die Geraden, welche die eine, gleichviel welche, von den beiden Curven in jenen gemeinschaftlichen Punkten berühren, und die Geraden, welche den anderen in den übrigen gemeinschaftlichen Punkten sich anschmiegen, in einem und demselben Punkte. Eine solche Lage hat, was die in der vorigen Nummer betrachteten Curven anbelangt, jede der drei Curven k_1, k_3, k_5 zu jeder der drei Curven k_2, k_4, k_6, und jede dieser sechs Curven zu jeder Curve k zweiter Ordnung, welche durch sechs homologe Punkte 1, 3, 5, 2, 4, 6 derselben geht.

Es schneiden sich daher die drei Geraden, welche die Curven k_1, k_3, k_5 in den Punkten 1, 3, 5 berühren, in dem Punkte T_{135}, welcher in Hinsicht auf die Curve k der Pol der Geraden t_{155} und zugleich der Pol des Dreieckes 246 ist. Die drei Geraden aber, welche die Curven k_2, k_4, k_6 in den Punkten 2, 4, 6 berühren, schneiden sich in dem Punkte T_{246}, welcher vom Punkte T_{135}, durch die Punkte P, II harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve k der Pol der Geraden t_{246} des Dreieckes 135 ist.

Bewegen sich die sechs Punkte $1, 2, \ldots, 6$ in den sechs Curven $k_1, k_2, \ldots, k_6$ als homologe Punkte derselben, so drehen sich die neun Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden, um die neun Punkte $p'\pi'$, während die Geraden 35, 51, 13 um die Punkte K_1', K_3', K_5' und die Geraden 46, 62, 24 und die Punkte K_2', K_4', K_6' sich drehen.

Die Geraden $T_{246}1$, $T_{246}3$, $T_{246}5$, $T_{135}2$, $T_{135}4$, $T_{135}6$, welche die Curve k in noch sechs homologen Punkten der Curven $k_1, k_3, k_5, k_2, k_4, k_6$ schneiden, drehen sich um die Punkte, welche in Hinsicht auf diese Curven die Pole der Geraden PII sind. Fällt irgend einer der drei Punkte 1, 3, 5 in die Gerade t_{246}, so fallen alle drei in diese Gerade, die drei Punkte 246 aber in die Gerade t_{135}, so dass alsdann die Curve k in den Inbegriff von zwei Geraden übergeht.

Digitized by Google

Die Aufgabe, in eine gegebene Curve zweiter Ordnung, welche (11) durch die vier Punkte xy, x_1y_1, xy_1, x_1y geht, zwei Dreiecke 135, 246 zu beschreiben, so dass die Pascal'schen Geraden der Sechsecke 163254, 123456, u. s. w. mit den gegebenne Geraden $p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}$, u. s. w. zusammenfallen, lässt nach dem Obigen zwei Auflösungen zu."

8. Nach diesen schönen Sätzen der Geometrie wollen wir zeigen, wie man das Steiner'sche Gegenpunktepaar P, Π und die durch dieselben gehenden Pascal'sche Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}$, $\pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$ des Sechseckes 123456 construieren kann, ohne die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben zu benützen.

Die Tangenten in den Eckpunkten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreieckes, schneiden die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Geraden. Diese Grade, sowie ihren Pol nennt Staudt „die Polare und den Pol des Dreieckes in Hinsicht auf den Kegelschnitt. Es sind also die Geraden t_{246}, t_{135} und die Punkte T_{246}, T_{135} der früheren Figur die Polaren und Pole der Dreiecke 135, beziehungsweise 246 in Hinsicht auf den beiden Dreiecken umschriebenen Kegelschnitt k.

Nach Früherem sind diejenigen conjugierten Pole in Hinsicht auf k, welche die Punkte T_{135}, T_{246} harmonisch trennen, die Steiner'schen Gegenpunkt P, Π. Dieselben werden von k stets getrennt, da der Pol der Geraden $|\, T_{135}\, T_{246}\,|$, als Schnittpunkt der stets außerhalb k liegenden Geraden t_{135}, t_{246}, außerhalb k liegt.

Die neun Geraden $K_i'K_l'$, welche die Punkte $K_1'K_3'K_5'$ mit den Punkten $K_2'K_4'K_6'$ der früheren Figur, verbinden, werden entsprechend von den neun Geraden il, welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden, in den neun Punkten $(p'\pi')$ geschnitten. Und die neun Punkte, welche auf den neun Geraden $|K_i'K_l'|$ die Punkte $(p'\pi')$ von den Punkten K_i', K_l' harmonisch trennen, sind die neun Punkte $(p\,\pi)$; von letzteren Punkten liegen sechsmal drei in den Pascal'schen Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{VI}}$. Man kann also die Punkte P, Π mittelst einer quadratischen Construction unabhängig von den Geraden $p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}} \ldots \pi^{\mathrm{VI}}$ und die Geraden selbst mittelst linearen Constructionen, ohne die Schnittpunkte der Gegenseiten des Pascal'schen Sechseckes aufzusuchen, erhalten.

Bezeichnet man die Tangenten des Kegelschnittes k in den Punkten $12 \ldots 6$ mit $t_1\, t_2 \ldots t_6$, so wird z. B. die Gerade 12, die Verbindungsgerade $K_1'K_2'$ der Punkte $K_1' = (t_1, 35), K_2' = (t_2, 26)$ in dem Punkte $(p^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{VI}})'$ treffen, und der von $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})'$ durch $K_1'K_2'$ harmonisch getrennte Punkt $(p^{\mathrm{I}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$ gehört den Pascal'schen Geraden $p^{\mathrm{I}}, \pi^{\mathrm{VI}}$ an.

Die von den Punkten K_1', K_2' an k gezogenen Tangenten berühren k in den Punkten $11', 22'$. Der Schnittpunkt $(11', 22')$ der

Digitized by Google

Berührungssehnen ist der Pol der Geraden $K_1' K_2'$, und da sich die Geraden $12, K_1' K_2'$ in dem Punkte $(p^{\mathrm{I}} \pi^{\mathrm{VI}})$ treffen und $(p^{\mathrm{I}} \pi^{\mathrm{VI}})'$ $p^{\mathrm{I}} \pi^{\mathrm{VI}})'$ conjugierte Pole sind in Hinsicht auf k, so geht die Gerade $1'\,2'$ ebenfalls durch $(p^{\mathrm{I}} \pi^{\mathrm{VI}})'$, während sich die Geraden $1'2$, $12'$ im Punkte $(p^{\mathrm{I}} \pi^{\mathrm{VI}})$ schneiden.

Daraus können wir schließen, da dies bei allen neun Verbindungsgeraden der Punkte $K_1 K_3' K_5'$ mit den Punkten $K_2' K_4' K_6'$ stattfindet, dass $p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} \pi^{\mathrm{IV}} \pi^{\mathrm{V}} \pi^{\mathrm{VI}}$ auch Pascal'sche Geraden des Sechseckes $1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'$, und $(p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} \pi^{\mathrm{IV}} \pi^{\mathrm{V}} \pi^{\mathrm{VI}})'$ Pascal'sche Geraden der Sechsecke $12'\,34'\,56'$, $1'2\,3'4\,5'6$, sind. Daher:

Sind 135, 246 zwei beliebige, einem Kegelschnitt k einbeschriebene Dreiecke und hat das Dreieck $1'\,3'\,5'$ mit dem ersten, das Dreieck $2'\,4'\,6'$ mit dem zweiten Dreieck in Hinsicht auf k je einen gemeinsamen Pol, und werden diese Pole von den conjugierten Polen P, Π in Hinsicht auf k harmonisch getrennt, so ist P, Π ein Steiner'sches Gegenpunktepaar für die vier Pascal'schen Sechsecke 123456, $1'2'3'4'5'6'$, $12'34'56'$, $1'23'45'6$. Die sechs durch P, Π gehenden Pascal'schen Geraden $p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}}$, $\pi^{\mathrm{IV}} \pi^{\mathrm{V}} \pi^{\mathrm{VI}}$ des ersten Sechseckes fallen mit sechs Pascal'schen Geraden des zweiten Sechseckes zusammen, und ebenso fallen die sechs durch P, Π gehenden Pascal'schen Geraden $p'^{\mathrm{I}} p'^{\mathrm{II}} p'^{\mathrm{III}} \pi'^{\mathrm{IV}} \pi'^{\mathrm{V}} \pi'^{\mathrm{VI}}$ des dritten Sechseckes mit sechs Pascal'schen Geraden des vierten Sechseckes zusammen. Je zwei der drei ersten Geraden p oder π werden von der dritten durch eine der Geraden p' beziehungsweise π' harmonisch getrennt.

9. Da, wie wir sahen, die Verbindungsgerade eines Steiner'schen Gegenpunktepaares den Kegelschnitt immer in reellen Punkten schneidet, so liegen von den zwanzig Steiner'schen Punkten zehn innerhalb und ihre Gegenpunkte außerhalb des dem Pascal'schen Sechseck umschriebenen Kegelschnittes.

Man kann aber auch im vorhinein bestimmen, welcher der Steiner'schen Punkte eines Gegegenpunktepaares innerhalb und welcher außerhalb des Kegelschnittes k liegt.

Hält man bei einem Pascal'schen Sechsecke drei nicht aufeinander folgende Eckpunkte fest, so ergeben die drei ihnen gegenüber liegenden Eckpunkte sechs Permutationen, von welchen drei und die übrigen drei cyklische Permutationen sind. Die Pascal'schen Geraden der ersten drei, und der anderen drei Sechsecke schneiden sich in zwei Steiner'schen Punkten, welche Gegenpunkte sind. So z. B. schneiden sich die Pascal'schen Geraden der Sechsecke

$$163254 \text{ und } 163452$$
$$123456 \qquad 123654$$
$$143652 \qquad 143256$$

in den Steiner'schen Gegenpunkten P, Π.

Digitized by Google

Es ist nun zu unterscheiden, welcher der Steiner'schen Punkte außerhalb des Kegelschnittes k liegt, denn der andere liegt dann innerhalb desselben.

Ich behaupte: Wenn drei nicht auf einander folgende Eckpunkte, und die ihnen gegenüber liegenden Eckpunkte eines Pascal'schen Sechseckes auf den durch dieselben gehenden Kegelschnitt in demselben Sinne auf einander folgen, so geht die, diesem Pascal'schen Sechsecke zugehörige Pascal'sche Gerade durch einen außerhalb des Kegelschnittes liegenden Steiner'schen Punkt.

Es möge beim Pascal'schen Sechsecke 123456 der Sinn der Eckpunkte 135, 246 auf den umschriebenen Kegelschnitt k derselbe sein, dann können die drei letzteren Punkte in Bezug auf die drei ersteren nur folgende drei Lager haben: 1. Von den Punkten 246 ist keiner von den beiden anderen durch zwei der Punkte 135 getrennt; 2. ein Punkt von 246 wird von den beiden anderen durch einen Punkt und die beiden anderen von 135 getrennt; endlich 3. je zwei der Punkte 246 werden durch zwei der Punkte 135 getrennt. Im 1., 2., 3. dieser Fälle haben beziehungsweise ein, zwei, drei Pascal'sche Geraden der Sechsecke mit dem umschriebenen Kegelschnitt k keinen reellen Punkt gemein, also gehen in jedem Falle die Pascal'schen Geraden dieser Sechsecke durch einen außerhalb des Kegelschnittes k liegenden Steiner'schen Punkt.

10. Sechs Punkte 123456 eines Kegelschnittes k bilden die Eckpunkte von zwanzig Dreiecken oder zehn Paar Ergänzungsdreiecken, wenn je zwei jener Dreiecke, die keinen gemeinsamen Eckpunkt haben, so nennt. Die Pole und Polaren jedes der Dreiecke in Hinsicht auf k, wollen wir wie früher mit T_{ijl}, und t_{ijl} bezeichnen, wo die Zeiger ijl mit den Eckpunkten des Ergänzungsdreieckes übereinstimmen.

Von den zwanzig Dreiecken haben fünfzehnmal vier, zwei gemeinsame Eckpunkte; z. B. haben die Dreiecke 123, 124, 125, 126 die gemeinsamen Eckpunkte 12. Untersuchen wir die Lage ihrer Pole T_{456}, T_{346}, T_{345}.

Die sechs Tangenten $t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ t_5\ t_6$ von k in den Punkten 123456 schneiden die zwei Tangenten t_1, t_2, in den sechs Punkten von zwei projectiven Punktreihen, und die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte mit den Punkten 2, beziehungsweise 1, geben projective Strahlen; also ist

$$2\,(1\,(t_1\,t_2)\,(t_1\,t_3)\,(t_1\,t_4)\,(t_1\,t_5)\,(t_1\,t_6)) \overline{\wedge}\ 1\,((t_2\,t_1)2\,(t_2\,t_3)\,(t_2\,t_4)\,(t_2\,t_5)\,(t_2\,t_6)).$$

Es liegen daher die Schnittpunkte

$$12\ T_{456}\ T_{356}\ T_{346}\ T_{345}$$

der sechs entprechenden Strahlenpaare auf einen Kegelschnitt k_{12}, der k in den Punkte 12 berührt, und für die auf k und k_{12} liegenden sechs Punkten ist

$$123456 \overline{\wedge}\ 12\ T_{456}\ T_{356}\ T_{346}\ T_{345}.$$

Digitized by Google

Die zwei Kegelschnitte k, k_{12} liegen in Bezug auf die gemeinsame Berührungssehne 12 und den Schnittpunkt $(t_1 t_2)$ der gemeinsamen Tangenten t_1, t_2, als Collineations-Axen und Mittepunkt perspectiv; dabei entsprechen obige sechs Punkte einander. Die sechs Seiten des Viereckes $T_{12} = T_{456}\ T_{356}\ T_{346}\ T_{345}$ gehen durch die Schnittpunkte der sechs Seiten des Viereckes 3456 mit der Geraden 12, d. h. durch sechs von den fünfundvierzig Pascal'schen Punkten, wenn man diejenigen Punkte Pascal'sche Punkte nennt, in welchen sich die fünfzehn Seiten eines vollständigen Pascal'schen Sechseckes, außer ihren Eckpunkten, schneiden. Durch jeden dieser sechs Pascal'schen Punkte auf der Berührungssehne 12, geht aber noch je eine Seite der (dem obigen Viereck T_{12} entsprechend entstandenen) Vierecke T_{34}, T_{56}, T_{35}, T_{46}, T_{36}, T_{45}, welche denjenigen Kegelschnitten $k_{34}, k_{56}, \ldots, k_{45}$ einbeschrieben sind, die k in je zwei Eckpunkten des Viereckes 3456 berühren Daher:

Sechs Punkte 123456 eines Kegelschnittes k bilden die Eckpunkte von zwanzig Dreiecken, welche in Hinsicht auf k zwanzig Pole haben. Von diesen Polen liegen fünfzehnmal vier auf solchen Kegelschnitten k_{ij}, welche k in zwei Punkten ij der sechs Punkte berühren. Die vier Pole und die Berührungspunkte entsprechen projectiv den sechs angenommenen Punkten und k_{ij}, k sind bei dieser projectiven Beziehung perspectiv in Bezug auf die gemeinsame Berührungssehne ij und ihren Pol.

Die sechs Seiten des Viereckes T_{ij}, dessen Eckpunkte die vier auf k_{ij} liegende Pole sind, gehen durch die sechs auf der Berührungssehne ij liegenden Pascal'schen Punkte. Es gibt fünfzehn solche Vierecke T_{ij}, entsprechend den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij}; ihre neunzig Seiten u gehen paarweise durch die fünfundvierzig Pascal'schen Punkte des Sechseckes 1 2 3 4 5 6; durch jeden der zwanzig Pole gehen neun solche Geraden u.

11. Betrachten wir jetzt zwei von den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij}, welche k in denselben von den sechs Punkten 1 2...6 berühren; z. B. die Kegelschnitte k_{12}, k_{13}. Diese berühren also k in den Punkten 1, 2, beziehungsweise 1, 3, und gehen beide durch den Pol T_{456}. Sie haben in dem Punkte 1 eine dreipunktige Berührung; denn der vierte Schnittpunkt müsste den Schnittpunkt T_{456} von den Berührungssehnen 12, 13 harmonisch trennen. Aber alle Punkte, welche T_{456} von den Geraden 12, 13 harmonisch trennen, liegen in der Tangente t_1, welche die drei Kegelschnitte k, k_{12}, k_{13} in dem Punkt 1 berührt; also fällt jener vierte Schnittpunkt ebenfalls in diesen Punkt 1.

Digitized by Google

Betrachtet man ferner die drei Kegelschnitte k_{12}, k_{23}, k_{31}, welche k in je zwei der Eckpunkte des Dreieckes 123 berühren, so sieht man, dass sie alle durch den Pol T_{456} des Dreieckes 123 in Hinsicht auf k gehen und sich gegenseitig in den Eckpunkten dieses Dreieckes dreipunktig berühren.

Die fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} reihen sich in zwanzig solchen Tripeln von Kegelschnitten, entsprechend der Anzahl der Dreiecke, in welche man das Sechseck $12 \ldots 6$ zerlegen kann. Also:

Von den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij}, welche den Kegelschnitt k in je zwei der sechs Punkte 123456 berühren und außerdem durch je vier der Pole der zwanzig Dreiecke δ, deren Eckpunkte die Punkte $12 \ldots 6$ sind, gehen, berühren sich in jedem dieser Punkte fünf dreipunktig.

Je drei der Kegelschnitte k_{ij}, welche k in den Eckpunkten eines Dreieckes δ berühren, haben in diesen Eckpunkten paarweise eine dreipunktige Berührung, und schneiden sich außerdem in dem Pole des Dreieckes in Hinsicht auf k. Die neun Geraden u, welche den gemeinsamen Pol mit den übrigen neuen auf diesen drei Kegelschnitten k_{ij} liegenden Polen verbinden, gehen durch diejenigen auf den Seiten des Dreiekes δ liegenden neun Pascal'schen Punkten, welche den Seiten des Ergänzungsdreieckes von δ nicht angehören.

Beiläufig folgt der möglicher Weise noch nicht bekannte Satz:

Sind ABC die Eckpunkte eines Dreieckes, T ein beliebiger Punkt einer Ebene, und trennen die Geraden $t_a t_b t_c$ den Punkt T von den Seitenpaaren des Dreieckes harmonisch, so werden sich die drei Kegelschnitte, welche durch T gehen und je zwei Seiten des Dreiseits $t_a t_b t_c$ in den Eckpunkten des Dreieckes ABC berühren, in diesen Eckpunkten, dreipunktig berühren. Der Punkt T muss nicht innerhalb des Dreieckes ABC liegen.

12. Betrachten wir jetzt zwei der Kegelschnitte k_{ij}, die keine gemeinsamen Berührungspunkte haben, z. B. k_{12}, k_{34}. Der erste berührt k in den Punkten 1, 2 und geht durch die Pole $T_{356}, T_{456}, T_{346}, T_{345}$; der zweite berührt k in den Punkten 3, 4 und geht noch durch die Pole $T_{156}, T_{256}, T_{125}, T_{126}$.

Die Vierecke 1234, $T_{156}\ T_{256}\ T_{356}\ T_{456}$, und das Vierseit $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$, dessen Seiten k in den Eckpunkten des ersten Viereckes berühren, haben ein gemeinsames Diagonaldreieck $z_{56}\, z'_{56}\, z''_{56}$, da die Gegenseiten

Digitized by Google

$T_{156}\,T_{256}$, $T_{256}\,T_{456}$ durch den Pascal'schen Punkt (12, 34)
$T_{156}\,T_{356}$, $T_{256}\,T_{456}$ „ „ „ „ (13, 24)
$T_{156}\,T_{456}$, $T_{256}\,T_{356}$ „ „ „ „ (14, 23)

gehen.

Daraus folgt, dass die zwei Kegelschnitte k_{12}, k_{34} in Bezug auf die zwei Diagonalen

$$z_{56} = |\,(13,24)\,(12,34)\,| = |\,(t_1\,t_4)\,(t_2\,t_3)\,|,$$
$$z'_{56} = |\,(12,34)\,(14,23)\,| = |\,(t_1\,t_3)\,(t_2\,t_4)\,|$$

und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte

$$(z'_{56}\,z''_{56}) = (14,23), \quad (z''_{56}\,z_{56}) = (13,24)$$

des Diagonaldreieckes $z_{56}\,z'_{56}\,z''_{56}$, als Involutionsaxe und Mittelpunkt centrisch-involutorisch liegen.

Denn es werden z. B. von der ersten Diagonale und dem ihr gegenüber liegenden Diagonalpunkt harmonisch getrennt, die Punktepaare 14, 23, $T_{156}\,T_{456}$, $T_{256}\,T_{356}$ und die Geradenpaare $t_1\,t_4, t_2\,t_3$, welche entsprechende Punkte und Geraden jener Kegelschnitte sind.

Diese Involutions-Mittelpunkte und Involutions-Axen sind die stets reellen Contingenzpunkte und gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte k_{12}, k_{34}; sie trennen die Berührungssehnen 12, 34 der Kegelschnitte kk_{12}, kk_{34} harmonisch, und sind conjugierte Pole und Polaren in Hinsicht auf k. Also:

Je zwei der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij}, welche k in vier verschiedenen, also in zwei und zwei, der Eckpunkte des Sechseckes 12 ... 6 berühren, sind centrisch-involutorisch in Bezug auf zwei Diagonalpunkte und Diagonalen, als Involutions-Mittelpunkte und Involutions-Axen desjenige Viereckes, dessen Eckpunkte jene vier Berührungspunkte sind. Diese Diagonalpunkte und Diagonalen, sind die stets reelen Contingenzpunkte und gemeinsame Sehnen der zwei Kegelschnitte k_{ij}; sie trennen die zwei Berührungssehnen der zwei Kegelschnitte harmonisch und sind conjugierte Pole und Polaren in Hinsicht auf k.

Für die Kegelschnittpaare $k_{12}\,k_{34}$, $k_{23}\,k_{41}$, $k_{13}k_{24}$ welche k in den Punktepaaren 12, 34; 23, 41; 13, 24 berühren, sind die stets reellen gemeinsamen Sehnenpaare $z_{56}\,z'_{56}$, $z'_{56}\,z''_{56}$, $z''_{56}\,z_{56}$ je zwei Seiten des zum Viereck 1234 und Vierseit $t_1\,t_2\,t_3\,t_4$ gehörigen Diagonaldreieckes $z_{56}\,z'_{56}\,z''_{56}$.

Da das Sechseck 123456 in fünfzehn solche Vierecke 1234, welche mit dem Sechsecke vier gemeinsame Punkte haben, zerfällt, und die Seiten ihrer Diagonaldreiecke die stets reellen gemeinsamen

Digitized by Google

Sehnen sind von zwei der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij}, so haben diese fünfzehn Kegelschnitte fünfundvierzig solche reelle gemeinsame Sehnen. (Wir bemerken, dass wir die etwa vorhandenen anderen gemeinsamen Sehnen, auch wenn sie reell sind, hiebei nicht mitzählen.) Daher:

Die stets reellen gemeinsamen Sehnen der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij}, sind die fünfundvierzig Diagonalen desjenigen Brianchon'schen Sechsseits $t_1 t_2 \ldots t_6$, dessen Seiten den Kegelschnitt k in den sechs Eckpunkten des Pascal'schen Sechseckes 123456 berühren. Aus jedem Pascal'schen Punkte strahlen zwei gemeinsame Sehnen aus und trennen zwei Seiten des Sechseckes harmonisch.

13. Drei Kegelschnitte k_{ij}, welche k in sechs verschiedenen Punkten berühren, haben drei Paar stets reelle gemeinsame Sehnen.

Nehmen wir die Kegelschnitte k_{12}, k_{34}, k_{56}; von diesen haben

$k_{34} k_{56}$ die gemeinsamen Sehnen $z_{12} = (t_3 t_6)(t_4 t_5)$, $z'_{12} = (t_3 t_5)(t_4 t_6)$,
$k_{56} k_{12}$ „ „ „ $z_{34} = (t_5 t_2)(t_6 t_1)$, $z'_{34} = (t_5 t_1)(t_6 t_2)$,
$k_{12} k_{34}$ „ „ „ $z_{56} = (t_1 t_4)(t_2 t_3)$, $z'_{56} = (t_1 t_3)(t_2 t_4)$,

und es schneiden sich

$z_{12} z_{34} z_{56}$ als Hauptdiagonalen des Sechseits $t_1 t_6 t_3 t_2 t_5 t_4$
$z_{12} z_{34} z'_{56}$ „ „ „ „ $t_1 t_3 t_6 t_2 t_4 t_5$
$z_{12} z'_{34} z'_{56}$ „ „ „ „ $t_1 t_6 t_4 t_2 t_5 t_3$
$z'_{12} z'_{34} z_{56}$ „ „ „ „ $t_1 t_4 t_6 t_2 t_3 t_5$

in je einem Brianchon'schen Punkte. Jene gemeinsamen Sehnen bilden daher ein Vierseit $z^{II, III}$, dessen Diagonaldreieck $\triangle^{II, III} =$ $= [12\,34\,56]$, die Berührungssehnen von $k k_{12}$, $k k_{34}$, $k k_{56}$ zu Seiten hat. Da man von den fünfzehn Kegelschnitten fünfzehnmal drei solche auswählen kann, welche k in allen sechs Punkten $12 \ldots 6$ berühren, so folgt:

Die fünfzehn Kegelschnitte k_{ij}, theilen sich in fünfzehn solche Tripeln von Kegelschnitten, welche den Kegelschnitt k in allen sechs Eckpunkten des Sechseckes 123456 berühren. Ihre fünfundvierzig stets reellen gemeinsamen Sehnen sind die Seiten von fünfzehn Vierecken. Diese Vierecke sind Polvierecke (d. h. die Gegenseiten sind conjugierte Polaren) in Hinsicht auf k; ihre sechzig Eckpunkte sind die sechzig Brianchon'sche Punkte desjenigen Sechsseits, dessen Seiten k in den Punkten $12 \ldots 6$ berühren, endlich sind ihre Diagonaldreiecke diejenigen fünf-

Digitized by Google

zehn Dreiecke, auf dessen Seiten alle sechs Punkte 1 2...6 liegen.

Ferner: Die 45 Diagonalen eines vollständigen Brianchon'schen Sechsseits $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$, dessen Seiten einen Kegelschnitt k in den sechs Punkten eines Pascal'schen Sechseckes 1 2 3 4 5 6 berühren, spalten sich in Hinsicht auf k in 15 Polvierecke, deren Eckpunkte die 60 Brianchon'schen Punkte sind, und in 15 Poldreiecke. Ebenso bilden die 45 Pascal'schen Punkte die Eckpunkte von 15 Polvierseiten, deren Seiten die 60 Pascal'sche Geraden sind, und in 15 Poldreiseiten. Die Diagonaldreiecke jener 15 Polvierecke haben bloß 15 Seiten, welche mit den 15 Seiten des Pascal'schen Sechseckes zusammenfallen; ebenso sind die 15 Eckpunkte des Brianchon'schen Sechsseits die 15 Eckpunkte der Diagonaldreiecke dieser 15 Polvierseiten.

Digitized by Google

Note über die Polynomialcoefficienten.

Von **Paula Klekler** in Wien.

Herr J. Pedro Teixeira hat in seiner im dritten Hefte des 13. Bandes des „Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas" enthaltenen Arbeit „Sobre os coefficientes do desinvolvimento da potencia de grau qualquer d'um polynomio" bewiesen, dass für ein theilfremdes System von r ganzen, nicht negativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, deren Summe gleich n ist, der Polynomialcoefficient $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$ ein Vielfaches von n ist.

Mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. Dr. L. Gegenbauer machte mich darauf aufmerksam, dass dieser Satz sich wesentlich erweitern lässt. Der Ableitung dieser Erweiterung sind die folgenden Zeilen gewidmet, in denen auch auf Grund des zu ermittelnden und eines Theorems des Herrn Carlo Maria Piuma ein Satz über die Addition von Zahlen eines Zahlensystems mit primzahliger Basis aufgestellt wird.

I. Der Exponent der größten in $m!$ enthaltenen Potenz einer Primzahl p ist bekanntlich durch die Summe

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^\alpha}\right] \qquad \left(\alpha=\left[\frac{\log m}{\log p}\right]\right)$$

gegeben.

Es hat daher der Polynomialcoefficient $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$ den Factor n, oder, was dasselbe besagt, es ist $\frac{(n-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$ eine ganze Zahl, wenn für jede $n-1$ nicht übersteigende Primzahl p

$$(1)\quad \left[\frac{n-1}{p^\lambda}\right] \geqq \left[\frac{\alpha_1}{p^\lambda}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{p^\lambda}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{p^\lambda}\right] \quad \left(\lambda=1,2,3,\cdots,\left[\frac{\log(n-1)}{\log p}\right]\right)$$

ist.

Digitized by Google

Wegen

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=n \tag{2}$$

ist

$$\left[\frac{n}{p^\lambda}\right]=\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}{p^\lambda}\right]\geqq\left[\frac{\alpha_1}{p^\lambda}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{p^\lambda}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{p^\lambda}\right]$$

und weil

$$\left[\frac{n}{p^\lambda}\right] \text{ und } \left[\frac{n-1}{p^\lambda}\right]$$

sich nur dann um eine Einheit unterscheiden, wenn p^λ ein Theiler von n ist, so besteht die Relation (1) sicher für alle p, die nicht Primfactoren von n sind.

Da der Voraussetzung nach nicht sämmtliche Zahlen α_μ ($\mu=1,2,\ldots,r$) einen gemeinsamen Theiler haben, so müssen zu jedem Theiler d_n von n[1]), wie man aus Gleichung (2) unmittelbar ersieht, mindestens zwei Zahlen α_ϱ und α_σ theilerfremd und daher

$$\frac{\alpha_\varrho}{d_n}>\left[\frac{\alpha_\varrho}{d_n}\right],\ \frac{\alpha_\sigma}{d_n}>\left[\frac{\alpha_\sigma}{d_n}\right]$$

sein. Demnach ist die Summe

$$\left[\frac{\alpha_1}{d_n}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{d_n}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{d_n}\right]$$

kleiner als die ganze Zahl $\frac{n}{d_n}$ und daher sicher nicht größer als $\left[\frac{n-1}{d_n}\right]$, womit der Satz des Herrn Teixeira bewiesen ist.

Soll der erwähnte Polynomialcoefficient nicht nur den Factor n sondern auch noch den Factor $n-1$ haben, so muss $\frac{(n-2)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$ eine ganze Zahl, also für jede, $n-2$ nicht überschreitende Primzahl p

$$\left[\frac{n-2}{p^\lambda}\right]\geqq\left[\frac{\alpha_1}{p^\lambda}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{p^\lambda}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{p^\lambda}\right]\left(\lambda=1,2,\ldots,\left[\frac{\log(n-2)}{\log p}\right]\right) \tag{3}$$

sein.

Wegen der eben bewiesenen Relation (1) wird, wie man nach den bisher gemachten Erörterungen erkennt, diese Relation allgemein bestehen, wenn sie für jeden Theiler d_{n-1} von $n-1$ — der eine Primzahlpotenz ist — gilt.

Nun hat man:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\lambda-1}+(\alpha_\lambda-1)+\alpha_{\lambda+1}+\cdots+\alpha_r=n-1 \tag{4}$$

[1]) Für den beabsichtigten Zweck genügt es schon, wenn man unter d_n eine Primzahlpotenz versteht.

Digitized by Google

und demnach ist, falls nur die r Summanden auf der linken Seite dieser Gleichung ein theilerfremdes System von r Zahlen bilden, (was ausschließt, dass eine der von α_λ verschiedenen Zahlen $\alpha_\mu > n-2$ ist) die ganze Zahl $\frac{n-1}{d_{n-1}}$ größer als die Summe

$$\left[\frac{\alpha_1}{d_{n-1}}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{d_{n-2}}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_{\lambda-1}}{d_{n-1}}\right]+\left[\frac{\alpha_\lambda-1}{d_{n-1}}\right]+\left[\frac{\alpha_{\lambda+1}}{d_{n-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{d_{n-1}}\right]$$

und

$$\left[\frac{n-2}{d_{n-1}}\right]\geqq\left[\frac{\alpha_1}{d_{n-1}}\right]+\left[\frac{\alpha_2}{d_{n-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_{\lambda-1}}{d_{n-1}}\right]+\left[\frac{\alpha_\lambda-1}{d_{n-1}}\right]+$$
$$+\left[\frac{\alpha_{\lambda+1}}{d_{n-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha_r}{d_{n-1}}\right].$$

Ist α_λ eine nicht durch d_{n-1} theilbare ganze Zahl, so kann man auf der rechten Seite dieser Relation $\left[\frac{\alpha_\lambda-1}{d_{n-1}}\right]$ durch $\left[\frac{\alpha_\lambda}{d_{n-1}}\right]$ ersetzen und man hat somit die Beziehung (3) erwiesen. Da nun aber der gemachten Voraussetzung gemäß unter den Zahlen α_μ stets mindestens eine vorhanden ist, die zu allen übrigen theilerfremd ist, so kann man für jedes d_{n-1} mindestens ein α_λ von der eben angegebenen Eigenschaft finden. Man hat daher zunächst den Satz:

Sind die r nicht negativen ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sämmtlich kleiner als $n-1$, ein theilerfremdes System von r ganzen Zahlen und so beschaffen, dass jedes der Systeme von r nicht negativen Zahlen, welche man aus ihnen dadurch ableiten kann, dass man von einer von ihnen eine Einheit subtrahiert, ebenfalls theilerfremde Systeme sind, so hat der Polynomialcoefficient $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots!\,\alpha_r}$ den Factor $n(n-1)$.

Stellt man die entsprechenden Betrachtungen für die Theilbarkeit des wiederholt erwähnten Polynomialcoefficienten durch $n(n-1)(n-2)$ an, so ergeben sich aus der der Gleichung (4) analogen Beziehung

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\lambda-1}+(\alpha_\lambda-1)+\alpha_{\lambda+1}+\cdots+\alpha_{\sigma-1}+(\alpha_\sigma-1)+$$
$$\alpha_{\sigma+1}+\cdots+\alpha_r=n-2 \quad (\text{für } r\geqq 4)$$

die zwei neuen Bedingungen, dass die Summanden auf der linken Seite ein theilerfremdes System von r Zahlen und dementsprechend jedes von α_λ und α_σ verschiedene $\alpha_\mu < n-3$ sein muss, sowie dass unter den Zahlen α_ν mindestens zwei vorhanden sein müssen, welche zu allen übrigen theilerfremd sind.

Digitized by Google

Durch Fortsetzung des auseinandergesetzten Beweisverfahrens gelangt man schließlich zu folgendem allgemeinen Theorem:

Sind unter den r nicht negativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, die sämmtlich kleiner als $n - \varkappa \left(\varkappa \leqq \frac{r}{2}\right)$ sind und ein theilerfremdes System von r Zahlen bilden, mindestens $\varkappa$ vorhanden, die zu den übrigen $r - \varkappa$ theilerfremd, sind, sind ferner die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ so beschaffen dass jedes System von r nicht negativen Zahlen, welches man aus ihnen dadurch ableitet, dass man von einer oder von zweien u. s. f. oder endlich von $\varkappa$ von ihnen eine Einheit subtrahiert, ein theilerfremdes System ist, so hat der Polynomialcoefficient $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_r!}$ den Factor $n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varkappa)$.

Ist n eine Primzahl, so fällt in den zwei aufgestellten Theoremen die Bedingung, dass $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ein theilerfremdes System von r Zahlen sind, fort.

II. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ und n seien in dem Zahlensysteme mit der Basis p geschrieben, also

$$\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda,0} + \alpha_{\lambda,1} p + \alpha_{\lambda,2} p^2 + \cdots + \alpha_{\lambda,r_\lambda} p^{r_\lambda} = A_\lambda + B_\lambda p^\mu \; (A_\lambda < p^\mu)$$

$$n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots + n_\tau p^\tau$$
$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_r + p^\mu \; (B_1 + B_2 + \cdots + B_r);$$

dann ist

$$\left[\frac{\alpha_\lambda}{p^\mu}\right] = B_\lambda$$

$$\left[\frac{n}{p^\mu}\right] = B_1 + B_2 + \cdots + B_r + \left[\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_r}{p^\mu}\right]$$

oder

$$\left[\frac{n}{p^\mu}\right] - \left\{\left[\frac{\alpha_1}{p^\mu}\right] + \left[\frac{\alpha_2}{p^\mu}\right] + \cdots + \left[\frac{\alpha_r}{p^\mu}\right]\right\} = \left[\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_r}{p^\mu}\right]$$

d. h. gleich der Zahl, welche bei der Addition der Zahlen α_λ im p-adischen Systeme von der μ^{ten} zur $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Stelle übertragen wird.

Man hat daher den von Herrn C. M. Piuma in seiner im 29. Bande des „Giornale di matematiche“ enthaltenen Arbeit „Intorno ai coefficienti polinomiali“ auf weniger einfache Weise bewiesenen Satz:

Der Exponent der höchsten Potenz einer Primzahl p, welche in dem Polynomialcoefficienten $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_r!}$

Digitized by Google

enthalten ist, ist gleich der Summe derjenigen als dekadisch aufgefassten Zahlen, welche bei der Addition der im p-adischen Systeme geschriebenen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ von einer Stufe zur nächst höheren übertragen werden.

Aus der Vereinigung dieses Theorems mit dem am Schlusse der vorigen Nummer ausgesprochenen folgt der Satz:

Sind unter den r ganzen, nicht negativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ die sämmtlich kleiner als $n-x$ $\left(x \leqq \frac{r}{2}\right)$ sind und ein theilerfremdes System von r Zahlen bilden, mindestens x vorhanden, die zu den übrigen $r-x$ theilerfremd sind, sind die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ferner so beschaffen, dass jedes System von r nicht negativen Zahlen, welches man aus ihnen dadurch ableitet, dass man von einer oder von zweien u. s. f., oder endlich von x von ihnen eine Einheit subtrahiert, ein theilerfremdes System ist, so ist die Summe der als dekadische aufgefassten Zahlen, welche bei der Addition der in einem Zahlensysteme mit einer Basis p, die ein Primfactor von $n(n-1)\ldots(n-x)$ $[n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r]$ ist, dargestellten Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ von einer Stufe zur nächst höheren übertragen werden, mindestens

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]-\left[\frac{n-x-1}{p}\right]-\left[\frac{n-x-1}{p^2}\right]-\cdots-\left[\frac{n-x-1}{p^\alpha}\right]$$

$$\left(\alpha=\left[\frac{\log n}{\log p}\right]\right).$$

Digitized by Google

Über die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien.

Von **Eduard Janisch** in Bielitz.

Versteht man unter K einen Kegelschnitt, unter L_1, L_2 zwei einander kreuzende, K nicht schneidende Gerade, so erfüllen bekanntlich die sämmtlichen Geraden, welche K, L_1, L_2 treffen, eine Fläche F vierter Ordnung, die L_1, L_2 zu Doppelgeraden besitzt und in der Verbindungslinie der Schnittpunkte Δ_1, Δ_2 der L_1, L_2 mit der Ebene von K eine dritte Doppelgerade aufweist. Durch jeden Punkt m von K geht eine Erzeugende e von F, welche als die durch m gelegte Transversale zu L_1, L_2 resultiert. Ist t die Tangente in m an K, so bestimmt diese mit L_1, L_2 wie man weiß, ein Berührungshyperboloid an F, das heißt ein Hyperboloid, welches in jedem Punkte der ihm und F gemeinsamen Erzeugenden e eine Tangentialebene besitzt, die im nämlichen Punkte zugleich Tangentialebene an F ist. Wählt man statt t irgend eine andere Tangente an die F in m, das ist irgend eine durch m in der Ebene (t, e) gezogene Gerade t', so bestimmt diese mit L_1, L_2 ebenfalls ein Berührungshyperboloid der F längs e, und, wenn t' ein Büschel beschreibt, so bilden die zugehörigen Berührungshyperboloide ein mit dem Büschel von t' projectives Flächenbüschel zweiter Ordnung.

Jedes Hyperboloid H jenes Büschels hat außer der doppelt zu zählenden Berührungserzeugenden e und den gleichermaßen doppelt zu zählenden Leitlinien L_1 und L_2 der F mit letzterer noch zwei einfache Erzeugende e_1, e_2 gemein, denn irgend ein H und F gemeinsamer, weder auf e, noch auf L_1 oder L_2 gelegener Punkt p ergibt in der durch ihn gelegten Transversalen zu L_1, L_2 sowohl eine Erzeugende von H, als auch von F, und es bildet daher diese Transversale einen Theil des Gesammtschnittes der beiden Flächen. Dass es aber nur zwei solcher Erzeugenden geben kann, erhellt schließlich aus dem Umstande, dass, da der Gesammtschnitt von H

Digitized by Google

und F von der achten Ordnung ist und die bereits ausgewiesenen Theile e, L_1, L_2 zusammen von der sechsten Ordnung sind auf den Restschnitt die Ordnung zwei entfällt.

Die constructive Bestimmung der beiden restlichen gemeinsamen Erzeugenden der F und eines durch eine vorgelegte t' gegebenen Berührungshyperboloides H der F wird sich in folgender Weise durchführen lassen. Wir benützen hiezu den Schnitt der Ebene von K mit H. Dieser wird sich als ein K in m berührender durch die Spurpunkte Δ_1, Δ_2 von L_1, L_2 gehender Kegelschnitt K_0 ergeben, der vollständig bestimmt ist, wenn wir noch einen Punkt Δ_0 desselben ermitteln. Einen solchen Punkt erhalten wir aber im Schnitte irgend einer t', L_1, L_2 schneidenden Erzeugenden e_0 von H mit der Ebene von K. Projicieren wir sodann folgeweise die Punkte Δ_0, Δ_1, Δ_2 aus m auf K nach den Punkten 0, 1, 2, so liegen nach einem sehr bekannten Satze aus der Lehre vom Kegelschnittsbüschel die Punkte $(01, \Delta_0\ \Delta_1)$, $(12, \Delta_1\ \Delta_2)$, $(20, \Delta_2\ \Delta_0)$ auf einer Geraden, welche aus dem Kegelschnitte K die ihm und K_0 gemeinsamen Punkte m', m'' ausschneidet, sodass also die durch m', m'' gehenden Erzeugenden e', e'' von F die Lösungen unserer Aufgabe bilden.

Die umgekehrte Aufgabe, jene Flächentangente t' in m zu construieren, welche ein Berührungshyperboloid H längs der Erzeugenden e bestimmt, das durch eine gegebene andere Erzeugende e' der F geht, ist überaus einfach. Wir brauchen lediglich den Schnittpunkt von e' mit der Ebene (t, e) aufzusuchen und ihn mit m zu verbinden. Ziehen wir sodann durch den Schnittpunkt Σ von $\Delta_1\ \Delta_2$ mit der Linie 1 2 die nach m' gehende Gerade, so liefert die durch den zweiten Schnittpunkt m'' der $\Sigma\ m'$ mit K gelegte Erzeugende e'' der F die restliche H und F gemeinsame Erzeugende.

Man bemerkt, dass die sämmtlichen Schnittpunktepaare m', m'' von K mit den Erzeugendenpaaren e', e'', welche die einzelnen Berührungshyperboloide längs einer bestimmten Erzeugenden e von F mit der Fläche noch gemein haben, Paare einer mit dem Büschel der Hyperboloide projectiven Involution auf K bilden. Das Centrum derselben ist allemal ein Punkt Σ auf der Doppellinie Δ_1, Δ_2. Fällt Σ außerhalb K, so gehen aus Σ zwei Tangenten an K, durch deren Berührungspunkte μ, ν offenbar Erzeugende ε, φ von F gehen, welche jene Berührungshyperboloide längs der e bestimmen, die gleichzeitig Berührungshyperboloide längs ε, φ sind.

Wir können also behaupten:

„Unter den sämmtlichen Berührungshyperboloiden, welche längs irgend einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche vierter Ordnung mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien gelegt werden können, befinden sich im allgemeinen zwei reelle (oder imaginäre), welche noch

Digitized by Google

für je eine andere Erzeugende Berührungshyperboloide sind."

Über die Bedingungen für das Auftreten von reellen oder imaginären doppelt berührenden Hyperboloiden werden wir uns sofort orientieren. Zunächst bemerken wir, dass, wenn die zwei (reellen) doppelt berührenden Hyperboloide, welche zur Erzeugenden e gehören, construiert sind, — das sind also die durch die Erzeugenden ε, φ bestimmten Hyperboloide — die Frage nach den zwei doppeltberührenden Hyperboloiden je für die Erzeugenden ε, φ eine sehr einfache Erledigung findet. Je eines der gesuchten Hyperboloide für ε sowohl, als auch für φ ist offenbar durch die Erzeugende e bestimmt. Wenn wir daher in m die Tangente t an K ziehen, S deren Schnittpunkt mit der $\Delta_1\ \Delta_2$ nennen, so spielt der Punkt S notwendig für μ und ebenso für ν dieselbe Rolle wie Σ für m, das heißt die Berührungspunkte der aus S an K gelegten Tangenten führen zu Erzeugenden der F, welche die doppeltberührenden Hyperboloide für ε und φ bestimmen. Ist demnach n der Berührungspunkt der zweiten aus S an K möglichen Tangenten, und ist f die durch n gehende Erzeugende der F, so liegt diese Erzeugende der F sowohl auf dem zweiten der doppelt berührenden Hyperboloide für ε, als auch auf dem für φ. Hieraus geht zudem hervor, dass der zu n gehörige Punkt Σ übereinstimmt mit dem für m construierten, denn die doppelt berührenden Hyperboloide der Erzeugenden F berühren unsere Fläche an den nämlichen Stellen das zweite Mal wie diejenigen der Erzeugenden e. Man erkennt jetzt auch leicht den involutorischen Charakter der Punktepaare S, Σ. Zu der durch die Paare (S, Σ) gebildeten Involution auf $\Delta_1\ \Delta_2$ behören insbesondere die Punkte Δ_1, Δ_2 selber als ein Paar; sie sind den Torsallinien der F zugeordnet, welche in Ebenenpaare ausgeartete doppelt berührende Hyperboloide ergeben. Endlich bilden noch die etwa verhandenen Schnittpunkte der Doppellinie $\Delta_1\ \Delta_2$ mit dem Leitkegelschnitte K ein weiteres Paar unserer Involution

Wir sind nunmehr soweit, um über die Realitätsverhältnisse der doppeltberührenden Hyperboloide der windschiefen Fläche F Endgiltiges aussagen zu können. Auf jeden Fall reell sind diese Hyperboloide, wenn die Doppelgerade $\Delta_1\ \Delta_2$ der F den Leitkegelschnitt K nicht schneidet. Findet jedoch ein Schneiden statt, so dürfen die Punkte Δ_1, Δ_2 in Bezug auf K nicht ungleichartig liegen, falls reelle derartige Hyperboloide existieren sollen. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung ohneweiters aus den bekannten Bedingungen für die gegenseitige Lage der Punktepaare einer Involution.

Die bisherigen Resultate über die längs zwei Erzeugenden berührenden Hyperboloide unserer Fläche F in einen Satz zusammenfassend, können wir sagen:

„Die Erzeugenden einer windschiefen Fläche vierter Ordnung mit Leitkegelschnitt und zwei

Digitized by Google

geraden Leitlinien lassen sich, falls die Schnittpunkte der beiden Leitgeraden mit der Ebene des Leitkegelschnittes in Bezug auf letzteren gleichartig liegen, derart zu je vieren gruppieren, dass durch je zwei aufeinander folgende ein Hyperboloid gelegt werden kann, welches längs dieser beiden Erzeugenden die Fläche berührt. Die zwei Paare gegenüberliegender Erzeugenden eines jeden solchen Quadruppels treffen den Leitkegelschnitt in Punktepaaren, deren Verbindungslinien durch den Pol der dritten (das ist der von den beiden Leitgeraden verschiedenen) Doppelgeraden der Fläche in Bezug auf den Leitkegelschnitt gehen."

Zurückgehend zum Ausgangspunkte unserer Untersuchungen, bemerken wir, dass außer den längs einer Erzeugenden e berührenden Hyperboloiden der F, für welche je die beiden noch vorhandenen auf denselben gelegenen Erzeugenden von F zusammenfallen, auch dasjenige Berührungshyperboloid der e besonders erwähnt zu werden verdient, für welches eine von den zwei ihm und der Fläche F gemeinsamen Erzeugenden mit e identisch ist. Die Construction dieses besonderen Berührungshyperboloides, welches also die e dreifach enthält, längs e die F osculiert — das sogenannte Haupttangenten-Hyperboloid — ist ganz analog der oben gegebenen Construction eines Berührungshyperboloides durch eine vorgelegte Erzeugende e', welche K in m' trifft. Wir verbinden, da m' in unserem Falle mit m zusammenfallend anzunehmen ist, m mit Σ und finden im zweiten Schnittpunkt m_0 der Σ m mit K jenen Punkt, durch den die einzige Erzeugende e_0 der Fläche F geht, die noch auf dem Haupttangenten-Hyperboloid liegt. Der Schnittpunkt der e_0 mit der Ebene (t, e) gibt mit m verbunden die zweite Haupttangente dieses Punktes. (Die erste ist bekanntlich e selber).

Es liegt nun die Frage sehr nahe, ob es nicht für einzelne Erzeugende e geschieht, dass auch noch e_0 mit e zur Coincidenz gelangt, ob es mit anderen Worten nicht auch Berührungshyperboloide gibt, die an der Berührungsstelle eine Berührung dritter Ordnung eingehen. Die Frage ist zu bejahen. Um dies einzusehen, müssen wir auf die Involution der Punktepaare (S, Σ) zurückgreifen. Jene Involution hat in allen den Fällen reelle Doppelpunkte D_1, D_2, in welchen wir die Existenz reeller doppelt berührender Hyperboloide nachgewiesen haben. Die Bestimmung dieser Doppelpunkte geht sehr einfach von statten; wir brauchen bloß die Punkte μ, ν aus m nach D_1, D_2 auf Δ_1 Δ_2 projicieren. Die Richtigkeit dessen fließt unmittelbar aus der Construction, die zur Anwendung kommt, um die Doppelpunkte der auf K gelegenen Involution zu ermitteln, welche das die Involution (S, Σ) aus m

Digitized by Google

projicierende Büschel ausschneidet. Nun haben wir uns aber in jedem der beiden Doppelpunkte D_1, D_2 einen Punkt S mit dem zugehörigen Punkt Σ vereinigt zu denken. Ziehen wir daher etwa aus D_1 an K die Tangenten und bezeichnen deren Berührungspunkte mit M_1, N_1, so enthält M_1 etwa Punkte m, μ und N_1 die entsprechenden Punkte n, ν, das heißt, die durch M_1 gehende Erzeugende der Fläche F vereinigt in sich eine Erzeugende e und $\mathfrak{e}$, ebenso wie durch N_1 gehende die Erzeugenden f und $\mathfrak{f}$. Demzufolge bestimmen die beiden durch M_1, N_1 gelegten Erzeugenden zunächst ein längs beiden berührendes Hyperboloid der Fläche F und des weiteren existiert für jede von ihnen ein längs derselben eine Berührung dritter Ordnung mit F eingehendes Hyperboloid. Selbstverständlich gilt dasselbe für die Erzeugenden, welche die Berührungspunkte M_2, N_2 der aus D_2 an K geführten Tangenten enthalten.

Die constructive Bestimmung eines solchen hyperosculierenden Hyperboloides, zum Beispiel desjenigen für die durch M_1 gelegte Erzeugende, lässt sich etwa in folgender Weise durchführen. Vor allem ist sicher, dass der Schnitt des fraglichen Hyperboloides mit der Ebene des Leitkegelschnittes K in M_1 mit K eine Berührung dritter Ordnung eingeht und natürlich die Punkte Δ_1, Δ_2 enthält. In der That ist das nothwendig erfolgende Hindurchgehen durch D_1 der Verbindungslinie I II der beiden Punkte I, II, wie wir die aus M_1 auf K projicierten Punkte Δ_1, Δ_2 nennen wollen, bekanntlich ein Criterium dafür, dass durch Δ_1 und Δ_2 ein K in M_1 nach der dritten Ordnung berührender Kegelschnitt möglich ist. Wollen wir den Punkt Δ_3 dieses Kegelschnittes kennen lernen, welcher auf irgend einer etwa durch Δ_3 gezogenen Geraden δ liegt, so brauchen wir nur unter Benützung des eben erwähnten Criteriums, denjenigen Punkt III auf K zu ermitteln, welcher die aus M_1 erfolgte Projection von Δ_3 darstellt. Wir werden also den Schnittpunkt von δ und der Tangente in M_1 mit II verbinden und erhalten im zweiten Schnittpunkt der M_1 II mit K bereits III. M_1 III trifft alsdann δ in Δ_3 und die Transversale durch Δ_3 zu den Leitlinien L_1, L_2 bestimmt endlich das gesuchte Hyperboloid.

Hinsichtlich der Anzahl der Erzeugenden unserer Fläche F, die hyperosculierende Hyperboloide besitzen, ist, wie leicht einzusehen, einzig und allein das Verhalten der Doppellinie Δ_1 Δ_2 gegen den Leitkegelschnitt K maßgebend. Sind Δ_1, Δ_2 ungleichartig gegen K gelegen, so gibt es keine derartigen Erzeugenden. Schneidet hingegen die Δ_1 Δ_2 den Kegelschnitt K nicht, so gibt es vier; wird K jedoch geschnitten, so gibt es nur zwei, natürlich vorausgesetzt, dass entweder beide Punkte Δ_1, Δ_2 außerhalb, oder beide innerhalb K liegen.

Es ist schließlich wohl kaum nöthig, besonders zu erörtern, dass die voranstehende Resultate auch dann noch Giltigkeit behalten, wenn eine der Leitgeraden der Fläche F eine unendlich

Digitized by Google

ferne Gerade ist, die Fläche zum Conoide wird. Selbstverständlich hat man in diesem Falle überall im Texte statt Hyperboloid Paraboloid zu lesen.

Man erkennt, dass im Wesentlichen obige Untersuchungen auf die Eigenschaften der Kegelschnitte gegründet sind, welche die Punkte Δ_1, Δ_2 enthalten und den nicht durch Δ_1, Δ_2 gehenden Kegelschnitt K berühren. Die Theorie dieser Kegelschnitte schließt geradezu die Theorie der Berührungshyperboloide unserer windschiefen Fläche in sich.

Digitized by Google

Einiges aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen.

Von **B. Igel** in Wien.

§. 1.

Der Satz, dass, wenn

$$D_n = D(y_1 y_2 \dots y_n) = \left| y_2 y_1' \dots y_n^{(n-1)} \right|$$

d. i. die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0$$

nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt wird, die durch diese Determinante dividierten Adjuncten, also die Größen

$$\frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(n-1)}}, \quad \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_2^{(n-1)}}, \dots, \quad \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(n-1)}}$$

die Lösungen der Lagrange'schen Adjungierten von (1)

$$(2) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) + \dots + (-1)^n p_n z = 0$$

sind, schien mir von Jürgens in seiner Arbeit in Crelle's Journal Band 80 herzurühren, denn dort wird er ohne Quellenangabe bewiesen.

Erst aus der Abhandlung des Herrn Grünfeld (Fuchs, Journal Bd. 115, pag. 128), welche sich mit dem Satze des Herrn Cels, dass auch, wenn die Determinante D_n nach den Elementen einer beliebigen Zeile entwickelt wird, die durch dieselbe dividierten Adjuncten dieser Elemente, also die Größen

$$(3) \qquad u_1 = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}}, \quad u_2 = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_2^{(k-1)}}, \dots, u_n = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(k-1)}}$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Digitized by Google

einer solchen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche Herr Cels die „Adjungierte der k^{ten} Zeile“ nennt, genügen, beschäftigt, erfuhr ich, dass der erste Satz schon aus der berühmten Arbeit Jacobi's: „Theoria novi Multiplicatoris etc.“ herrühre.

Aus dieser Arbeit Jacobis ersehe ich aber, dass der Satz von Cels ebenso gut wie der erstere von Jacobi stammt.

Im §. 17 der genannten Arbeit geht Jacobi von folgendem Systeme von Gleichungen aus

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A_1' x_1 + A_2' x_2 + \cdots + A_n' x_n = X_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = A_1'' x_1 + A_2'' x_2 + \cdots + A_n'' x_n = X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = A_1^{(n)} x_1 + A_2^{(n)} x_2 + \cdots + A_n^{(n)} x_n = X_n \end{cases}$$

deren Coefficienten $A_k^{(i)}$ Functionen von t bezeichnen. Der Multiplicator dieses Systems ist definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{d\,lg\,M}{dt} &= -\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial Y_n}{\partial x_n}\right\} \\ &= -\{A_1' + A_2'' + \cdots + A_n^{(n)}\} \end{aligned}$$

weshalb

$$(5)\qquad M = e^{-\int \left[A_1' + A_2'' + \cdots + A_n^{(n)}\right] dt}$$

ist. Ein System von Gleichungen, dessen Multiplicator den reciproken Wert hat, ist das folgende

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\{A_1' y_1 + A_2'' y_2 + \cdots + A_1^{(n)} y_n\} \\ \frac{dy_2}{dt} = -\{A_2' y_1 + A_2'' y_2 + \cdots + A_2^{(n)} y_n\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} = -\{A_n' y_1 + A_n'' y_2 + \cdots + A_n^{(n)} y_n\}. \end{cases}$$

Multipliciert man (4) der Reihe nach mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und (6) der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und addiert alle Gleichungen zu einander, so bekommt man, da die Glieder auf der rechten Seite sich aufheben, auf der linken Seite die Gleichung

$$d(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) = 0$$

Digitized by Google

oder

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \text{Const.} \tag{7}$$

Wenn

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem zu (4) darstellt, so liefern die Gleichungen (7) ein eben solches

$$\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{nn} \end{array}$$

zum Systeme (6), dessen Elemente durch

$$y_{ik} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x_{ik}} \tag{8}$$

bestimmt sind, wenn

$$D = \begin{vmatrix} x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn} \end{vmatrix}$$

ist.

Wir haben also zwei Systeme von linearen Differentialgleichungen, deren Lösungen zu einander adjungiert sind.

Setzen wir nun für die allgemeine, homogene, lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y \tag{9}$$

das folgende System

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_{n-1} y_{n-1} + p_n y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{n-1} \end{array} \right. \tag{10}$$

Digitized by Google

wobei $y = y_n$ ist, so lautet das adjungierte System zu (10)

$$(11)\quad \begin{cases} -\frac{d\eta_1}{dx} = p_1\eta_1 + \eta_2 \\ -\frac{d\eta_2}{dx} = p_2\eta_1 + \cdots + \eta_3 \\ -\frac{d\eta_3}{dx} = p_3\eta_1 + \cdots\cdots + \eta_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\frac{d\eta_{n-1}}{dx} = p_{n-1}\eta_1 + \cdots\cdots + \eta_n \\ -\frac{d\eta_n}{dx} = p_n\eta_1. \end{cases}$$

Wenn nun $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n Fundamentalintegrale von (9) sind, so ist

$$D = \begin{vmatrix} Y_1, & Y_2, \ldots, & Y_n \\ Y_1', & Y_2', \ldots, & Y_n' \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ Y_1^{(n-1)}, & \ldots, & Y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = Ce^{\int p_1 dx}$$

Fundamentaldeterminante von (10). $Y_1, Y_2 \ldots, Y_n$ sind particuläre Werte von $y = y_n$, $Y_1', Y_2', \ldots, Y_n'$ von $y^{(n-1)}$ u. s. w. $Y_1^{(n-1)}, Y_2^{(n-1)}, \ldots, Y_n^{(n-1)}$ von y_1.

Die Unterdeterminanten nach den Elementen der ersten Zeile von D, dividiert durch diese, sind particuläre Integrale von η_n, die nach den Elementen der zweiten Zeile genommenen Unterdeterminanten, dividiert durch die Determinante, eben solche von η_{n-1} u. s w., bis schließlich die Unterdeterminanten nach den Elementen der letzten Zeile von D, dividiert durch diese, die Particulärintegrale von η_1.

Schreiben wir das System von (11) folgendermaßen

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-\frac{d\eta_1}{dx}\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1\eta_1) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\eta_2 \\ \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(-\frac{d\eta_2}{dx}\right) = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2\eta_1) + \cdots + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\eta_3 \\ \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(-\frac{d\eta_3}{dx}\right) = \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(p_3\eta_1) + \cdots\cdots + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\eta_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}\left(-\frac{d\eta_{n-1}}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(p_{n-1}\eta_1) + \cdots\cdots + \frac{d\eta_n}{dx} \\ -\frac{d\eta_n}{dx} = p_n\eta_1 \end{cases}$$

Digitized by Google

und eliminieren aus diesen Gleichungen $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$, so bekommen wir die Lagrange'sche Adjungierte

$$(13) \quad -\frac{d^n \eta_1}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 \eta_1) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 \eta_1) + \cdots + (-1)^n p_n \eta_1 .$$

Differentiiert man aber nur die ersten $n-1$ Gleichungen resp. $n-2, n-3, \ldots, 0$-mal, eliminiert aus diesen $\eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ und substituiert dann für η_1 den aus der letzten Gleichung folgenden Wert $\eta_1 = -\frac{1}{p_n}\frac{d\eta_n}{dx}$, so bekommt man die Adjungierte der ersten Zeile in der Form:

$$(14) \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{p_n}\frac{d\eta_n}{dx}\right) = -\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{p_1}{p_n}\frac{d\eta_n}{dx}\right) + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{p_2}{p_n}\frac{d\eta_n}{dx}\right) - \cdots$$
$$\cdots - (-1)^{n-1}\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{d\eta_n}{dx} + (-1)^n \eta_n .$$

Die Adjungierte der zweiten Zeile findet man, indem man die ersten $n-2$ Gleichungen resp. $n-3, n-4, \ldots, 0$ mal differentiiert, $\eta_2, \ldots, \eta_{n-2}$ eliminiert und dann für η_1 den aus der Gleichung

$$-\frac{d^2 \eta_{n-1}}{dx^2} = \frac{d}{dx}(p_{n-1}\eta_1) - (p_n \eta_1),$$

welche durch Combination der letzten zwei Gleichungen entsteht, sich ergebenden Wert substituiert.

Und man sieht leicht ein, dass man auf diesem Wege alle n Adjungierten ableiten kann. Dass sie alle so adjungiert, wie die Lagrange'sche, sind, d. i. dass für sie auch der Satz gilt, dass das Integral einer derselben der Multiplicator der ursprünglichen Differentialgleichung ist, ist evident.

Die obige Methode, die Adjungierten herzustellen, ist nämlich eigentlich nichts Anderes, als in der Lagrange'schen Adjungierten für η_1 andere η, die mit dieser in gewisser Beziehung stehen, setzen. Wenn daher die Relation

$$\eta_1 P(y) + (-1)^{n-1} y P(\eta_1) = \frac{d}{dx} P(\eta_1 y)$$

besteht, so geht dieselbe offenbar durch die Überführung der Lagrange'schen in eine Adjungierte der k^{ten} Zeile in eine eben solche Relation zwischen dieser und der ursprünglichen Differentialgleichung über.

Digitized by Google

§. 2.

In seiner in Kronecker's Journal (Bd. 102, pag. 125.) veröffentlichten Abhandlung ermittelt Herr Pochhammer die Differentialgleichung, welcher die allgemeine hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung genügt, in der Form

$$(1)\quad \begin{aligned} x^{n-1} Q_n(x)\, y^{(n)} + x^{n-2} Q_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + x^{n-3} Q_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \cdots \\ \cdots + x\, Q_2(x)\, y'' + Q_1(x)\, y' + Q_0\, y = 0, \end{aligned}$$

in welcher $Q_n(x), Q_{n-1}(x), \ldots, Q_1(x)$ lineare Functionen von x sind, welche sich auf merkwürdige Weise aus den von ihm gefundenen Constanten zusammensetzen.

Und für die Form der Lösungen von (1) durch bestimmte Integrale gibt Herr Pochhammer die folgende an:

$$\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} (v_{n-1}-v_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1} v_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-2}} dv_{n-2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{v_3} (v_3-v_2)^{\varrho_3-\alpha_3-1} v_2^{\alpha_3-\varrho_2}\, dv_2 \int_0^{v_2} (v_2-v_1)^{\alpha_2-\varrho_2-1} v_1^{\alpha_2-\varrho_1} (v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1} dv_1 .$$

Ist die Gleichung (1) nicht homogen, steht also auf der rechten Seite derselben nicht Null, sondern $F(x)$, so behaupte ich, dass das Hauptintegral derselben folgende Gestalt hat:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} (v_{n-1}-v_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1} v_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-2}} dv_{n-2} \cdots \\ &\cdots \int_0^{v_3} (v_3-v_2)^{\varrho_2-\alpha_3-1} v_2^{\alpha_3-\varrho_2} dv_2 \int_0^{v_2} (v_2-v_1)^{\varrho_2-\alpha_2-1} \Big[(v_1-1)\frac{d\psi}{dv_1} - \\ &\qquad - (\rho_1-\alpha_1-1)\,\psi(v_1)\Big]\, dv_1 \end{aligned}$$

wo $\psi(v_1)$ das Integral folgender Differentialgleichung ist

$$(3)\qquad (v_1-1)\frac{dV}{dv_1} - (\rho_1 - v_1 - 1)\, V = \Phi,$$

wenn Φ durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} (v_{n-1}-v_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1} v_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-2}} dv_{n-2} \cdots \\ &\cdots \int_0^{v_3} (v_3-v_2)^{\varrho_3-\alpha_3-1} v_2^{\alpha_3-\varrho_2} dv_2 \int_0^{v_2} (v_2-v_1)^{\alpha_2-\varrho_2-1} \Phi(v_1)\, dv_1 = F(x). \end{aligned}$$

Digitized by Google

In dieser Formel heißt bekanntlich nach Abel $F(x)$ die „fonction génératrice“ von Φ und Φ die „Determinante“ von $F(x)$.

Beweis.

Die Bedingungen für die Grenzen der bestimmten Integrale der homogenen Differentialgleichung drücken sich nach Pochhammer durch folgende Gleichungen aus:

$$
\begin{aligned}
M_\lambda = &\sum_{k=2}^{k=\lambda} (-1)^{\lambda-k+1} [\alpha+1]^+_{k-2} \cdot (v_{\lambda-1} - v_{\lambda-2})^{-\alpha-k+1} f_k(v_{\lambda-1})\, V \\
&+ \sum_{k=3}^{k=\lambda} (-1)^{\lambda-k+1} [\alpha+1]^+_{k-3} \cdot (v_{\lambda-1} - v_{\lambda-2})^{-\alpha-k+2} \frac{d(f_k(v_{\lambda-1})\, V)}{dv_{\lambda-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum_{k=\lambda-1}^{k=\lambda} (-1)^{\lambda-k+1} [\alpha+1]^+_{k-\lambda+1} (v_{\lambda-1} - v_{\lambda-2})^{-\alpha-k+\lambda-2} \frac{d^{\lambda-3}(f_k(v_{\lambda-1})\, V)}{d v_{\lambda-1}^{\lambda-3}} - \\
&- (v_{\lambda-1} - v_{\lambda-2})^{\alpha-1} \frac{d^{\lambda-2}(f_k(v_1)\, V)}{d v_{\lambda-3}^{\lambda-2}} = 0 \quad (\lambda = 2, 3, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Man sieht sofort ein, dass alle Gleichungen des Systems dieselben Nullpunkte besitzen müssen, welche die Gleichung

$$f_k(v_{\lambda-1}) = 0 \tag{6}$$

besitzt.

Da sich f_k dadurch bestimmt, dass man es dem ersten Gliede der um eine Ordnung niedrigeren Differentialgleichung gleichsetzt, so muss es, da f_2, d. i. der Coefficient des höchsten Differentialquotienten der hypergeometrischen Reihe zweiter Ordnung $= v_1(v_1 - 1)$ ist, die Form haben

$$f_k = v_{k-1}^{k-1}(B_k v_{k-1} - C_k)^{1}) \tag{7}$$

die Gleichungen des System (5) können also, wenn man noch das Integral der Gleichung

$$(v_1 - 1)\frac{dv}{dv_1} - (\rho_1 - \alpha_1 - 1)V = 0 \tag{8}$$

berücksichtigt, nur die Nullpunkte

$$v_{\lambda-1} = 0,\ v_{\lambda-1} = 1,\ v_{\lambda-1} = \infty,\ v_{\lambda-1} = v_{\lambda-2}$$

gemeinsam besitzen. Aus der Formel (7) folgt nun, da in (5) die Summation von $k = 2$ beginnt, dass alle Gleichungen den Nullpunkt $v_{\lambda-1} = 0$ wirklich besitzen.

---

[1]) Pochhammer l. c. pag. 132 und meine Arbeit „Zur Theorie der adjungierten Differentialgleichung.“ Diese Monatshefte Bd. V.

Digitized by Google

Es seien die Functionen S_i durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(9)\quad \begin{cases} \int_0^x (v_{\lambda-1}-x)^{-\alpha} S_1(v_{\lambda-1})\,dv_{\lambda-1} = F(x) \\ \int_0^{v_{\lambda-1}} (v_{\lambda-1}-v_{\lambda-2})^{-\beta} S_2(v_{\lambda-1})\,dv_{\lambda-2} = S_1(v_{\lambda-1}) \\ \int_0^{v_{\lambda-2}} (v_{\lambda-2}-v_{\lambda-3})^{-\gamma} S_3(v_{\lambda-3})\,dv_{\lambda-3} = S_2(v_{\lambda-2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^{v_2} (v_2-v_1)^{-\nu} S_{\lambda-1}(v_1)\,dv_1 = S_{\lambda-2}(v_2), \end{cases}$$

wo also die „Determinante" in der einen Gleichung die „fonction génératrice" der nächstfolgenden ist, dann kann man offenbar dieses System ersetzen durch folgende Gleichung:

$$(10)\quad \int_0^v (v_{\lambda-1}-x)^{-\alpha} \int_0^{v_{\lambda-1}} (v_{\lambda-1}-v_{\lambda-2})^{-\beta} \int_0^{v_{\lambda-2}} (v_{\lambda-2}-v_{\lambda-3})^{-\gamma} \cdots$$
$$\cdots \int_0^{v_2} (v_2-v_1)^{-\nu} S_{\lambda-1}(v_1)\,dv_{\lambda-1} \cdots dv_1 = F(x).$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, zu zeigen, wie man die allgemeine nicht homogene hypergeometrische Differentialgleichung aus einer nicht homogenen hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Hilfe von vermittelnden Gleichungen ganz so, wie im Falle der Homogeneität, ableitet. Die vermittelnden Gleichungen sind natürlich in unserem Falle ebenfalls nicht homogen und es bedarf, um die in ihnen auftretenden von der abhängigen Variabeln freien Glieder zu ermitteln, der Abel'schen Theorie von der „Determinante" und der „fonction génératrice".

Gehen wir von folgender Differentialgleichung aus:

$$(11)\quad \begin{aligned} & f_n(x)\,y^{(n)} + [(\alpha+n-1)_1 f_n'(x) - f_{n-1}(x)]\,y^{(n-1)} + \\ & + [(\alpha+n-1)_2 f_n''(x) - (\alpha+n-2)_1 f_{n-1}'(x) - f_{n-2}(x)]\,y^{(n-2)} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + [(\alpha+n-1)_{n-\nu} f_n^{(n-\nu)}(x) - (\alpha+n-2)_{n-\nu-1} f_{n-1}^{(n-\nu-1)}(x) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{n-\nu-1}(\alpha+n)_1 f_{\nu+2}'(x) + (-1)^{n-\nu} f_\nu(x)]\,y^{(\nu)} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + [(\alpha+n-1)_{n-1} f_n^{(n-1)}(x) - (\alpha+n-2)_{n-2} f_{n-1}^{(n-2)}(x) + \cdots \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_1 f_2'(x)+(-1)^{n-1} f_1(x)]y'+[(\alpha+n-1)_n f_n^{(n)}(x)-$$
$$-(\alpha+n-2)_{n-1} f_{n-1}^{(n-1)}(x)+\cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_2 f_2''(x)+$$
$$+(-1)^{n-1}(\alpha)_1 f_1'(x)]\,y=F(x)$$

und führen in derselben für y das bestimmte Integral

$$y=\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha} V\,dv_{n-1} \tag{12}$$

ein, so erhalten wir die Gleichung

$$[M_1]_{v_{n-1}=x}-[M_1]_{v_{n-1}=0}+$$
$$+\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha-1}\left\{\frac{d^{n-1}(f_n(v_{n-1})V)}{dv_{n-1}^{n-1}}-\frac{d^{n-2}(f_{n-1}(v_{n-1})V)}{dv_{n-1}^{n-2}}+\cdots\right. \tag{13}$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n-1}(f_1(v_{n-1})V)\right\}=F(x).$$

Wenn nun

$$[M_1]_{v_{n-1}=x}=[M_1]_{v_{n-1}=0}=0$$

ist, so folgt, dass der zum Ausdrucke

$$f_n V^{(n-1)}+f_{n-1}V^{(n-2)}+\cdots+f_1 V \tag{14}$$

adjungierte Differentialausdruck eine Function von v_{n-1} gleich ist, welche durch folgende Gleichung bestimmt ist

$$\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha-1} S_1(v_{n-1})\,dv_{n-1}=F(x). \tag{15}$$

Setzt man diese adjungierte Gleichung einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich, welche eine ähnliche Form wie (1.) hat, so ist das von v freie Glied in derselben $S_1(v_{n-1})$.

Führt man in dieser Gleichung für v das bestimmte Integral

$$v=\int_0^{v_{n-1}} (v_{n-2}-v_{n-1})^{-\beta} U\,dv_{n-2}, \tag{16}$$

ein, so erhält man, wenn die Bedingungen

$$[M_2]_{v_{n-2}=v_{n-1}}=[M_2]_{v_{n-1}=0}=0$$

Digitized by Google

erfüllt sind,

$$(17)\quad \int_0^{v_{n-1}} (v_{n-2}-v_{n-1})^{-\beta-1}\left\{\frac{d^{n-2}(\varphi_{n-1}(v_{n-2})\,U)}{d\,v_{n-2}^{n-2}} - \frac{d^{n-3}(\varphi_{n-2}(v_{n-2})\,U)}{d\,v_{n-2}^{n-3}} + \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{n-2}(\varphi_1(v_{n-2})\,U)\right\} = S_1(v_{n-1}).$$

Der Ausdruck in der Klammer muss einer Function $S_2(v_{n-2})$ gleich sein, welche durch die Gleichung

$$(18)\quad \int_0^{v_{n-1}} (v_{n-2}-v_{n-1})^{-\beta-1} S_2(v_{n-2})\,d\,v_{n-2} = S_1(v_{n-1})$$

bestimmt ist.

Die Gleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, der man die neue adjungierte gleich setzt, hat also auf der rechten Seite das Glied $S_2(v_{n-2})$. Fährt man so fort, so erhält man auf diese Weise alle vermittelnden Gleichungen mit den von der abhängigen Variabeln freien aus der Function $F(x)$ bestimmten Gliedern.

Es erübrigt nur noch, den Beweis zu erbringen, dass man die „Determinante" S_i immer bestimmen kann. Zu diesem Zwecke setze man

$$(19)\quad \begin{cases} S_1 = \dfrac{d\,S_1}{d\,v_{n-1}} \\ S_2 = \dfrac{d\,S_2}{d\,v_{n-2}} \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

dann hat man die S_i aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (v_{n-1}-x)^{-\alpha-1}\,d\,S_1 = F(x) \\ \displaystyle\int_0^{v_{n-1}} (v_{n-2}-v_{n-1})^{-\beta-1}\,d\,S_2 = \frac{d\,S_1}{d\,v_{n-1}} = S_1(v_{n-1}) \\ \displaystyle\int_0^{v_{n-2}} (v_{n-3}-v_{n-2})^{-\gamma-1}\,d\,S_3 = \frac{d\,S_2}{d\,v_{n-2}} = S_2(v_{n-2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nun hat Abel[1]) gezeigt, dass man aus der Gleichung

$$(21)\quad f(x) = \int_0^v \frac{d\,s}{(x-a)^n}$$

[1]) „Auflösung einer mechanischen Aufgabe", Crelle's Journal, Bd. 1.

Digitized by Google

s als Function von a in folgender Weise bestimmen kann

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{(a-x)^{1-n}}. \tag{22}$$

Wir erhalten daher

$$S_1 = \frac{\sin(\alpha+1)\pi}{\pi} \int_0^{v_{n-1}} \frac{F(x)}{(v_{n-1}-x)^{-\alpha}}\,dx. \tag{23}$$

Setzt man

$$\frac{\sin(\alpha+1)\pi}{\pi} \frac{d}{dv_{n-1}} \int_0^{v_{n-1}} \frac{F(x)\,dx}{(v_{n-1}-x)^{-\alpha}} = P(v_{n-1}),$$

so erhält man

$$S_2 = \frac{\sin(\beta+1)\pi}{\pi} \int_0^{v_{n-2}} \frac{P(v_{n-1})\,dv_{n-1}}{(v_{n-2})v_{n-1})^{-\beta}}, \tag{24}$$

ebenso

$$S_3 = \frac{\sin(\gamma+1)\pi}{\pi} \int_0^{v_{n-3}} \frac{Q(v_{n-2})\,dv_{n-2}}{(v_{n-3}-v_{n-2})^{-\gamma}}, \tag{25}$$

wenn

$$\frac{\sin(\beta+1)\pi}{\pi} \frac{d}{dv_{n-2}} \int_0^{v_{n-2}} \frac{P(v_{n-1})\,dv_{n-1}}{(v_{n-2}-v_{n-1})^{-\beta}} = Q(v_{n-2})$$

gesetzt wird, u. s. w.

Man sieht also, dass und wie man die Glieder auf der rechten Seite der vermittelnden Gleichungen bestimmen könne. Die letzte Gleichung, die hypergeometrische zweiter Ordnung, hat nach dem obigen die Gestalt [1])

$$f_2(v_2)\,V'' + [(\beta+1)f_2'(v_2) - f_1(v_2)]\,V' + \\ + \left[\frac{(\beta+1)}{2} f_2''(v_2) - \beta f_1(v_2)\right] V = S_{n-2} = \frac{dS_{n-2}}{dv_2}. \tag{26}$$

Bestimmt man S_{n-1} aus der Gleichung

$$\int_0^{v_2} (v_1 - v_2)^{-\nu}\,dS_{n-1} = S_{n-2} = \frac{dS_{n-2}}{dv_2}, \tag{27}$$

[1]) Pochhammer l. c. pag. 81, und auch meine Arbeit „Zur Theorie der adjungierten Differentialgleichungen". Diese Monatshefte Bd. 5.

Digitized by Google

so kommt man auf die Differentialgleichung

$$(28) \qquad \frac{d[f_2(v_1)V]}{dv_1} - f_1(v_1)V = \frac{dS_{u-1}}{dv_1} = S_{n-1}.$$

Setzt man das Integral dieser Gleichung $= \Theta(v_1)$, so erhält man das Integral von (26) in der Form

$$(29) \qquad V = \int_0^{v_2} (v_1 - v_2)^{-\nu} \left[\frac{d(f_2(u_1)\Theta)}{dv_1} - f_1(v_1)\Theta\right] dv_1.$$

Man sieht also, dass man in dem vielfachen bestimmten Integrale, der Lösung der homogenen hypergeometrischen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, für das letzte Integral nur den Ausdruck (29) zu setzen hat, um auch für die nicht homogene hypergeometrische Differentialgleichung das Integral zu erhalten, wie behauptet wurde.

Der Erste, welcher die Theorie Abel's von der „Determinante" und der „fonction génératrice" für die Theorie der nicht homogenen Differentialgleichungen verwendet hat, ist, so weit ich weiß, Herr Heymann.[1])

§. 3.

Die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta(w) = \begin{vmatrix} E_1^{(1)} - w, & E_2^{(1)}, & E_3^{(1)}, \ldots, & E_n^{(1)} \\ E_1^{(2)}, & E_2^{(2)} - w, & E_3^{(2)}, \ldots, & E_n^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ E_1^{(n)}, & E_2^{(n)}, & E_3^{(n)}, \ldots, & E_n^{(n)} - w \end{vmatrix} = 0$$

möge die Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_n$ besitzen. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten, welche den Elementen $E_i^{(\alpha)}$ entsprechen mit $H_i^{(\alpha)}$ und diejenigen, welche den Elementen der β^{ten} Colonne entsprechen mit $H_\beta^{(i)}$, so kann man folgende Determinanten bilden:

$$(2) \qquad D^\alpha = \begin{vmatrix} H_1^{(\alpha)}(w_1), & H_1^{(\alpha)}(w_2), \ldots, & H_1^{(\alpha)}(w_n) \\ H_2^{(\alpha)}(w_1), & H_2^{(\alpha)}(w_2), \ldots, & H_2^{(\alpha)}(w_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ H_n^{(\alpha)}(w_1), & H_n^{(\alpha)}(w_2), \ldots, & H_n^{(\alpha)}(w_n) \end{vmatrix}$$

$$(3) \qquad D_\beta = \begin{vmatrix} H_\beta^{(1)}(w_1), & H_\beta^{(1)}(w_2), \ldots, & H_\beta^{(1)}(w_n) \\ H_\beta^{(2)}(w_1), & H_\beta^{(2)}(w_2), \ldots, & H_\beta^{(2)}(w_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ H_\beta^{(n)}(w_1), & H_\beta^{(n)}(w_2), \ldots, & H_\beta^{(n)}(w_n) \end{vmatrix}.$$

[1]) Dessen „Studien über die Transformation und Integration etc".

Digitized by Google

Bezeichnet man die Unterdeterminante, welche den Elementen $H_i^{(\alpha)}(w_k)$ in der Determinante D^α entsprechen, mit $A_i^{(k)}$, so beweist Herr Hazzidakis in seiner Arbeit „Lineare homogene Differentialgleichungen mit symmetrischer Integraldeterminante“ (Crelles Journal Bd. 111), dass die $A_i^{(k)}$ den Elementen $H_\beta^{(i)}(w_k)$ proportional sind.

Man sieht aber sofort ein, dass ein ähnlicher Satz auch von den Unterdeterminanten $A_i^{(k)}$ der Determinante D_β gelten muss und dass beide Sätze gleichsam einen Reciprocitätssatz bilden. Um dies zeigen zu können, muss ich einige Resultate des Herrn Hazzidakis kurz reproducieren.

Ist ein System von linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\varrho}{dt} = \sum_{i=1}^{n} E_i^{(\varrho)} x_i \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

von der Beschaffenheit, dass die Fundamentaldeterminante

$$\vartheta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)}, \ldots, & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)}, \ldots, & x_n^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)}, \ldots, & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{5}$$

von Null verschieden und symmetrisch ist, d. h. $x_i^{(n)} = x_n^{(i)}$, so sind die allgemeinsten Lösungen des Systems in der Formel enthalten

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k H_i^{(\alpha)}(w_k) H_\nu^{(\alpha)}(w_k), \tag{6}$$

wobei die C_k durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{d}{dx} \lg C_k = w_k - \frac{2}{f(w_k)} N_k^{(k)} \tag{7}$$

wo

$$f(w_k) = \sum_i H_i^{(\alpha)}(w_k) H_\beta^{(i)}(w_k)$$

$$N_k^{(k)} = \sum_i H_\beta^{(i)}(w_k) \frac{d}{dt} H_i^{(\alpha)}(w_k).$$

ist. Die Bedingungen dafür, dass das Gleichungssystem eine symmetrische Fundamentaldeterminante besitzt, sind durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$C_\lambda f(w_\lambda) N_\mu^{(\lambda)} + C_\mu f(w_\mu) N_\lambda^{(\mu)} = 0, \tag{8}$$

Digitized by Google

Und es ist

$$(9) \qquad |x_i^{(\nu)}| = \Big|\sum_1^n C_k H_i^{(\alpha)}(w_k) H_\nu^{(\alpha)}(w_k)\Big| = C_1 C_2 \dots C_n (D^\alpha)^2.$$

Gehen wir jetzt zu dem dem Systeme (4) adjungierten Systeme über

$$(10) \qquad -\frac{dX_\varrho}{dt} = \sum E_\varrho^{(i)} X_i,$$

so sind dessen Lösungen in der Formel

$$(11) \qquad X_i^{(k)} = \vartheta_{ik} : \vartheta$$

enthalten, wenn ϑ_{ik} die Unterdeterminanten von ϑ bedeuten. Nun sieht man leicht ein, dass die Lösungen des Systems (10) ebenfalls symmetrisch sein müssen, wenn es diejenigen des Systems (4) sind. Wenn man daher die Integrale von (10) direct nach der Methode des Herrn Hazzidakis aufsucht, so findet man

$$(12) \qquad X_i^{(\nu)} = \sum_k C_k' H_\beta^{(i)}(w_k) H_\beta^{(\nu)}(w_k),$$

wobei die C_k' durch die Gleichungen bestimmt werden

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{d \lg C_k'}{dt} = \dfrac{2}{f(w_k)} N_k'^{(k)} - w_k \\ N_k'^{(k)} = \sum_i H_i^{(\alpha)}(w_k) \dfrac{d H_\beta^{(i)}(w_k)}{dt} \end{cases}$$

die Fundamentaldeterminante ist in diesem Falle

$$(14) \qquad \begin{aligned} \vartheta' = |X_i^{(\nu)}| &= \Big|\sum C_k' H_\beta^{(i)}(w_k) H_\beta^{(\nu)}(w_k)\Big| \\ &= C_1' C_2' \dots C_n' (D_\beta)^2. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (11) folgen, wenn man einen bekannten Determinantensatz berücksichtigt, die Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} X_{11} = \left\{\dfrac{A_1^{(1)^2}}{C_1} + \dfrac{A_1^{(2)^2}}{C_2} + \dots + \dfrac{A_1^{(n)^2}}{C_n}\right\} : (D^\alpha)^2 \\ X_{22} = \left\{\dfrac{A_2^{(1)^2}}{C_1} + \dfrac{A_2^{(2)^2}}{C_2} + \dots + \dfrac{A_2^{(n)^2}}{C_n}\right\} : (D^\alpha)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{nn} = \left\{\dfrac{A_n^{(1)^2}}{C_1} + \dfrac{A_n^{(2)^2}}{C_2} + \dots + \dfrac{A_n^{(n)^2}}{C_1}\right\} : (D^\alpha)^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Relationen (12), so ergeben sich die Formeln

$$(16)\quad \begin{cases} A_1^{(1)} = \sqrt{C_1 C_1'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(1)}(w_1) & A_2^{(1)} = \sqrt{C_1 C_2'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(2)}(w_1) \\ A_1^{(2)} = \sqrt{C_2 C_2'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(1)}(w_2) & A_2^{(2)} = \sqrt{C_2 C_2'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(2)}(w_2) \\ A_1^{(3)} = \sqrt{C_3 C_3'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(1)}(w_3) & A_2^{(3)} = \sqrt{C_3 C_3'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(2)}(w_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1^{(n)} = \sqrt{C_n C_n'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(1)}(w_n) & A_2^{(n)} = \sqrt{C_n C_n'}\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(2)}(w_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Drückt man die x_{ik} durch die X_{ik} aus, so erhält man

$$(17)\quad \begin{cases} x_{11} = \left\{\dfrac{A_1^{(1)^2}}{C_1'} + \dfrac{A_1^{(2)^2}}{C_2'} + \dots + \dfrac{A_1^{(n)^2}}{C_n'}\right\} : (D_\beta)^2 \\ x_{22} = \left\{\dfrac{A_2^{(1)^2}}{C_1'} + \dfrac{A_2^{(2)^2}}{C_2'} + \dots + \dfrac{A_2^{(n)^2}}{C_n'}\right\} : (D_\beta)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{nn} = \left\{\dfrac{A_n^{(1)^2}}{C_1'} + \dfrac{A_n^{(2)^2}}{C_2'} + \dots + \dfrac{A_n^{(n)^2}}{C_n'}\right\} : (D_\beta)^2. \end{cases}$$

Vergleicht man diese mit den Gleichungen (6), so erhält man

$$(18)\quad \begin{cases} A_1^{(1)} = \sqrt{C_1 C_1'}\,.\,D_\beta\,.\,H_1^{(\alpha)}(w_1) & A_2^{(1)} = \sqrt{C_1 C_1'}\,.\,D_\beta\,.\,H_2^{(\alpha)}(w_1) \\ A_1^{(2)} = \sqrt{C_2 C_2'}\,.\,D_\beta\,.\,H_1^{(\alpha)}(w_2) & A_2^{(2)} = \sqrt{C_2 C_2'}\,.\,D_\beta\,.\,H_2^{(\alpha)}(w_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1^{(n)} = \sqrt{C_n C_n'}\,.\,D_\beta\,.\,H_1^{(\alpha)}(w_n) & A_2^{(n)} = \sqrt{C_n C_n'}\,.\,D_\beta\,.\,H_2^{(\alpha)}(w_n). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Wir erhalten daher den merkwürdigen Reciprocitätssatz in folgenden Formeln ausgedrückt

$$(19)\quad \begin{cases} A_i^{(k)} = B\,.\,D^\alpha\,.\,H_\beta^{(i)}(w_k) \\ A_i^{(k)} = B\,.\,D_\beta\,.\,H_i^{(\alpha)}(w_k). \end{cases}$$

§. 4.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, hier auf einige auffällige Erscheinungen in der Literatur aufmerksam zu machen. Aus dem vorigen §. ist zu ersehen, dass Herr Hazzidakis die adjungierten Systeme Jacobi's nicht kannte, was bei ihm um so merkwürdiger ist,

Digitized by Google

als er schon im Jahre 1881 in Borchardts Journal Bd. 90 den folgenden Satz bewies:

Wenn

$$\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{nn} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen zu

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \cdots + A_{1n}\, y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \cdots + A_{2n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}\, y_1 + A_{n2}\, y_2 + \cdots + A_{nn}\, y_n \end{array} \right.$$

darstellt, so ist

$$\begin{array}{l} Y_{11}, Y_{12}, \cdots, Y_{1n} \\ Y_{21}, Y_{22}, \cdots, Y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{n1}, Y_{n2}, \cdots, Y_{nn} \end{array}$$

ein eben solches zum Differentialgleichungssysteme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{dY_1}{dx} = (A_{11} - \lambda)\, Y_1 + A_{21}\, Y_2 + \cdots + A_{n1}\, Y_n \\ -\dfrac{dY_2}{dx} = A_{12}\, Y_1 + (A_{22} - \lambda)\, Y_2 + \cdots + A_{n2}\, Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{dY_n}{dx} = A_{1n}\, Y_1 + A_{2n}\, Y_2 + \cdots + (A_{nn} - \lambda)\, Y_n \end{array} \right.$$

wenn $Y_{\varrho\sigma}$ die in der Fundamentaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{nn} \end{vmatrix}$$

des ersten Differentialgleichungssystems dem Elemente $y_{\varrho\sigma}$ entsprechende Unterdeterminante bedeutet und $\lambda = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$ ist. Herr Hazzidakis zieht keine weiteren Consequenzen aus diesem Satze. Setzt man aber in (2) $Y_{\varrho\sigma} = u_{\varrho\sigma} \cdot D$, so geht (2) über in

Digitized by Google

$$(3)\qquad \begin{cases} -\dfrac{du_1}{dx} = A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + \cdots + A_{n1}u_n \\ -\dfrac{du_2}{dx} = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{n2}u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{du_n}{dx} = A_{1n}u_1 + A_{2n}u_2 + \cdots + A_{nn}u_n, \end{cases}$$

wenn man die Relation berücksichtigt

$$\frac{dD}{dx} = \lambda . D,$$

so dass also (1) und (3) die adjungierten Differentialgleichungssysteme Jacobis darstellen.

Noch auffälliger ist folgendes. Herr Georg Haeuser in Karlsruhe, der von der Theorie der Adjungierten nichts kannte und nicht einmal von der Lagrange'schen Adjungierten etwas wusste, beweist (1892) in seiner Dissertation[1]) „Über die Fundamentaldeterminanten der allgemeinen, homogenen linearen Differentialgleichungssysteme" den Hazzidakis'schen Satz, den er auch nicht kannte, und gelangt durch die obige Substitution zu den adjungierten Systemen (1) und (3). Herr Haeuser zieht noch folgende Consequenz. Er ersetzt die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y$$

durch das System

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + + p_n y_u \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \quad y_1 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = \qquad\quad y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \qquad\qquad\qquad y_{n-1}, \quad y = y_n \end{cases}$$

und bildet das zu diesem adjungierten System, um auf diese Weise die Adjungierte von (4) zu erhalten.

Während man aber von Herrn Haeuser erwartet hätte, dass er, da er nichts wusste und somit nach keiner Richtung präoccupiert

[1]) Herr Prof. Königsberger hatte die Güte, mir diese Dissertation 1894 zuzuschicken.

Digitized by Google

war, auf diesem Wege zum allgemeinen Satze des Herrn Cels kommen würde, wie es in §. 1 geschehen, gelangt er nur zu derjenigen Differentialgleichung, welche wir gewöhnlich die Lagrangesche nennen.

§. 5.

In dem Differentialgleichungssysteme

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{du_1}{dx} = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \\ \frac{du_2}{dx} = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{du_n}{dx} = A_{n1}u_1 + A_{n2}u_2 + \cdots + A_{nn}u_n \end{cases}$$

seien die Coefficienten lauter gerade, übrigens beliebige Functionen, d. h. es gelte $A_{\varrho\sigma}(x) = A_{\varrho\sigma}(-x)$.

Setzt man in

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = A_{11}v_1 + A_{21}v_2 + \cdots + A_{n1}v_n \\ \frac{dv_2}{dx} = A_{12}v_1 + A_{22}v_2 + \cdots + A_{n2}v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dv_n}{dv} = A_{1n}v_1 + A_{2n}v_2 + \cdots + A_{nn}v_n \end{cases}$$

$(-x)$ statt x, so geht (2) ins adjungierte System von (1) über. Es sei $v_{\varrho\sigma}$ die in

$$D_v(x) = \Sigma \pm v_{11}v_{22}\ldots v_{nn}$$

dem Elemente $v_{\varrho\sigma}$ adjungierte Unterdeterminante, so ist

$$(3)\qquad u_{\rho 1} = \frac{V_{\rho 1}(-x)}{D_v(-x)},\quad u_{\rho 2} = \frac{V_{\rho 2}(-x)}{D_v(-x)}\cdots u_{\rho n} = \frac{V_{\rho n}(-x)}{D_v(-x)}$$
$$(\rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Hat ein Differentialgleichungssystem an symmetrischen Stellen gleiche Coefficienten, ist es also von der Form

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n, \end{cases}$$

Digitized by Google

sind ferner alle Coefficienten gerade Functionen und ist $Y_{\varrho\sigma}(x)$ die in einer Fundamentaldeterminante $D(x)$ dem Elemente $J_{\varrho\sigma}(x)$ adjungierte Unterdeterminante, dann bildet

$$(5) \qquad y_1 = \frac{Y_{\rho 1}(-x)}{D(-x)}, \quad y_2 = \frac{Y_{\rho 2}(-x)}{D(x)} \quad \cdots y_n = \frac{Y_{\rho n}(-x)}{D(-x)}$$

wieder ein vollständiges particuläres Integralsystem und wenn $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ein beliebiges solches darstellt, so gilt stets der Satz:

$$(6) \quad y_1(x) \cdot y_1(-x) + y_2(x) \cdot y_2(-x) + \cdots + y_n(x) \cdot y_n(-x) = \text{Const.}^1)$$

Untersuchen wir dies Verhältnis in Bezug auf die Differentialgleichung

$$(7) \qquad y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y,$$

so führt uns die Analogie mit dem Früheren auf zweierlei Bedingungen, von denen die ersten die Beziehungen zwischen den Coefficienten angeben, wenn die Adjungierte von (7) die Form haben soll:

$$(8) \qquad -y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y_n$$

und die zweiten aussagen, dass für ein ungerades n die Coefficienten mit ungeradem Index gerade und die mit geradem Index ungerade Functionen sein müssen, sowie dass für ein gerades n das Umgekehrte statthaben muss.

Eine leichte Überlegung zeigt aber, dass, wenn die Bedingungen alle mit einander verträglich sind, aus den ersten Bedingungen die Coefficienten mit geradem Index durch die Coefficienten mit ungeraden Index darstellbar sein müssen und zwar mittelst Formeln, in denen nur die ungeraden Differentialquotienten der Coefficienten mit ungeradem Index zum Vorschein kommen können.

Bedenkt man noch, dass dies letztere allgemein der Fall ist, so folgt der entgegengesetzte Charakter der Coefficienten mit geradem Index, sobald nebst den ersten Bedingungen den Coefficienten mit ungeradem Index beigelegt ein bestimmter Charakter wird und wir erhalten den

Satz:

Wenn die Adjungierte von (2) die Form (8) hat, wenn ferner für ein ungerades n die Coefficienten mit ungeradem Index gerade und für ein gerades n ungerade Functionen sind, so hat (8) ein Fundamentalsystem

$$y_1(-x), y_2(-x), \ldots, y_n(-x)$$

[1]) Haeuser, l. c. pag. 24.

Digitized by Google

sobald

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

ein Fundamentalsystem von (7) ist.

Es besteht daher die Gleichung

$$(9) \quad y_1(x)\,y_1(-x) + y_2(x)\,y_2(-x) + \cdots + y_n(x)\,y_n(-x) = C.$$

§. 6.

Zwischen den particulären Integralen der ursprünglichen Differentialgleichung, der ihr entsprechenden Adjungierten und der Associierten bestehen elegante Beziehungen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Substituieren wir in der Adjungierten für z $D.u$, so bekommen wir

$$(1) \quad \text{Adjungierte } (Du) = D\,.\,\text{Adjungierte } (u) + \Phi(u) = 0.$$

Setzen wir in $\Phi(u)$ $u = \dfrac{\partial D}{\partial y_i^{(n-1)}}$, so stellt (1) eine nicht homogene Gleichung dar, der $\dfrac{\partial D}{\partial y_i^{(n-1)}}$ genügt.

Der Ausdruck für das Hauptintegral von (1), den man aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen oder mit Hilfe der sogenannten Methode der Variation der Constanten gewöhnlich ableitet, lautet in unserem Falle

$$(2) \quad u = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha z_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \int \Phi(\vartheta D : \vartheta y_i^{(n-1)}) y_\alpha\, dx.$$

Wenn wir hier über die bei den n auszuführenden Quadraturen auftretenden willkührlichen Constanten disponieren, indem wir etwa die unteren Grenzen der Integrale festsetzen, so erhalten wir eine particuläre Lösung von (1). Bedeutet $\bar{u}$ eine solche Lösung und u eine beliebige Lösung von (1), so folgt daraus, dass $u - \bar{u}$ eine Lösung der reducierten Gleichung ist, die Beziehung

$$(3) \quad u = \bar{u} + \int_1 z_1 + \int_2 z_2 + + \int_n z_n.$$

Die Hinzufügung einer solchen homogenen linearen Function mit constanten Coefficienten der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zu einem bestimmten $\bar{u}$ kommt aber offenbar auf eine Abänderung der unteren Grenzen der Integrale in dem Ausdrucke (2) hinaus. Wenn wir also unter $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ willkürliche Constanten verstehen, so ist jede Lösung von (1) in der Form

Digitized by Google

$$u = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \int_{\xi_\alpha}^{x} \Phi\,(\vartheta D : \vartheta y_i^{(n-1)})\, y_\alpha\, dx \tag{4}$$

enthalten. Die von uns angestrebten Relationen lauten also

$$\frac{\partial D}{\partial y_i^{(n-1)}} = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \int_{\xi_\alpha}^{x} \Phi\,(\vartheta D : \vartheta y_i^{(n-1)})\, y_\alpha\, dx. \tag{5}$$

Digitized by Google

Über die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neuern Dreiecksgeometrie.

Von **A. Schwarz** in Beneschau.

In der im IX. Jahrgange dieser Monatshefte erschienenen Abhandlung „Über eine für alle Kegelschnitte giltige Verallgemeinerung des Satzes, wonach der Peripheriewinkel über dem Halbkreise ein Rechter ist," habe ich für einen Kegelschnitt K die Gleichung

$$y \cdot \operatorname{tang} \omega = \text{const.}$$

nachgewiesen, wobei ω den Gesichtswinkel, unter dem von einem seiner Punkte M aus eine Symmetriesehne von K erscheint, und y das von M auf letztere gefällte Perpendikel bedeutet. Indem durch diese Gleichung eine projective Verwandtschaft zwischen dem Parallelstrahlenbüschel $y = \text{const.}$ und dem Kreisbüscheltang $\omega = \text{const.}$ festgesetzt wird, erscheint K als Erzeugnis derselben. Man kann sich indess von der Beschränkung frei machen, die dem Kreisbüschel insoferne anhaftet, als seine Scheitel mit den Endpunkten einer Symmetriesehne coincidieren, indem man dieselben in irgend zwei Punkte a, b von K verlegt, da auch bei dieser allgemeineren Lage der Basispunkte das Kreisbüschel auf K eine quadratische Involution ausschneidet, deren Centrum c_∞ im Unendlichen liegt und zwar auf einem Strahle, welcher das Spiegelbild von $\overline{a\,b}$ in Bezug auf eine Symmetrielinie von K ist.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, kann man verschiedene Wege einschlagen, indem z. B. das Kreisbüschel in der Form

$$K - G\,L = 0$$

dargestellt wird, worin $K = 0$ und $G = 0$ die Gleichungen des gegebenen Kegelschnittes K und des Strahles $\overline{a\,b}$ vorstellen und der lineare Ausdruck $L = Ax + By + C$ lediglich der Bedingung unterworfen ist, dass der Complex der Glieder zweiter Dimension in $K - G\,L$ mit $x^2 + y^2$ proportional wird, eine Forderung, durch welche lediglich A, B bestimmt werden, während C ganz unbestimmt bleibt. $L = 0$ stellt demnach schon das Parallelstrahlen-

Digitized by Google

büschel dar, welches im Vereine mit dem ihm projectiven Kreisbüschel den gegebenen Kegelschnitt erzeugt. Oder aber man beruft sich auf den allgemeinern Satz, wonach ein Kegelschnittsbüschel, von dessen Basispunkten a, b, c, d die beiden erstgenannten auf einem Kegelschnitte K liegen, den letztern in einer quadratischen Involution schneidet, deren Centrum, wie die Betrachtung des degenerierenden Kegelschnittes $\overline{a\,b}$, $\overline{c\,d}$ ergibt, auf dem Strahle $\overline{c\,d}$ gelegen ist. Endlich kann man auch noch das folgende Theorem heranziehen, welches im Grunde genommen nur einen Folgesatz des vorhergehenden bildet und den Satz von den Chordalen dreier Kreise und damit auch den auf die Mittellothe eines Dreieckes sich beziehenden als Specialfälle umfasst: Wenn drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 ein gemeinsames Punktepaar a, b enthalten, so schneiden sie sich wechselweise noch in drei weiteren Punktepaaren, deren Verbindungslinien L_{12}, L_{23}, L_{31} demselben Strahlenbüschel angehören.

Es ist bemerkenswert, dass das letztere Theorem sich nicht nur auf algebraische Curven höherer Ordnung ausdehnen lässt, sondern auch in der Liniengeometrie ein Analogon des folgenden Inhaltes besitzt. Drei quadratische Complexe, die von einem linearen Complexe in derselben Congruenz geschnitten werden, haben wechselweise drei weitere Congruenzen zweiter Ordnung zweiter Classe gemein, welche in drei linearen Complexen eines Büschels enthalten sind.

Dass damit mehr als eine Analogie, nämlich eine Verallgemeinerung gegeben ist, erkennt man durch Betrachtung der drei den Kegelschnitten K_1, K_2, K_3 adjungierten quadratischen Complexe C_1, C_2, C_3, welche zu Folge ihrer Definition, wonach $C_i\,(i = 1, 2, 3)$ den Inbegriff der K_i schneidenden Strahlen repräsentiert, den Bedingungen des liniengeometrischen Satzes Genüge leisten, da sie von dem speciellen linearen Complexe mit der Achse $\overline{a\,b}$ in derselben Congruenz zweiten Grades, welche in die räumlichen Strahlenbündel mit den Scheiteln a, b zerfällt, geschnitten werden. Die drei Restcongruenzen zweiter Ordnung, welche den Complexen C_i sonst noch gemeinsam sind, werden aus ihnen durch drei axiale Strahlengewinde ausgeschnitten, welche zufolge des aufgestellten Satzes einem und demselben Büschel angehören sollen, was nur dann möglich ist, wenn ihre Achsen L_{12}, L_{23}, L_{31} in einem Strahlenbüschel enthalten sind.

Übrigens handelt es sich hier um das Theorem von dem Gegenpunkte eines Punktquadrupels auf einer C_3 von der dritten Ordnung, woferne dieselbe in einen Kegelschnitt K und eine Gerade G degeneriert und das Punktquadrupel sich paarweise auf diese Bestandtheile vertheilt, unter welcher Voraussetzung der Gegenpunkt nur auf G liegen kann.

Auch in dem Falle, wo drei Elemente a, b, c des Quadrupels K angehören, während das vierte Elemente d auf G gelegen ist,

Digitized by Google

bleibt der Satz vom Gegenpunkte aufrecht. Das Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten a, b, c, d bestimmt nämlich auf den rationalen Trägern K und G zwei projective Punktreihen, indem zwei entsprechende Elemente x, x' derselben auf einem Kegelschnitte des genannten Büschels liegen. In dieser Verwandtschaft sind offenbar die Stellen e, f, wo K von G getroffen wird, die Doppelelemente

$$e \equiv e', \; f \equiv f'.$$

Ist nun x eine von e und f verschiedene Stelle von K und x' die homologe Stelle auf G, so bringe man $\overline{x\,x'}$ in o zum zweitenmale mit K zum Durchschnitte und projiciere aus dem letzteren Punkte die beiden projectiven Punktreihen; alsdann ergeben sich zwei complanare concentrische Strahlenbüschel mit drei sich selbst entsprechenden Strahlen:

$$o\,e \equiv o\,e', \; o\,f \equiv o\,f', \; o\,x \equiv o\,x',$$

woraus hervorgeht, dass die Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte mit o perspectiv liegt und der letztere also thatsächlich den Gegenpunkt des Quadrupels a, b, c, d repräsentiert.

Wenn die auf K gelegenen Basispunkte a, b eines Kreisbüschels unendlich nahe an einander rücken, so coincidiert das Involutionscentrum c_∞ mit dem unendlich fernen Punkte der Tangente T von K, deren Berührungspunkt a' das Spiegelbild von a in Bezug a' auf eine Symmetrielinie dieses Kegelschnittes ist. Hieraus folgt, dass der Strahl, welcher durch a parallel zu $T_{a'}$ gelegt ist, K noch in einem weiteren Punkte a_1 schneidet, der zugleich dem Krümmungskreise angehört, von dem dieser Kegelschnitt an der Stelle a osculiert wird.

Insbesondere ergibt sich für die Parabel: Der Krümmungskreis von $y^2 = 2px$ an der Stelle $a \equiv (x, y)$ schneidet diese Curve in dem Punkte $a_1 \equiv (9x_1 - 3y)$, während der Strahl $\overline{a\,a_1}$ der Parabelachse in einem Punkte mit der Abscisse $3x$ begegnet, ein Umstand, der für die Construction des Krümmungskreises von Wichtigkeit ist.

Für das Folgende empfiehlt es sich, mit Benützung einer von Sylvester geschaffenen Terminologie, von zwei Punktgruppen, die zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von K mit einem Kreise bilden, eine jede als den Rest oder das Residuum der andern, ferner zwei Punktgruppen mit gemeinschaftlichem Reste als coresidual zu bezeichnen. Hinsichtlich der coresidualen Gruppen besteht der Restsatz, dem zufolge die Coresidualität von einem bestimmten Residuum unabhängig ist; d. h. haben die Punktepaare P, P' den gemeinsamen Rest R, so ist jeder weitere Rest R' von P zugleich auch Rest von P'.

Wird der Umstand, dass P und R wechselweise Reste von einander sind, durch die symbolische Gleichung

$$P + R = 0$$

Digitized by Google

angedeutet, so kann der Restsatz dahin formuliert werden, dass die Gleichungen

$$P + R = 0, \quad P' + R = 0, \quad P + R' = 0$$

als Eliminationsresultat

$$P' + R' = 0$$

ergeben.

Es ist klar, dass der Restsatz unmittelbar aus dem Satze hervorgeht, nach welchem ein Kreisbüschel, dessen Scheitel auf K liegen, diesen Kegelschnitt in einer Involution mit unendlich fernem Centrum schneidet, welchem Theoreme mit Rücksicht auf die eingeführte Terminologie auch die folgende Fassung gegeben werden kann: Zwei corresiduale Punktepaare a, b; a', b' werden durch parallele Strahlen ausgeschnitten

$$\overline{ab} \parallel \overline{a'b'}.$$

Zwei Kreisbüschel, deren Scheitelpaare mit zwei corresidualen Punktepaaren zusammenfallen, werden durch K in eine projective Verwandtschaft gesetzt, deren Erzeugnis eben dieser Kegelschnitt ist. Insoferne die Grade als ein Kreis mit unendlich großem Radius aufgefasst werden kann, umfasst die Erzeugung eines Kegelschnittes durch zwei projective Kreisbüschel die Fälle, in denen von den beiden erzeugenden Büscheln das eine ein Kreis-, das andere ein Strahlenbüschel, oder beide Strahlenbüschel sind, in sich.

Um einen Fall anzuführen, in welchem sich in ungezwungener Weise die Erzeugung eines Kegelschnittes mittels projectiver Kreisbüschel ergibt, werde die von Le Paige angegebene Erzeugung einer Curve C_3 dritter Ordnung benutzt, bei welcher die letztere als Ort solcher Punkte o erscheint, aus denen sich drei gegebene Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' in drei Strahlenpaaren einer Involution projicieren. Da die dem Punkte o auferlegte Bedingung auch durch

$$o\,(c\,c'\,a\,b) \overline{\wedge} o\,(c'\,c\,a'\,b')$$

charakterisiert ist, d. h. sich mit der Forderung deckt, dass die beiden Strahlenquadrupel $o\,c$, $o\,c'$, $o\,a$ $o\,b$ und $o\,c'$, $o\,c$, $o\,a'$, $o\,b'$ das gleiche Doppelverhältnis haben, so folgt, dass die C_3 abgesehen von dem Strahle $c\,c'$ das Erzeugnis der beiden projectiven Kegelschnittsbüschel mit den Scheiteln c, c', a, b, beziehungsweise $c'\,c$, a', b' ist, wenn in denselben zwei solche Kegelschnitte einander als homologe zugeordnet werden, für welche die Doppelverhältnisse $(c\,c'\,a\,b)$ und $(c'\,c\,a'\,b')$ den gleichen Wert besitzen.

Werden c, c' mit den absoluten Kreispunkten identificiert, so gehen die beiden Kegelschnittbüschel in Kreisbüschel mit den Basispunkten a, b beziehungsweise a', b' über, und die C_3 ist der Ort aller Punkte o, aus denen sich die Punktepaare a, a'; b, b' in solchen zwei Strahlenpaaren projicieren, dass die Doppelstrahlen

Digitized by Google

der durch dieselben bestimmten Strahleninvolution auf einander senkrecht stehen. Man kann diese C_3 auch als den Ort eines Punktes definieren, von dem aus die Strecken $\overline{a\,b}$ und $\overline{a'\,b'}$ unter demselben Gesichtswinkel erscheinen. Die Projectivität ist bei der vorgenommenen Specialisierung dadurch charakterisiert, dass für die Radien zweier entsprechender Kreise die Proportion statt hat

$$r : r' = \overline{a\,b} : \overline{a'\,b'}.$$

Liegen endlich a, a'; b, b' auf einer und derselben Geraden G, so zerfällt die C_3 in diese Gerade und einen Kegelschnitt K, der somit als Erzeugnis projectiver Kreisbüschel auftritt, was übrigens auch durch elementargeometrische Betrachtungen einleuchtet.

Eine weitere Folgerung aus dem Restsatze ist die nachfolgende:

Der Kegelschnitt K bestimmt auf der unendlich weiten Geraden eine quadratische Involution, deren Elementenpaare m, n; $m', n' \ldots$ in folgender Weise entstehen. Man betrachte unter den ∞^2 Kreisbüscheln, deren Scheitel auf K liegen, diejenigen ∞^1, deren Basispunkte auf den Strahlen des Parallelstrahlenbüschels mit dem Centrum $m^{(i)} (i = 0, 1, 2, \ldots)$ gelegen sind, so schneiden diese alle aus K dieselbe Involution aus, deren Centrum eben der Punkt $n^{(i)}$ ist, wobei es sich von selbst versteht, dass die Punkte $m^{(i)}$, $n^{(i)}$ in der Betrachtung ihre Rolle vertauschen können, ihre Beziehung also eine wechselseitige ist. Was die Doppelelemente dieser Involution anlangt, so überzeugt man sich leicht, dass dieselben mit den unendlich fernen Punkten der Berührungssehnen aller den Kegelschnitt K doppelt berührenden Kreise coincidieren, also mit den unendlich fernen Punkten der Hauptachsen von K identisch sind.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, dass das System S dieser doppelt berührenden Kreise auch dann noch als aus Kreisen bestehend aufzufassen ist, wenn an Stelle der gewöhnlichen Maßbestimmung eine auf K als Fundamentalkegelschnitt gegründete verallgemeinerte Cayleysche Maßbestimmung tritt. Bei derselben wird als Distanz zweier Punkte p, p', deren Verbindungslinie den Fundamentalkegelschnitt in dem Punktepaare a, b schneidet, der mit einer gewißen Constante multiplicierte Logarithmus des Doppelverhältnisses $(p\,p'\,a\,b)$ definiert, so dass die Gleichung

$$\cos^2\left(\frac{r}{2ki}\right) K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2 = 0$$

einen Nicht-Euclidischen Kreis mit dem Mittelpunkte y und dem Radius r vorstellt, wobei K_{xy} durch Polarisation der quadratischen Form K_{xx} — die $= 0$ gesetzt, den Kegelschnitt K darstellt — in Bezug auf das Element y entsteht.

Die Mittelpunkte der Kreise S erfüllen, gleichzeitig, ob man die eine oder die andere Maßbestimmung benützt, die Haupt-

Digitized by Google

achsen von K und zerfallen bei Zugrundelegung von Cayleys Messungsweise in drei Kategorien, je nachdem sie im Endlichen liegen, oder aber in dem ideellen Gebiete sich vorfinden, welches als Ausdehnung der zweifach ausgedehnten Nicht-Euclidischen Mannigfaltigkeit über das durch $K_{xx} = 0$ dargestellte Unendliche hinaus anzusehen ist, und insoferne das geometrische Gegenstück zu den von Georg Cantor eingeführten transfiniten Zahlen bildet, welche die natürliche Zahlenreihe über das Unendliche hinaus fortsetzen. Endlich kommen noch die im Unendlichen befindlichen Mittelpunkte in Betracht, welche mit den Endpunkten der Achsen zusammenfallen, in denen K hyperosculierende Kreise besitzt.

Diese Eigenthümlichkeit der Scheitel ermöglicht es, auf einfache Weise die biquadratische Gleichung zu construieren, welcher die Parameter derselben genügen, wenn der Kegelschnitt K durch seine Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \\ y &= b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 \\ z &= c_0 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 \end{aligned}$$

gegeben ist. Hierin sollen x, y, z Hesse'sche, also $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ rechtwinklige Coordinaten vorstellen.

Man gelangt nämlich zu der Scheitelgleichung, indem man in der analytischen Darstellung

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0$$

der Involution I_4^3 vierten Grades, dritter Stufe, welche durch das System der ∞^3 Kreise auf K bestimmt wird,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$$

setzt. Da unter der Voraussetzung, dass f_1, f_2, f_3, f_4 die elementaren symmetrischen Functionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sind, $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ mit der vierfach linearen symmetrischen Function

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & a_0^2 + b_0^2 & a_0 c_0 & b_0 c_0 & c_0^2 \\ -f_1 & 2(a_0 a_1 + b_0 b_1) & a_0 c_1 + a_1 c_0 & b_0 c_1 + b_1 c_0 & 2 c_0 c_1 \\ f_2 & 2(a_0 a_2 + b_0 b_2) + a_1^2 + b_1^2 & a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 & b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 & 2 c_0 c_2 + c_1^2 \\ -f_3 & 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) & a_2 c_1 + a_1 c_2 & b_2 c_1 + b_1 c_2 & 2 c_1 c_2 \\ f_4 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 c_2 & b_2 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}$$

identisch ist, so ergibt sich für die Scheitelgleichung

Digitized by Google

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a_0^2+b_0^2 & a_0c_0 & b_0c_0 & c_0^2 \\ -4\lambda & 2(a_0a_1+b_0b_1) & a_0c_1+a_1c_0 & b_0c_1+b_1c_0 & 2c_0c_1 \\ 6\lambda^2 & 2(a_0a_2+b_0b_2)+a_1^2+b_1^2 & a_0c_2+a_1c_1+a_2c_0 & b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0 & 2c_0c_1+c_1^2 \\ -4\lambda^3 & 2(a_1a_2+b_1b_2) & a_2c_1+a_1c_2 & b_2c_1+b_1c_2 & 2c_1c_2 \\ \lambda^4 & a_2^2+b_2^2 & a_2c_2 & b_2c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}$$

Zu ihrer Auflösung sind nur Quadratwurzeln erforderlich, da sie in zwei quadratische Gleichungen zerfällt, wenn eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = 0$$

adjungiert wird, die für λ_1 als Unbekannte die Spiegelbilder der Stelle λ_2 hinsichtlich der Hauptachsen, also die Richtung der letzteren liefert.

Im Falle der Parabel kann unbeschadet der Allgemeinheit dem unendlich fernen Punkte der Parameterwert $\lambda = \infty$ zugeordnet, also

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 2$$

gesetzt werden, wodurch Δ übergeht in:

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \equiv \begin{vmatrix} 1 & a_0^2+b_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ -f_1 & 2(a_0a_1+b_0b_1) & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & 2(a_0a_2+b_0b_2)+a_1^2+b_1^2 & a_0 & b_0 & 0 \\ -f_3 & 2(a_1a_2+b_1b_2) & a_1 & b_1 & 0 \\ f_4 & a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}$$

so dass sich mit Anwendung des Laplace'schen Determinantensatzes für die Involution I_4^3 die Gleichung

$$f_1 = -2\frac{a_0a_1+b_0b_1}{a_0^2+b_0^2}$$

ergibt, während der Scheitel der Parabel den Parameter

$$S = -\frac{1}{2}\frac{a_0a_1+b_0b_1}{a_0^2+b_0^2}$$

besitzt.

Setzt man in $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0$ drei der Parameter einander gleich, so ergibt sich in

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

eine Relation, welche über die Krümmungsverhältnisse von K Aufschluss gibt, indem sie die Parameterwerte je zweier Punkte ver-

Digitized by Google

knüpft, in denen K von einem seiner Krümmungskreise osculiert und geschnitten wird. Wenn der vorgelegte Kegelschnitt ein centraler ist, so ist diese Gleichung vom dritten Grade in λ_1, entsprechend dem Umstande, dass durch einen Punkt λ_2 von K drei Krümmungskreise gelegt werden können, von denen jeder den letzteren an dieser Stelle schneidet und an einer andern osculiert. Die zugehörigen Osculationspunkte sind die sich selbst entsprechenden Elemente jener dem Punkte λ_2 zugeordneten ein-zweideutigen Verwandtschaft, bei welcher die einer Stelle x correspondierende x' mit dem vierten Schnittpunkte desjenigen Kreises identisch ist, welcher K in λ_2 schneidet und in x berührt. Im Falle der Parabel ist diese Verwandtschaft mit der Besonderheit behaftet, dass von den drei sich selbst entsprechenden Elementen zwei im unendlich fernen Parabelpunkte vereinigt liegen, so dass durch λ_2, abgesehen von dem Krümmungskreise dieser Stelle selbst nur noch ein einziger Krümmungskreis hindurchgeht, wie dies ja auch aus dem zwischen λ_1 und λ_2 bestehenden Zusammenhange

$$3\lambda_1 + \lambda_2 = 4S$$

hervorgeht.

Identificiert man behufs der Parameterdarstellung der Parabel $y^2 = 2px$ den Parameter λ mit der Ordinate y, so wird

$$S = 0$$

während die analytische Darstellung der Involution I_4^3 die Form annimmt:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,$$

und $\Delta(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ in

$$3y_1 + y_2 = 0$$

übergeht; ein Resultat, das im Vorhergehenden auf anderem Wege abgeleitet wurde.

Wenn der durch die Gleichung $\Delta(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ definierte Übergang von einer Stelle λ_1 zu einer zweiten λ_2 als eine Abbildung angesehen wird, so kann mit Benützung eines Termines, den Dedekind in seiner Abhandlung: „Was sind und was sollen die Zahlen“ eingeführt hat, die Ausnahmestellung der Parabel dahin charakterisiert werden, dass für dieselbe die hier in Betracht kommende Abbildung eine „ähnliche“ ist, indem verschiedenen Originalpunkten verschiedene Bildpunkte entsprechen. Ferner stellt bei der Parabel die nach beiden Richtungen ins Unendliche sich erstreckende Reihe R:

$$\ldots\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

deren Elemente durch die Recursionsformel

$$\Delta(\lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}, \lambda_i) = 0$$

zusammenhängen, eine „Kette“ im Dedekind'schen Sinne dar, die zur Linken und Rechten sich unbegrenzt dem Scheitel und dem unendlich fernen Parabelpunkte als Grenzstellen annähert:

Digitized by Google

$$\lim_{n=+\infty} \lambda_{-n} = S, \quad \lim_{n=+\infty} \lambda_{+n} = \infty.$$

Die Ketteneigenschaft liegt darin begründet, dass das Bild R' von R einen Bestandtheil der letzteren Menge bildet, was von Dedekind durch das Symbol

$$R' \supset R$$

angedeutet wird. Endlich erscheint als Kette eines Elementes λ_i, d. h. als Gemeinheit aller λ_i enthaltenden Ketten, das System aller λ, deren Index nicht kleiner als i ist.

Nach Erledigung der einfachen Krümmungsverhältnisse, welche die Parabel bietet, soll im Folgenden die einem centralen Kegelschnitte K zugeordnete cubische „Krümmungsinvolution" $\Delta(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = 0$, deren dreielementige Gruppe r_1, r_2, r_3 schlechtweg als „Tripel" bezeichnet werden mögen, näher untersucht werden.

Zu diesem Behufe construiere man die Tangenten T_{r_1}, T_{r_2} von K, deren unendlich ferne Punkte die Centren der Involutionen sind, welche die Kreisbüschel mit den Basispunkten r_1, r, beziehungsweise r_2, r anf K bestimmen. Da der durch r_1, r_2, r gelegte Kreis C beiden Büscheln angehört, so ist der vierte Punkt m, den er mit K gemeinschaftlich hat, so gelegen, dass

$$r_2 m \parallel T_{r_1}, \quad r_1 m \parallel T_{r_2}$$

ist. Alsdann folgt aus dem Pascal'schen Satze, dass die Tangente T_m, welche K in m berührt, zu $r_1 r_2$ parallel ist, woraus die Corresidualität der beiden Punktepaare m, m und r_1, r_2 hervorgeht. Da das letzte Dupel r, m zum Residuum hat, so liegen r, m, m, m auf einem Kreise, d. h. der Krümmungskreis in m geht durch r, was

$$m \equiv r_3$$

zur Folge hat. Es gelten mithin die beiden folgenden Sätze:

I. Jedes durch die Gleichung $\Delta(r_1, r_2, r_3, r) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ definierte Tripel r_1, r_2, r_3 der Krümmungsinvolution liegt mit dem ihm projectiv entsprechenden Punkte r auf einem Kreise.

II. Die Tangenten T_{r_1}, T_{r_2}, T_{r_3} in den Ecken eines Tripeldreieckes $r_1 r_2 r_3$ sind den Gegenseiten ihrer Berührungspunkte parallel:

$$T_{r_1} \parallel r_2 r_3, \quad T_{r_2} \parallel r_3 r_1, \quad T_{r_3} \parallel r_1 r_2;$$

oder was dasselbe ist: Die Normalen von K in den Ecken eines Tripeldreieckes sind mit den Höhen des letzteren identisch und schneiden sich als solche in einem und demselben Punkte.

Die Eigenschaft II ist charakteristisch für die Krümmungsinvolution, indem jedes mit ihr behaftete dreielementige Punktsystem der letzteren angehört. Der Beweis hiefür ist schon deshalb von Interesse, weil er zugleich eine Methode liefert, um die

Digitized by Google

Krümmungsinvolution zu vervollständigen, d. h. zu einem Punkte r_1 die beiden zugehörigen, denselben zu einem Tripel ergänzenden Stellen zu construieren.

In Verfolgung dieses Zweckes beziehe man das Strahlenbüschel mit dem Scheitel r_1 in der folgenden Weise ein-zweideutig auf sich selbst. Ein Strahl A dieses Büschels schneidet K außer in r_1 noch in einem zweiten Punkte a_2, durch welchen die Sehne $a_2 b_2$ von K parallel zu T_{r_1} gelegt werde. Construiert man weiters den zu der Tangente T_{b_2} in b_2 parallelen Strahlen A' des Büschels r_1, so soll derselbe als dem A correspondierend angesehen werden. Wenn so jedem Strahle A ein und nur ein Strahl A' homolog ist, so entsprechen andererseits einem accentuierten Strahle A' zwei nicht accentuierte.

Denn es gibt zwei zu A' parallele Tangenten von K, deren Berührungspunkte als b_2 fungieren können. Aus jeder dieser Stellen b_2 wird eine zugehörige a_2 abgeleitet, indem man

$$(b_2)_1 (a_2)_1 \parallel T_{r_1}$$
$$(b_2)_2 (a_2)_2 \parallel T_{r_1}$$

construiert.

Die Strahlen $r_1 (a_2)_1 \equiv (A)_1$, $r_1 (a_2)_2 \equiv (A)_2$ sind nunmehr schon die gesuchten A' entsprechenden Strahlen.

Von den drei sich selbst entsprechenden Elementen dieser einzweideutigen Verwandtschaft ist eines mit T_{r_1} identisch, während die beiden übrigen auf K die Punkte r_2, r_3 ausschneiden, welche r_1 zu einem Tripel ergänzen.

Die Tangenten $T_{r_1}, T_{r_2}, T_{r_3}$ bestimmen ein Dreiseit, dessen Ecken mit m_1, m_2, m_3 derart bezeichnet werden sollen, dass dieselben in der genannten Reihefolge die Pole von $r_2 r_3$, $r_3 r_1$, $r_1 r_2$ sind. Alsdann ist es klar, dass die Strahlen $r_1 m_1$, $r_2 m_2$, $r_3 m_3$ Durchmesser von K und zugleich Schwerlienien von $r_1 r_2 r_3$ sind, so dass die Eigenschaft II auch die nachstehende Fassung gestattet:

Das Tripeldreieck $r_1 r_2 r_3$ ist mit dem ihm vermöge K polarreciproken Dreiseite $T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3}$ perspectiv, und zwar fällt die Perspectivitätsachse mit der unendlich fernen Geraden zusammen, während das Perspectivitätscentrum mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes K, der zugleich Schwerpunkt des Tripeldreieckes ist, coincidiert

Überdies fließt daraus als dritte Eigenschaft der Krümmungsinvolution:

III. Alle Tripeldreiecke haben einen gemeinsamen Schwerpunkt, welcher mit dem Mittelpunkte von K identisch ist.

Da bei einer affinen Verwandtschaft parallele Strahlen in eben solche übergehen, so lässt die Krümmungsinvolution alle Affinitäten zu, welche K in sich überführen. Die so charakteri-

Digitized by Google

sierten Collineationen zerfallen in zwei Schaaren, je nachdem von den beiden unendlich fernen Punkten von K jeder für sich invariant bleibt, oder dieselben mit einander vertauscht werden. Im Sinne der auf K als Fundamentalkegelschnitt gegründeten Cayley'schen Maßbestimmung stellt die eine Gruppe constituierende erste Schaar Drehungen der Ebene um den Mittelpunkt c von K dar, wobei als Schaar invarianter Bahncurven das als Büschel concentrischer Kreise aufzufassende System einander doppelt berührender Kegelschnitte auftritt, welche mit K die Asymptoten gemein haben. Die Affinitäten der zweiten Art repräsentieren dagegen unter Voraussetzung der gewöhnlichen Maßbestimmung projective Spiegelungen, deren Centra auf der unendlich weiten Geraden liegen und deren Achsen die Polaren dieser Centra, also die Durchmesser von K sind.

Unter diesen Operationen sind zwei enthalten, welche zugleich elementare Spiegelungen sind und deren Achsen mit den Haupachsen von K zusammenfallen. Daran liegt es, dass, wie zu erwarten war, die Krümmungsinvolution, also auch der Involutionskegelschnitt, die letzteren zu Symmetralen hat.

Es ist selbstverständlich, dass die erwähnten projectiven Spielungen auch bei dem Cayley'schen Messungsverfahren als eben solche in Bezug auf dieselben Achsen anzusehen sind.

Sind nun (r_1, r_2, r_3) und (r_1', r_2', r_3') zwei Tripel, so erhellt aus dem Vorhergehenden, dass es drei Cayley'sche Drehungen und eben so viele Cayley'sche Spiegelungen gibt, welche das erste Tripel in das zweite verwandeln. Was die ersteren anlangt, so sind sie, falls die Bezeichnung so gewählt wird, dass durch die Drehung, welche r_1 in r_1' überführt, zugleich r_2, r_3 beziehungsweise die Stellen von r_2', r_3' einnehmen, charakterisiert durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1' & r_2' & r_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2' & r_3' & r_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_3' & r_1' & r_2' \end{pmatrix},$$

deren zweiten Horizontalreihen die Potenzen einer cyklischen Permutation enthalten.

Für zwei projective Punktsysteme auf einem Kegelschnitte gilt der Satz, dass die Schnittpunkte der wechselweisen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ irgend zweier Paare entsprechender Punkte x, x'; y, y' auf einer festen Geraden, der Directionsachse, liegen, welche die sich selbst entsprechenden Punkte verbindet.

Daraus folgt im vorliegenden Falle, wo die in Betracht kommenden drei Projectivitäten die unendlich weite Gerade als gemeinsame Directionsachse besitzen, dass die neun Geraden, von denen jede je einen Punkt der beiden Tripel enthält, in drei Tripel unter einander paralleler Strahlen zerfallen.

Digitized by Google

Dieses Ergebnis kann auf einfachere Weise mittels der drei Spiegelungen gewonnen werden, welche das eine Tripel in das andere verwandeln, und, wie sich nebenbei ergibt, durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1' & r_3' & r_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2' & r_1' & r_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_3' & r_2' & r_1' \end{pmatrix}$$

darstellbar sind. In jeder dieser Substitutionen sind die Summen der Indices je zweier in derselben Verticalreihe stehenden Elemente in Bezug auf den Modul 3 einander congruent, eine Eigenthümlichkeit, deren Grund die analytische Untersuchung der Krümmungsinvolution aufdecken wird.

Dem Inhalte der letzten Erwägungen kann die folgende Fassung gegeben werden:

IV. Zwei Tripeldreiecke $r_1 r_2 r_3$ und $r_1' r_2' r_3'$ sind dreifach perspectiv, derart, dass die zugehörigen Perspectivitätscentra auf der unendlich weiten Geraden liegen, indem die nachstehenden Lagenverhältnisse Geltung haben:

$$r_1 r_1' \parallel r_2 r_3' \parallel r_3 r_2'$$
$$r_1 r_2' \parallel r_2 r_1' \parallel r_3 r_3'$$
$$r_1 r_3' \parallel r_2 r_2' \parallel r_3 r_1';$$

die Perspectivitätsachsen dagegen enthalten die folgenden drei Tripel:

(1) $\quad (r_1 r_2, r_1' r_3') \quad (r_2 r_3, r_3' r_2') \quad (r_1 r_3, r_1' r_2')$

(2) $\quad (r_1 r_2, r_2' r_1') \quad (r_2 r_3, r_1' r_3') \quad (r_1 r_3, r_2' r_3')$

(3) $\quad (r_1 r_2, r_3' r_2') \quad (r_2 r_3, r_2' r_1') \quad (r_1 r_3, r_3' r_1')$.

Wenn die beiden Tripeldreiecke unendlich nahe an einander rücken, so geht IV und II über.

V. Aus einem Tripel gehen alle übrigen hervor, indem man dasselbe aus den sämmtlichen unendlich fernen Punkten auf die Curve K projiciert, wobei jedes Tripel dreimal erhalten wird.

Projiciert man insbesondere aus den unendlich fernen Punkten von K, so folgt:

VI. Die Krümmungsinvolution hat zwei dreifache Punkte, welche mit den unendlich fernen Punkten von K coindicieren.

Der letztere Satz lehrt, dass der Involutionskegelschnitt K' der Krümmungsinvolution, von welchem bereits erkannt wurde, dass er dieselben Symmetrieachsen wie K besitzt, mit diesem Kegelschnitte auch die Asymptoten gemein hat, so dass K und K' homothetisch, d. h. ähnlich und ähnlich gelegen sind. Auf Grund dieser Bestimmungen ist K' bekannt, wenn es gelingt, einen ein-

Digitized by Google

zigen im Endlichen gelegenen Punkt desselben anzugeben, was nicht schwierig ist, wenn man auf ein Tripel recurriert, dem ein Scheitel S von K angehört. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, möge S mit einem der Endpunkte der großen Achse zusammenfallen. Die beiden Punkte S', S'', welche S zu einem Tripel ergänzen, liegen alsdann auf einem zur großen Achse normalen Strahle, welcher dieselbe in dem auf K' gelegenen Punkte Σ schneidet; daher ist das Dreieck $S\,S'\,S''$ ein gleichschenkliges, dessen Basis $S'\,S''$ und dessen eine Schwerlinie $S\,\Sigma$ ist. Da der Mittelpunkt c von K mit dem Schwerpunkte von $S\,S'\,S''$ übereinstimmt, so bestimmt sich die Lage von Σ durch die Gleichung

$$2.\overline{\Sigma c} = \overline{c\,S}.$$

Eine weitere Eigenschaft von K' resultiert aus dem Umstande, dass derselbe mit K die Involution conjugierter Durchmesser gemeinsam hat.

Bezeichnet man mit h_3 den Mittelpunkt der Seite $r_1\,r_2$ des Tripeldreieckes $r_1\,r_2\,r_3$, so ist sowohl für K, als auch für K' dem Durchmesser $h_3\,r_3$ jene Sehnenschaar conjugiert, welcher $r_2\,r_3$ angehört; nachdem aber der letztere Strahl den Involutionskegelschnitt tangiert, so ist h_3 der zugehörige Berührungspunkt.

Zugleich liefert die Relation

$$2.\overline{h_3 c} = \overline{c r_3}$$

ein Mittel zur Vervollständigung der Krümmungsinvolution, d. h. zu Construction des Dupels r_1, r_2, wenn r_3 gegeben ist. Es besteht nämlich das Theorem:

VII. Der Involutionskegelschnitt K' der Krümmungsinvolution ist mit K homothetisch und besitzt die halben Achsenlängen des letztern, so dass, wenn K die Gleichung

$$K \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

eigen ist, diejenige von K' die Form

$$K' \equiv \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$$

hat. K' hat ferner die Eigenschaft, die Seiten der Tripeldreiecke in ihren Halbierungspunkten zu berühren und seine Tangente an der Stelle $\left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right)$ schneidet aus K dasjenige Punktepaar aus, welches den Punkt (x, y) zu einem Tripel der Krümmungsinvolution ergänzt.

An Stelle der bisher verwendeten synthetischen Methoden können zur Ableitung der Eigenschaften der Krümmungsinvolution

Digitized by Google

einfache analytische Beweise gesetzt werden, wenn man eine geeignete Parameterdarstellung von K wählt, was durch die folgenden Annahmen für die Ellipse, beziehungsweise Hyperbel erreicht wird:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)\sim\left[\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\ \frac{y}{b}=\frac{1}{2i}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)\sim\left[\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\ \frac{y}{b}=\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

bei welchen den unendlichen fernen Punkten die Parameterwerte $\lambda=0$ und ∞ zugeordnet sind, während

$$\lambda'=c\lambda,\ \lambda''=\frac{c}{\lambda}$$

die Affinitäten darstellen, welche K in sich transformieren, wobei die erstgenannten Transformationen mit den Drehungen um den Mittelpunkt c, die letzteren dagegen mit den Spiegelungen identisch sind.

Dass auch die Krümmungsinvolution diese Affinitäten zulässt, ergibt sich unmittelbar aus ihrer analytischen Darstellung

$$(a)\qquad \lambda_1^3\lambda_2=1,$$

welche aus der Gleichung der Involution I_4^3:

$$(b)\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=1$$

hervorgeht.

Die Gleichung (a) lehrt weiters:

VIII. Jedes Tripel bildet mit einem der unendlich fernen Punkte von K ein äquianharmonisches Quadrupel.

Aus (b) folgt die Giltigkeit des Restsatzes, indem zugleich an Stelle des eingeführten symbolischen Rechnungsverfahrens ein auf eine reale Grundlage sich stützendes tritt.

Aus

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=1$$
$$\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3\lambda_4=1$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4'=1$$

resultiert nämlich

$$\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'=1.$$

Als Bedingung für die Corresidualität zweier Punktepaare $\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1', \lambda_2'$ erhält man

$$\lambda_1\lambda_2=\lambda_1'\lambda_2',$$

Digitized by Google

welche Gleichung vermöge einer frühern Bemerkung auch die Bedingung für den Parallelismus der Strahlen $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$, $\overline{\lambda_1' \lambda_2'}$ darstellt, ein Resultat, das übrigens auch ohne Zuhilfenahme des Restsatzes durch Berechnung der Richtungsconstante

$$\frac{bi}{a} \frac{\lambda_1 \lambda_2 - 1}{\lambda_1 \lambda_2 + 1}$$

des Strahles $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$ gefunden wird.

Sind λ', λ'', λ''' die Lösungen der in λ_1 cubischen Gleichung (b), so ist

$$\lambda' \lambda'' \lambda''' = \frac{1}{\lambda_2},$$

oder

$$\lambda' \lambda'' \lambda''' \lambda_2 = 1,$$

was besagt, dass das Tripel λ', λ'', λ''' mit dem ihm zugeordneten Punkte λ_2 auf einem Kreise liegt.

Wegen

$$\lambda'' = \rho \lambda', \lambda''' = \rho^2 \lambda', \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

gelten die Relationen:

(c) $$\lambda'' \lambda''' = \lambda'^2, \lambda''' \lambda' = \lambda''^2, \lambda' \lambda'' = \lambda'''^2,$$

d. h. die Tangenten von K in λ', λ'', λ''' sind beziehungsweise den Strahlen $\overline{\lambda'' \lambda'''}$, $\overline{\lambda''' \lambda'}$, $\overline{\lambda' \lambda''}$ parallel.

Umgekehrt folgt aus den Gleichungen (c):

$$\lambda'^3 = \lambda''^3 = \lambda'''^3 = \lambda' \lambda'' \lambda''',$$

weshalb die in (c) enthaltene Eigenschaft eines Tripeldreieckes für die Krümmungsinvolution charakteristisch ist.

Um die Lagenbeziehung zweier Tripeldreiecke $(\lambda', \lambda'', \lambda''')$, (μ', μ'', μ''') analytisch darzustellen, beachte man, dass aus

$$\lambda'' = \rho \lambda', \quad \lambda''' = \rho^2 \lambda'$$
$$\mu'' = \rho \mu', \quad \mu''' = \rho^2 \mu'$$

das folgende Gleichungssystem hervorgeht:

$$\begin{aligned} \lambda' \mu' &= \lambda'' \mu''' = \lambda''' \mu'' \\ \lambda' \mu'' &= \lambda'' \mu' = \lambda''' \mu''' \\ \lambda' \mu''' &= \lambda'' \mu'' = \lambda''' \mu', \end{aligned}$$

welches durch ein zweites System von Relationen ersetzbar ist, indem an die Stelle des Gleichheitszeichens das Zeichen für den Parallelismus gesetzt wird.

Digitized by Google

IX. Unter der Voraussetzung, dass die Distanz der beiden Punkte λ_1, λ_2 mit $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$ bezeichnet wird, bestehen die Proportionen:

$$\overline{\lambda' \mu'} : \overline{\lambda'' \mu'''} : \overline{\lambda''' \mu''} = (\lambda' - \mu') : (\lambda'' - \mu''') : (\lambda''' - \mu'')$$
$$\overline{\lambda' \mu''} : \overline{\lambda'' \mu'} : \overline{\lambda''' \mu'''} = (\lambda' - \mu'') : (\lambda'' - \mu') : (\lambda''' - \mu''')$$
$$\overline{\lambda' \mu'''} : \overline{\lambda'' \mu''} : \overline{\lambda''' \mu'} = (\lambda' - \mu''') : (\lambda'' - \mu'') : (\lambda''' - \mu').$$

Bezeichnet man ferner mit (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte λ', λ'', λ''' eines Tripels, so ist wegen $1 + \rho + \rho^2 = 0$:

$$x' + x'' + x''' = 0$$
$$y' + y'' + y''' = 0,$$

also der Schwerpunkt des Tripeldreieckes identisch mit dem Mittelpunkte von K.

X. Alle Tripeldreiecke haben denselben Flächeninhalt.

Denn es lautet die Formel für die Fläche eines dem Kegelschnitte K eingeschriebenen Dreieckes mit den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$f = \frac{C}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = C \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3},$$

worin C eine von λ_1, λ_2, λ_3 unabhängige Größe darstellt, welche den Wert besitzt

$$C = \begin{cases} \frac{ab}{4i} & \text{für die Ellipse} \\ \frac{ab}{4} & \text{„ „ Hyperbel.} \end{cases}$$

Wenn es sich um ein Tripel handelt, also $\lambda_2 = \rho \lambda_1$, $\lambda_3 = \rho^2 \lambda_1$ ist, so geht der Ausdruck für f über in

$$f = C(1 - \rho)(1 - \rho^2)(\rho^2 - \rho) = C.i\,3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab, \text{ bez. } \frac{3\sqrt{3}}{4} abi.$$

Aus dem Umstande, dass für die Hyperbel der Wert von f imaginär ist, kann geschlossen werden:

XI. Bei einer Hyperbel enthält jedes Tripel der Krümmungsinvolution ein reelles und zwei complexe Elemente.

XII. Bildet man die Krümmungsinvolution auf der rationalen Evolute E des Kegelschnittes K ab, indem einem Punkte der letzteren Curve der zugehörige Krümmungsmittelpunkt zugeordnet wird, so ist die Bildinvolution auf E durch die gleiche Eigen-

Digitized by Google

schaft ausgezeichnet, dass die Fläche ihrer Tripeldreiecke einen constanten Wert besitzt, welcher $= \frac{27\sqrt{3}}{64} \frac{(a^2-b^2)^2}{ab}$ ist.

Um die Ideen zu fixieren, werde K als eine Ellipse angesehen; alsdann ergibt sich für die rechtwinkligen Coordinaten des zu einer Stelle λ gehörigen Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{8a}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^3$$
$$\eta = \frac{a^2-b^2}{8bi}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^3,$$

welches Gleichungssystem zugleich die Evolute von E darstellt. Es ist demnach der Flächeninhalt des einem Tripeldreiecke von K correspondierenden, der Evolute E eingeschriebenen Dreieckes, gegeben durch:

$$f' = \frac{(a^2-b^2)^2}{128abi}\begin{vmatrix} \left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^3 & \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^3 & 1 \\ \left(\rho\lambda+\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^3 & \left(\rho\lambda-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^3 & 1 \\ \left(\rho^2\lambda+\frac{\rho}{\rho}\right)^3 & \left(\rho^2\lambda-\frac{\rho}{\lambda}\right)^3 & 1 \end{vmatrix}$$

und es ist nicht schwierig zu beweisen, dass die Determinante auf der rechten Seite von λ unabhängig ist.

Übrigens hätte auch für die Tripeldreiecke der Krümmungsinvolution die Constanz ihrer Flächeninhalte in analoger Weise durch die Demonstration erhärtet werden können, dass die Determinante

$$D_m = \begin{vmatrix} \left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^m & \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^m & 1 \\ \left(\rho\lambda+\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^m & \left(\rho\lambda-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^m & 1 \\ \left(\rho^2\lambda+\frac{\rho}{\lambda}\right)^m & \left(\rho^2\lambda-\frac{\rho}{\lambda}\right)^m & 1 \end{vmatrix}$$

welche für $m = 3$ mit der voranstehenden übereinstimmt, auch für $m = 1$ von λ unabhängig ist. Der Beweis hiefür wird am einfachsten durch die Bemerkung erbracht, dass die beiden Determinanten D_1 und D_3, welche, wie ihr Anblick lehrt, in den Formen

$$D_1 = \sum_{i=-2}^{i=+2} a_i \lambda^i, \qquad D_3 = \sum_{i=-6}^{i=+6} b_i \lambda^i$$

enthalten sind, ungeändert bleiben, wenn λ mit $i\lambda$ oder $\rho\lambda$ vertauscht wird, weshalb nur jene Coëfficienten a_i und b_i von 0 ver-

Digitized by Google

schieden sind, deren Index durch 12 theilbar ist. Innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen besitzt nur der Index 0 diese Eigenschaft; es ist also

$$D_1 = a_0 \quad D_3 = b_0.$$

Zu weitern Resultaten gelangt man, indem in der für die Ellipse benutzten Parameterdarstellung

$$\lambda = e^{i\varphi}$$

eingeführt wird, wodurch dieselbe in

$$x = a\cos\varphi \quad y = b\sin\varphi$$

übergeht, so dass φ die bekannte geometrische Bedeutung hat. Die Gleichung der Krümmungsinvolution nimmt nun die einfache Form an:

$$3\varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi,$$

worin k eine ganze Zahl bezeichnet. Vermöge derselben lässt die Construction des Krümmungskreises an einer Stelle φ_1 an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Da die Parameter des φ_2 zugeordneten Tripels die Werte

$$\varphi' = -\frac{\varphi_2}{3}, \quad \varphi'' = \frac{2\pi - \varphi_2}{3}, \quad \varphi''' = \frac{4\pi - \varphi_2}{3}$$

annehmen, so kann die Aufgabe, die drei Krümmungskreise zu construieren, welche die Ellipse in einem gegebenen Punkte φ_2 schneiden (aber nicht osculieren), mittels der Trisection eines Winkels gelöst werden.

Aus den Werten für φ', φ'', φ''' geht der folgende, auch aus der Lagenbeziehung zwischen K und K' einleuchtende Satz hervor:

XIII. Bei einer Ellipse besteht jedes Tripel aus lauter reellen Elementen.

Für $\varphi_1 = k\frac{2\pi}{3}$ $(k = 0, 1, 2)$ wird φ_2 gleich einem ganzen Vielfachen von 2π, d. h. der Scheitel $(a, 0)$ und die beiden Ellipsenpunkte mit der Abscisse $-\frac{a}{2}$ bilden ein Tripel, was bereits auf andere Weise erkannt worden ist.

Wegen der Realität der einer Ellipse angehörigen Tripel können im Theoreme (IX) die Differenzen $\lambda' - \mu'$, $\lambda'' - \mu'''$, $\lambda''' - \mu''$ etc. durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden, wodurch mit Benutzung von

$$\left| e^{i\varphi} - e^{i\psi} \right| = 2\left| \sin\frac{\varphi - \psi}{2} \right|$$

das folgende System von Proportionen entsteht:

Digitized by Google

$$\overline{\varphi'\psi'} : \overline{\varphi''\psi'''} : \overline{\varphi'''\psi''} = \sin\frac{\varphi'-\psi'}{2} : \sin\frac{\varphi''-\psi'''}{2} : \sin\frac{\varphi'''-\psi''}{2}$$

$$\overline{\varphi'\psi''} : \overline{\varphi''\psi'} : \overline{\varphi'''\psi'''} = \sin\frac{\varphi'-\psi''}{2} : \sin\frac{\varphi''-\psi'}{2} : \sin\frac{\varphi'''-\psi'''}{2}$$

$$\overline{\varphi'\psi'''} : \overline{\varphi''\psi''} : \overline{\varphi'''\psi'} = \sin\frac{\varphi'''-\psi'''}{2} : \sin\frac{\varphi''-\psi''}{2} : \sin\frac{\varphi'''-\psi'}{2}$$ [1])

Wenn man in der Parameterdarstellung der Hyperbel

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$
$$\frac{y}{b} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

für λ den Wert

$$\lambda = e^{\varphi}$$

einführt, so gehen x und y in hyperbolische Functionen des Argumentes φ über, während die Krümmungsinvolution durch

$$3\varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi i$$

gegeben ist, wo k wiederum eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man dagegen

$$\lambda = \cot\frac{\omega}{2},$$

welche Substitution die Darstellung

$$x = a \operatorname{cosec} \omega,\ y = b \cot \omega$$

zur Folge hat, deren geometrische Bedeutung in der im Eingange dieser Arbeit genannten Abhandlung angegeben ist, so lautet die Gleichung der Krümmungsinvolution

$$\cot^3\frac{\omega_1}{2} \cdot \cot\frac{\omega_2}{2} = 1,$$

---

[1]) Das Theorem (X) ist auch bei Anwendung der Parameterdarstellung

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$$

leicht herzuleiten, denn es ist

$$f = -\frac{1}{2}ab\begin{vmatrix}\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 1\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 1\\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}ab\left\{\sin(\varphi_2-\varphi_3)+\sin(\varphi_3-\varphi_1)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right\} =$$

$$= +2ab.\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_3)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2),$$

da für $\alpha+\beta+\gamma=0$ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ ist. Also ergibt sich für die Tripeldreiecke:

$$f = \frac{ab}{2}.3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

Digitized by Google

welche einen neuen Beweis dafür enthält, dass von den Elementen eines Tripels im vorliegenden Falle nur eines reell ist und zugleich die geometrische Bedeutung der reellen Wurzel einer binomischen cubischen Gleichung

$$ax^3 = 1$$

liefert, in welcher a eine reelle Größe repräsentiert.

Wenn bisher in der entwickelten Figur der centrale Kegelschnitt K als das primäre erzeugende Gebilde angesehen wurde, so kann dieselbe auch aus irgend einem der Tripeldreiecke hergeleitet werden, wodurch der Übergang zur neuern Dreiecksgeometrie vollzogen wird.

Irgend einem gegebenen Dreiecke $r_1 r_2 r_3$ sind nämlich, wie aus dem Pascal'schen [1]) Satze folgt, zwei demselben beziehungsweise um- und eingeschriebene Kegelschnitte K und K' adjungiert, von denen der erste in den Ecken r_i $(i = 1, 2, 3)$ Tangenten besitzt, welche den Gegenseiten parallel laufen, während die Berührungspunkte des zweiten in die Mittelpunkte der Seiten fallen. Aus dem Vorhergehenden folgt alsdann, dass das Dreieck $r_1 r_2 r_3$ ein Tripeldreieck der Krümmungsinvolution auf K ist, d. h. dass die Krümmungskreise dieser Curve in r_1, r_2, r_3 sich in einem auf ihr gelegenen Punkte r schneiden, welcher ebenso wie die Linien K, K' der Reihe der aus dem Dreiecke $r_1 r_2 r_3$ ableitbaren merkwürdigen Gebilde angehört. Da eine Hyperbel kein Tripeldreieck mit durchwegs reellen Eckpunkten besitzt, so ist K, und damit auch der Involutionskegelschnitt K', nothwendig eine Ellipse, was auch aus den Gleichungen derselben hervorgehen wird.

Die Gesammtheit der Tripeldreiecke kann als eine Gruppe „associierter Dreiecke" bezeichnet werden, zu welcher das gegebene Dreieck Anlass gibt, obgleich es innerhalb dieser Gruppe keine ausgezeichnete Stellung einnimmt, vielmehr durch irgend ein zweites Dreieck $r_1' r_2' r_3'$ derselben ersetzt werden kann, da auch aus dem letzteren dasselbe Ellipsenpaar in der angeführten Weise ableitbar ist. Man gelangt zu einem zweiten Dreiecke der Gruppe auf linearem Wege, indem ein durch r_1 gehender Strahl S_1 mit der Gegenseite $r_2 r_3$ in ρ_1 zum Durchschnitte gebracht und durch ρ_1 zu einer der beiden in r_1 sich schneidenden Seiten des gegebenen Dreieckes, etwa zu $r_1 r_3$, die Parallele G construiert wird, welche $m_1 r_3$ in σ_1 begegne Alsdann schneidet $\sigma_1 r_2$ den Strahl S_1 in dem gesuchten Punkte r_1'. In analoger Weise werden die auf den durch r_2, r_3 parallel zu S_1 gelegten Strahlen S_2, S_3 gelegenen Punkte r_2', r_3' gefunden.

Wenn das Dreieck $r_1 r_2 r_3$ ein gleichseitiges ist, so gehen die Ellipsen K, K' in den ihm um- und eingeschriebenen Kreis über, deren Radien in dem Verhältnisse 2 : 1 zu einander stehen, entsprechend dem für irgend ein Dreieck giltigen Satze, wonach für

[1]) bez. Brianchon'schen.

Digitized by Google

die gleichgerichteten Achsen der Ellipsen K und K' das gleiche Verhältnis stattfindet. Ebenso ist auch die Eigenthümlichkeit der associierten Dreiecke, einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt und die gleiche Fläche zu besitzen, als Verallgemeinerung eines auf ein gleichseitiges Dreieck bezüglichen Satzes anzusehen.

Hinsichtlich des Dreieckes $r_1 r_2 r_3$ entspricht der unendlich weiten Geraden der Schwerpunkt, den unendlich fernen Punkten der Dreiecksseiten die Schwerlinien, dem Strahlentripel $m_1 m_2, m_2 m_3, m_3 m_1$ die Mittelpunkte h_1, h_2, h_3 der Dreiecksseiten. Es sind daher auch K und K' als einander reciprok entsprechende Kegelschnitte anzusehen, wie dies übrigens auch ihre analytische Darstellung ergibt.

Benutzt man nämlich, um möglichst einfache Gleichungen zu erhalten, $r_1 r_2 r_3$ als Fundamentaldreieck eines homogenen Coordinatensystemes, in welchem die Coordinaten eines Punktes M sich zn einander verhalten sollen wie die mit $\overline{r_2 r_3} \equiv s_1, \overline{r_3 r_1} \equiv s_2, \overline{r_1 r_2} \equiv s_3$ multiplicierten mit den entsprechenden Vorzeichen versehenen Perpendikel, die von M auf die Fundamentalseiten gefällt werden können, so lauten die Gleichungen für K und K':

$$K \equiv x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$
$$K' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_1 = 0.$$

Dagegen ist K' bei Benutzung homogener Liniencoordinaten gegeben durch

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & u_1 \\ -1 & +1 & -1 & u_2 \\ -1 & -1 & +1 & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$K' \equiv u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 = 0,$$

eine Gleichung, welche in ihrem Baue mit der für K aufgestellten übereinstimmt.

Der Punkt r hat die Coordinaten

$$r \equiv \left(\frac{1}{s_2^2 - s_3^2}, \frac{1}{s_3^2 - s_1^2}, \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \right),$$

während die Krümmungskreise C_1, C_2, C_3 in r_1, r_2, r_3 durch das nachstehende System repräsentiert werden:

$$C_1 \equiv s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2 + x_3) \{(s_2^2 - s_1^2) x_3 + (s_3^2 - s_1^2) x_2\} = 0$$
$$C_2 \equiv s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2 + x_3) \{(s_3^2 - s_2^2) x_1 + (s_1^2 - s_2^2) x_3\} = 0$$
$$C_3 \equiv s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2 + x_3) \{(s_1^2 - s_3^2) x_2 + (s_2^2 - s_3^2) x_1\} = 0.$$

Digitized by Google

Da $x_1+x_2+x_3=0$ die unendlich ferne Gerade repräsentiert, so ist aus den Gleichungen von K und K' ersichtlich, dass diese beiden Kegelschnitte den Schwerpunkt (1, 1, 1) des Fundamentaldreieckes zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte besitzen. Was ihre gemeinsamen unendlich fernen Punkte anlangt, so verschwinden für sie die elementaren symmetrischen Functionen $x_1+x_2+x_3$ und $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, weshalb die Coordinaten derselben der binomischen cubischen Gleichung

$$z^3=1$$

Genüge leisten, als deren absolutes Glied die Einheit gewählt werden kann, weil es nur auf die Verhältnisse der Coordinaten ankommt. Aus dem Umstande, dass die Wurzeln dieser Gleichung eine geometrische Reihe bilden, folgt, dass den sechs möglichen Permutationen derselben nur zwei Punkte, nämlich die gesuchten, entsprechen, deren Coordinaten mithin die Werte haben:

$$(1, \rho, \rho^2) \text{ und } (1, \rho^2, \rho).$$

Für die Asymptoten findet man:

$$x_1+\rho x_2+\rho^2 x_3=0$$
$$x_1+\rho^2 x_2+\rho x_3=0.$$

Um endlich noch die gemeinsamen Hauptachsen zu berechnen, werde von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass in der Involution conjugierter Durchmesser den zu r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2 parallelen Durchmessern D_1, D_2, D_3 mit den Gleichungen

$$D_1 \equiv 2x_1-x_2-x_3=0$$
$$D_2 \equiv 2x_2-x_3-x_1=0$$
$$D_3 \equiv 2x_3-x_1-x_2=0$$

beziehungsweise die Schwerlinien

$$\overline{r_1m_1} \equiv x_2-x_3=0$$
$$\overline{r_2m_2} \equiv x_3-x_1=0$$
$$\overline{r_3m_3} \equiv x_1-x_2=0$$

conjugiert sind.

Verwendet man zur Fixierung eines Elementes der unendlich fernen Geraden den Quotienten $\frac{x_2}{x_1}$, so lauten also drei Paare der Involution conjugierter Pole, welche K und K' auf $x_1+x_2+x_3=0$ bestimmen:

$$(-2, 0) \quad (-\frac{1}{2}, \infty) \quad (1, -1),$$

woraus die Involutionsgleichung

$$(\alpha) \qquad \lambda\mu+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)+1=0$$

Digitized by Google

hervorgeht, welche auch aus ihren bekannten Doppelelementen ρ, ρ^2 hätte construiert werden können.

Die unendlich fernen Punkte der Hauptachsen bilden das gemeinschaftliche Punktepaar der Involution (α) und einer zweiten Involution (β), deren Doppelelemente mit den absoluten Kreispunkten:

$$s_2^2 x_1^2 + (s_1^2 + s_2^2 - s_3^2) x_1 x_2 + s_1^2 x_2^2 = 0$$

zusammenfallen, die somit durch

$$(\beta) \qquad s_1^2 \lambda \mu + \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2)(\lambda + \mu) + s_2^2 = 0$$

gegeben ist, da das Verschwinden der zweiten Überschiebung $(a\,b)^2$ die Bedingung für die Apolarität der quadratischen Formen a_x^2, b_x^2 darstellt.

Aus den in den Unbekannten $\lambda\,\mu$ und $(\lambda + \mu)$ linearen Gleichungen (α) und (β) erhält man für die unendlich fernen Punkte der Hauptachsen:

$$(s_2^2 - s_3^2)\, x_1^2 - 2(s_1^2 - s_2^2)\, x_1 x_2 + (s_3^2 - s_1^2)\, x_2^2 = 0.$$

Die gewonnenen geometrischen Resultate stehen in einer bemerkenswerten Beziehung zu der Theorie der algebraischen Gleichungen dritten Grades. Werden nämlich die Wurzeln einer solchen mit $x_1\, x_2\, x_3$ bezeichnet, so stellen die gleich Null gesetzten elementaren symmetrischen Functionen:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ f_2 &\equiv x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0 \\ f_3 &\equiv x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise die unendlich weite Gerade, die Ellipse K und das Fundamentaldreiseit dar, während das gleich Null gesetzte Differenzenproduct

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$$

und die Gleichungen

$$\begin{aligned} t_1 &\equiv x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3 = 0 \\ t_2 &\equiv x_1 + \rho^2 x + \rho x_3 = 0, \end{aligned}$$

deren linke Seiten in der Resolvententheorie eine wichtige Rolle spielen, das System der Schwerlinien des Coordinatendreieckes und die Asymptoten von K repräsentieren.

t_1^3 und t_2^3 genügen als die beiden Werte einer cyklischen Function, welche die Substitutionengruppe $(123)^\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2)$ besitzt, einer quadratischen Gleichung

$$z^2 - (t_1^3 + t_2^3)\, z + (t_1\, t_2)^3 = 0,$$

Digitized by Google

deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche (f_1, f_2, f_3) angehören, und eine einfache geometrische Bedeutung besitzen, welche für das absolute Glied bereits angegeben wurde.

Wegen

$$t_1^3 + t_2^3 \equiv (t_1 + t_2)\ (t_1 + \rho t_2)\ (t_1 + \rho^2 t_2)$$
$$t_1 + t_2 \equiv 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$t_1 + \rho t_2 \equiv \rho^2 (2x_3 - x_1 - x_2)$$
$$t_1 + \rho^2 t_2 \equiv \rho (2x_2 - x_1 - x_3)$$

ist

$$t_1^3 + t_2^3 \equiv (2x_1 - x_2 - x_3)\ (2x_2 - x_1 - x_3)\ (2x_3 - x_1 - x_2),$$

also stellt der gleich Null gesetzte Coefficient von z das Durchmessertripel D_1, D_2, D_3 vor.

Auf Grund dieser geometrischen Deutung ist es möglich, die Coefficienten der Resolventengleichung mittels geometrischer Betrachtungen durch die elementaren symmetrischen Functionen auszudrücken.

Was zunächst das Product $t_1 t_2$ anlangt, so gehört die Linie zweiter Ordnung $t_1 t_2 = 0$ als Asymptotenpaar von K dem Büschel doppelt berührender Kegelschnitte an, in welchem abgesehen von K die doppelt gezählte unendlich weite Gerade und ferner der Kegelschnitt

$$s_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

sich vorfinden, weshalb die folgenden Identitäten gelten:

$$t_1 t_2 \equiv \alpha f_2 + \beta f_1^2$$
$$s_2 \equiv \gamma f_2 + \delta f_1^2,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von x_1, x_2, x_3 unabhängige Constante bedeuten.

Zur Bestimmung von α und γ können mit Vortheil die Coordinaten

$$(0, 1, -1)\quad (1, 0, -1)\quad (1, -1, 0)$$

irgend eines der unendlich fernen Punkte des Fundamentaldreiseites verwendet werden, da für jeden derselben $f_1 = 0$ ist, während die Functionen $f_2, t_1 t_2, s_2$ für alle Elemente dieses Tripels je einen und denselben Wert, nämlich bezüglich $-1, 3, 2$ annehmen. Man findet demnach

$$\alpha = -3,\ \gamma = -2.$$

Zur Bestimmung von β und δ eignet sich die Substitution der Coordinaten des Mittelpunktes $(1, 1, 1)$ von K, für den

$$t_1 t_2 = 0, f_1 = f_2 = s_2 = 3$$

wird, so dass sich

$$\beta = 1,\quad \delta = 1,$$

Digitized by Google

also

$$t_1 t_2 = -3 f_2 + f_1^2$$
$$s_2 = -2 f_2 + f_1^2$$

herausstellt.

Um die analoge Darstellung für $t_1^3 + t_2^3$ zu finden, betrachte man das vollständige Schnittpunktssystem der beiden degenerierenden Linien dritter Ordnung

$$t_1^3 + t_2^3 = 0,\ f_3 = 0,$$

von denen jede wegen ihres symmetrischen Baues die sechs Collineationen zulässt, welche den sechs möglichen Vertauschungen der x_1, x_2, x_3 entsprechen, und die sämmtlich Affinitäten vorstellen, da bei jeder von ihnen die unendlich weite Gerade in sich transformiert wird. Es versteht sich von selbst, dass auch ihr vollständiges Schnittpunktssystem

$$\begin{array}{lll} (0, 1, -1) & (0, 1, \ \ 2) & (0, \ \ 2, 1) \\ (1, 0, \ \ 2) & (1, 0, -1) & (2, \ \ 0, 1) \\ (1, 2, \ \ 0) & (2, 1, \ \ 0) & (1, -1, 0) \end{array}$$

diese Gruppe von Collineationen gestattet.

Da die in der Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten stehenden drei Punkte auf der unendlich weiten Geraden liegen, so müssen die sechs übrigen einem Kegelschnitte angehören, welcher mit

$$9 f_2 - 2 f_1^2 = 0$$

identisch ist, da für alle Elemente des erwähnten Sextupels f_1 denselben Wert 3, f_2 denselben Wert 2 annimmt. Es gehören demnach die drei Linien dritter Ordnung

$$t_1^3 + t_2^3 = 0,\ f_3 = 0,\ f_1 (9 f_2 - 2 f_1^2) = 0$$

demselben Büschel an, was eine Gleichung der Form

$$t_1^3 + t_2^3 = \alpha f_3 + \beta f_1 (9 f_2 - 2 f_1^2)$$

zur Folge hat. Von den numerischen Constanten α, β kann die erstere bequem mittelst der Substitution $(1, \rho, \rho^2)$ für die Coordinaten gefunden werden, da bei derselben

$$t_1 = f_1 = 0, \quad t_2 = 3, \quad f_3 = 1$$

ist. Auf diesem Wege ergibt sich

$$\alpha = 27.$$

Digitized by Google

Substituiert man dagegen die Coordinaten (1, 1, 1), so verschwindet die linke Seite, während

$$f_1 = 3, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = 1$$

wird, so dass sich

$$\beta = -1$$

$$t_1^3 + t_2^3 = 27 f_3 - 9 f_1 f_2 + 2 f_1^3$$

herausstellt.

Im Folgenden soll noch die Summe der dritten Potenzen der Wurzeln

$$s_3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

auf geometrischem Wege als Function von f_1, f_2, f_3 dargestellt werden. Da die Hesse'sche Covariante von f_3 von einem constanten Factor abgesehen mit f_3 übereinstimmt, so erhält man für die Wendepunkte der Curve $s_3 = 0$ die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{lll} (0, \quad 1, -1) & (\quad 0, \quad \rho, -1) & (\quad 0, -1, \quad \rho) \\ (1, \quad 0, -1) & (-1, \quad 0, \quad \rho) & (\quad \rho, \quad 0, -1) \\ (1, -1, \quad 0) & (\quad \rho, -1, \quad 0) & (-1, \quad \rho, \quad 0). \end{array}$$

Das Strahlentripel

$$f_1 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0$$

schneidet aus dem Fundamentaldreiseit dasselbe Punktsystem aus, mithin gehört

$$f_1 t_1 t_2 = 0$$

dem syzigetischen Büschel von Linien dritter Ordnung an, in dem auch $s_3 = 0$ und $f_3 = 0$ enthalten sind. Zugleich stellt dieses Tripel mit $f_3 = 0$ zwei Wendedreiseite von $s_3 = 0$ dar, während die beiden übrigen durch

$$(\rho x_1 + x_2 + x_3)\ (x_1 + \rho x_2 + x_3)\ (x_1 + x_2 + \rho x_3) = 0$$
$$(\rho^2 x_1 + x_2 + x_3)\ (x_1 + \rho^2 x_2 + x_3)\ (x_1 + x_2 + \rho^2 x_3) = 0$$

dargestellt werden.

Endlich stellt die Tabelle

$$\begin{array}{lll} x_2 \pm x_3 = 0, & x_2 \pm \rho x_3 = 0, & x_2 \pm \rho^2 x_3 = 0 \\ x_3 \pm x_1 = 0, & x_3 \pm \rho x_1 = 0, & x_3 \pm \rho^2 x_1 = 0 \\ x_1 \pm x_2 = 0, & x_1 \pm \rho x_2 = 0, & x_1 \pm \rho^2 x_2 = 0 \end{array}$$

für die oberen Zeichen die Wendetangenten, für die unteren die harmonischen Polaren der Wendepunkte dar.

Aus dem Umstande, dass die Wendepunkte der ersten Verticalreihe der unendlich weiten Geraden angehören, folgt, dass die

Digitized by Google

sechs übrigen auf einem Kegelschnitte liegen, welcher mit

$$f_1^2 - 3f_2 = 0$$

identisch ist, weil für die Wendepunkte der zweiten und dritten Verticalreihe f_1 und f_2 je einen festen Wert, nämlich $\rho - 1$, beziehungsweise $-\rho$ annehmen und

$$(\rho - 1)^2 = -3\rho$$

ist.

$f_1(f_1^2 - 3f_2)$ gehört also gleichfalls dem vorhin erwähnten Büschel an, so dass eine Identität

$$s_3 \equiv \alpha f_3 + \beta f_1 (f_1^2 - 3f_2)$$

Geltung hat, für deren Constante sich vermöge der Substitutionen $(1, \rho, \rho^2)$ und $(1, 0, 0)$ die Werte

$$\alpha = 3, \quad \beta = 1$$

ergeben; mithin ist

$$s_3 \equiv 3f_3 - 3f_1 f_2 + f_1^3 .$$

Zum Schlusse dieser Digression über algebraische Gleichungen dritten Grades möge noch erwähnt werden, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ t_1 &= x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3 \\ t_2 &= x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3, \end{aligned}$$

oder das ihm äquivalente

$$\begin{aligned} 3x_1 &= f_1 + t_1 + t_2 \\ 3x_2 &= f_1 + \rho^2 t_1 + \rho t_2 \\ 3x_3 &= f_1 + \rho t_1 + \rho^2 t_2 \end{aligned}$$

ebenfalls eine geometrische Bedeutung hat, indem es die Formeln für die Coordinatentransformation beim Übergange vom Fundamentaldreiecke $f_3 = 0$ zu dem neuen Coordinatendreiecke

$$f_1\, t_1\, t_2 = 0$$

enthält.

Die wesentlichste alle andern umfassende Eigenschaft der Krümmungsinvolution, wonach ein Tripel $r_1 r_2 r_3$ mit dem ihm projectiv zugeordneten Punkte r auf einem Kreise liegt, — aus welcher die Corresidualität der Punktepaare $r_i r_i$ und $r_j r_k$ hervorgeht, wenn $(i - j)(i - k)(j - k) \gtrless 0$ vorausgesetzt wird — leuchtet unmittelbar ein, wenn man sich zur Darstellung des Kegelschnittes K der durch eine quadratische Gleichung $\Omega = 0$ ver-

Digitized by Google

bundenen tetracyklischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 bedient. Werden die letzteren auch als Coordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raume gedeutet, so stellen die beiden quadratischen Gleichungen

$$\Omega = 0 \quad K = 0$$

eine Raumcurve vierter Ordnung R_4 dar, von welcher vorausgesetzt werden kann, dass sie einen auf der Kugelfläche $\Omega = 0$ gelegenen Doppelpunkt δ besitzt; denn es lässt sich stets einrichten, dass $K = 0$ die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung ist, dessen Scheitel δ derselben Kugelfläche angehört. Diese doppelte Deutung der tetracyklichen Coordinaten, welche ein instructives Beispiel für die analytische Äquivalenz geometrischer Probleme darbietet, gestattet, die in Betracht kommenden Krümmungsverhältnisse des Kegelschnittes anschaulich zu erfassen, da die Involution I_4^3, welche die ∞^3 mit K complanaren Kreise auf diesem Kegelschnitte bestimmen, sich in jener einfachen Involution abbildet, in der die ∞^3 Ebenen des Raumes die Raumcurve R_4 schneiden.

Je nachdem der Kegelschnitt K ein centraler ist, oder nicht, ist δ ein Doppelpunkt mit getrennten Doppelpunktstangenten, oder eine Spitze der R_4, woraus sich ergibt, dass diesen beiden Fällen entsprechend, durch einen Punkt r' derselben, abgesehen vonder Osculationsebene dieser Stelle, drei beziehungsweise eine Schmiegungsebene gehen. Im ersteren Falle sind die Osculationsstellen r_1', r_2', r_3' das Bild desjenigen Tripels r_1, r_2, r_3 der Krümmungsinvolution auf dem Kegelschnitte K, dessen projectiv zugeordneter Punkt r durch r' abgebildet wird.

Da die Schmiegungsebenen in r_1', r_2', r_3' die Wendetangentialebenen jenes rationalen Kegels dritter Ordnung darstellen, in dem sich die R_4 aus r' projiciert, so liegen die Strahlen $r'r_1', r'r_2', r'r_3'$ in einer und derselben Ebene, ein Verhalten, welches für die Krümmungsinvolution auf K dahin zu übersetzen ist, dass r_1, r_2, r_3, r auf einem Kreise liegen.

Durch eine quadratische Gleichung zwischen tetracyklischen Coordinaten sind aber nicht nur die Kegelschnitte, sondern auch die circularen Curven dritter Ordnung (cubische Kreise) und die bicircularen Curven vierter Ordnung darstellbar, so dass die entsprechende Raumcurve R_4 über die Krümmungsverhältnisse aller dieser Linien, welche als cyklische bezeichnet werden, Aufschluss gibt.

Wenn es sich insbesondere um rationale cubische Kreise C_3 handelt, so kann von der zugehörigen Raumcurve R_4 wiederum vorausgesetzt werden, dass sie einen Knotenpunkt oder eine Spitze hat, je nachdem der Doppelpunkt der rationalen C_3 den einen oder den anderen Charakter besitzt, woraus zu schließen ist, dass

Digitized by Google

hinsichtlich der Krümmungsverhältnisse die cubischen Kreise mit einem Knotenpunkte sich ähnlich verhalten, wie die centralen Kegelschnitte, während solche mit einer Spitze eine Analogie mit der Parabel aufweisen.

Man kann übrigens, ähnlich wie es für einen Kegelschnitt geleistet wurde, auch mittelst Aufstellung einer gewissen ein-zweideutigen Verwandtschaft nachweisen, dass auf einer circularen C_3 mit einem Knotenpunkte eine cubische Krümmungsinvolution existiert, dass ferner die zwischen den Tripeln r_1, r_2, r_3 der letzteren und der einfachen Punktreihe r bestehende Projectivität im Falle eines cubischen Kreises mit einer Spitze in eine projective Verwandtschaft zwischen zwei einfachen Punktreihen übergeht.

Auch das Princip der Erhaltung der Anzahl, oder, wie es auch genannt zu werden pflegt, das Princip der speciellen Lage, führt rasch zu demselben Ziele, indem man nämlich r mit dem einzigen reellen unendlich fernen Punkte des cubischen Kreises zur Coincidenz bringt, unter welcher Voraussetzung die zugehörigen Krümmungskreise in die unendlich ferne Gerade und je eine Wendetangente degenerieren, deren es drei oder eine gibt, je nachdem die rationale C_3 einen Knotenpunkt oder eine Spitze besitzt.

Zu einer Reihe weiterer Ergebnisse gelangt man mit Hilfe einer Parameterdarstellung, als welche sich im Falle einer Spitze die folgende empfiehlt:

$$x = a$$
$$y = \lambda$$
$$z = \lambda^3.$$

Hiebei kommt der Spitze der Parameterwert ∞ zu, während die Seiten des Fundementaldreieckes der Reihe nach mit der Spitzentangente, der Verbindungslinie der Spitze mit dem einzigen Wendepunkte $\lambda = 0$, und der Wendetangente identisch sind.

Für die Schnittpunkte dieser C_3 mit einer Geraden, beziehungsweise einem Kegelschnitte, gelten die Relationen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0.$$

Die Involution I_4^3 hat die Darstellung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -k - k' = u,$$

wenn k, k', u die Parameter der absoluten Kreispunkte und der einzigen reellen unendlich fernen Stelle bedeuten. Aus der letzten Gleichung folgt, dass ein Kreisbüschel mit den Basispunkten λ_3, λ_4 auf der C_3 eine quadratische Involution bestimmt, deren Centrum $(\lambda_3 + \lambda_4 + k + k')$ der Gegenpunkt des Quadrupels $\lambda_3, \lambda_4, k, k'$ ist. Derselbe wird enthalten, indem man durch den dritten Schnittpunkt $-(\lambda_3 + \lambda_4)$ des Strahles $\overline{\lambda_3 \lambda_4}$ mit der C_3 eine Parallele zu

Digitized by Google

der einzigen reellen Asymptote dieser Curve legt und mit der letzteren im Endlichen[1]) zum zweitenmale zum Durchschnitte bringt. Die Existenz des Gegenpunktes eines Punktquadrupels schließt die Möglichkeit in sich, die vorliegende C_3 auf unendlich viele Arten als Erzeugnis eines Kreis- und eines mit ihm projectiven Strahlenbüschels aufzufassen.

Da mit Beibehaltung der früheren Definitionen des Residuums einer Punktgruppe und der Corresidualität der Restsatz hier seine Giltitigkeit behält, wie der Anblick der Gleichung der I_4^3 lehrt, so kann der cubische Kreis auch durch zwei projective Kreisbüschel erzeugt gedacht werden, für welche die Scheitelpaare mit zwei corresidualen Punktepaaren zusammenfallen.

Zwischen dem Schnittpunkte λ_2 und der Osculationsstelle λ_1 eines Krümmungskreises besteht die Projectivität

$$3\lambda_1 + \lambda_2 = u,$$

welche die Spitze $\lambda = \infty$ und $\lambda = \frac{u}{4}$ zu Doppelstellen hat, wobei der letztere Punkt dadurch charakterisiert ist, dass er u zum zweiten Tangentialpunkte und die C_3 in ihm einen hyperosculierenden Kreis besitzt. Diese sich selbst entsprechenden Punkte der Projectivität stellen zugleich die Grenzstellen oder die Ableitung (nach G. Cantor's Definition) der Kette

$$\ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

dar, die eine ähnliche Bedeutung hat, wie im Falle der Parabel.

Als Darstellung eines cubischen Kreises mit einem Knotenpunkte kann, indem man dem letzteren die Parameterwerte 0 und ∞ zuordnet und die Doppelpunktstangenten als Seiten des Fundamentaldreieckes benützt, die folgende gewählt werden:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2 \\ y &= \lambda \\ z &= \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1. \end{aligned}$$

Aus derselben folgen für das vollständige Schnittpunktssystem dieser C_3 mit einer Geraden, beziehungsweise einem Kegelschnitte und für die Involution I_4^3:

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 &= +1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= \frac{1}{k\,k'} = -u; \end{aligned}$$

an die letztere Gleichung knüpfen sich hinsichtlich eines Kreisbüschels, dessen Basispunkte auf der C_3 liegen, des Restsatzes und

[1]) Von speciellen Fällen abgesehen.

Digitized by Google

der Erzeugung durch projective Kreisbüschel, von denen eventuell eines in ein Strahlenbüschel degenerieren kann, analoge Betrachtungen, wie im Falle einer Spitze.

Hieraus ergibt sich die folgende Construction des Krümmungskreises an einer Stelle u_1: Die durch den Tangentialpunkt von u_1 parallel zu der reellen Asymptote gelegte Gerade begegnet dem cubischen Kreise zum drittenmale an einer Stelle $\frac{u_1^2}{u}$, welche mit u_1 verbunden einen Strahl liefert, der schon den Punkt u_2 enthält, in welchem der zu u_1 gehörige Krümmungskreis die C_3 schneidet. Aus der Gleichung der Krümmungsinvolution

$$\lambda_1^3 \lambda_2 = -u$$

ersieht man, was geometrisch unmittelbar evident ist, dass das System der Wendepunkte $-1, -\rho, -\rho^2$ ein Tripel derselben darstellt; ferner, dass sie zwei dreifache Elemente besitzt, welche mit den beiden im Doppelpunkte vereinigten Stellen $\lambda = 0$ und ∞ coincidieren.

Weiters ist jedes Quadrupel, das aus einem Tripel r_1, r_2, r_3 durch Adjunction eines dreifachen Elementes der Involution entsteht, äquianharmonisch.

Zwischen einem Tripel $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ und dem ihm projectiv zugeordneten Punkte λ_2 besteht die Gleichung

$$\lambda' \lambda'' \lambda''' \lambda_2 = -u,$$

welche aussagt, dass $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda_2$ auf einem Kreise liegen.

Die Tangentialpunkte $\mu', \mu'' \mu'''$ eines Tripels $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ der Krümmungsinvolution bilden ein eben solches Tripel; sie werden erhalten, indem man die Seiten des Dreieckes $\lambda'\lambda''\lambda'''$ mit der C_3 zum drittenmale zum Durchschnitte bringt. Denn wegen

$$\lambda'' = \rho\lambda', \quad \lambda''' = \rho^2\lambda'$$

ist

$$\mu' = -\frac{1}{\lambda'^2}, \quad \mu'' = -\frac{\rho}{\lambda'^2} = \rho\mu' \quad \mu''' = -\frac{\rho^2}{\lambda'^2} = \rho^2\mu'$$

$$-\frac{1}{\lambda'^2} = -\frac{1}{\lambda''\lambda'''}, \quad -\frac{1}{\lambda''^2} = -\frac{1}{\lambda'''\lambda'}, \quad -\frac{1}{\lambda'''^2} = -\frac{1}{\lambda'\lambda''}.$$

Durch Projection eines Tripels $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ aus einem beliebigen Punkte s der Curve auf dieselbe entsteht ein zweites Tripel $\mu' \mu'' \mu'''$, wie sich aus den zwischen $\lambda', \lambda'' \lambda'''$ bestehenden Relationen und dem Gleichungssysteme

$$\lambda^{(i)} \mu^{(i)} s = -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ergibt.

Digitized by Google

Damit ist die Möglichkeit gegeben, aus einem Tripel, z. B. demjenigen der Wendepunkte, alle übrigen durch Projection herzuleiten.

Sind $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ und μ', μ'', μ''' zwei Tripel, so besagt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda'\mu' &= \lambda''\mu''' = \lambda'''\mu'' \\ \lambda'\mu'' &= \lambda''\mu' = \lambda'''\mu''' \\ \lambda'\mu''' &= \lambda''\mu'' = \lambda'''\mu',\end{aligned}$$

dass dieselben dreifach perspectiv sind, und dass die zugehörigen drei Perspectivitätscentra wiederum ein Tripeldreieck constituieren. Es liegt somit ein System von drei Dreiecken vor, von denen irgend zwei dreifach perspectiv sind, und zwar so, dass das System der zugehörigen Perspectivitätscentra mit den Ecken des dritten Dreieckes coincidiert. Eine so beschaffene Configuration $(9_3, 9_3)$ wird nach Stephanos als eine „desmische" bezeichnet.

Für drei in desmischer Lage befindliche Tripel $\lambda', \lambda'', \lambda'''$; μ', μ'', μ'''; ν', ν'', ν''', gelten, wenn mit l, m, n die ihnen projectiv zugeordneten Punkte bezeichnet werden, die Gleichungen:

$$\lambda'^3 l = \mu'^3 m = \nu'^3 n = -u$$
$$\lambda'\mu'\nu' = -1;$$

es ist daher

$$(\lambda'\mu'\nu')^3 l m n = -u^3$$
$$l m n = u^3$$
$$l m n . \left(-\frac{1}{u^2}\right) = -u,$$

d. h. l, m, n und der Tangentialpunkt von u liegen auf einem Kreise, welcher, wenn $n \equiv u$, also ν', ν'', ν''' mit dem Wendepunktsysteme zusammenfallen, in die unendlich weite Gerade und einen Strahl degeneriert, der l, m und den Tangentialpunkt von u enthält.

Zwei Tripel $\lambda', \lambda'', \lambda'''$; μ', μ'', μ''' von der Beschaffenheit, dass das aus ihnen abgeleitete Tripel $\nu' = -\frac{1}{\lambda'\mu'}, \nu'' = -\frac{1}{\lambda'\mu''}, \nu''' = -\frac{1}{\lambda'\mu'''}$ mit dem Wendepunktsysteme identisch ist, sollen als conjugierte bezeichnet werden. Dieselben genügen der Gleichung

$$l m = u^2,$$

aus welchen hervorgeht, dass es zwei sich selbst conjugierte Tripel gibt, die den Stellen $\pm u$ mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkte zugeordnet sind, von denen das eine mit dem Wendepunktsysteme identisch ist, während das andere die Elemente $+1, +\rho, +\rho^2$ enthält, deren Tangentialpunkte eben die Wendepunkte sind.

Als Anzahl der hyperosculierenden Kreise ergibt sich, ebenso wie im Falle eines centralen Kegelschnittes, die Zahl 4, indem für die Hyperosculationsstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Gleichung

Digitized by Google

$$\lambda^4 = -u$$

besteht, welche ein harmonisches Quadrupel darstellt. Wird dieselbe durch das ihr äquivalente System

$$(a) \qquad z^2 = -u$$

$$(b) \qquad \lambda^2 = z$$

ersetzt, so fällt es nicht schwer, ihre Wurzelpunkte zu construieren. Zunächst nämlich haben die beiden Lösungen z_1, z_2 von (a) den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt $\frac{1}{u}$, welcher erhalten wird, indem man die durch den Wendepunkt -1 parallel zu der reellen Asymptote gelegte Gerade zum drittenmale mit der C_3 zum Durchschnitte bringt. z_1, z_2 sind somit die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die sich aus der so gewonnenen Stelle an die C_3 legen lassen. An Stelle der biquadratischen Gleichung treten nun die beiden Gleichungen

$$\lambda^2 = z_1, \quad \lambda^2 = z_2,$$

welche mit der gleichen Eigenthümlichkeit behaftet sind, wonach ihre Wurzelpunkte je einen gemeinsamen Tangentialpunkt $-\frac{1}{z_1}$, beziehungsweise $-\frac{1}{z_2}$ besitzen. Die letzteren beiden Punkte liegen auf den Strahlen, welche z_1, beziehungsweise z_2 mit der Stelle $+1$ verbinden. Construiert man schließlich die beiden Tangentenpaare, die sich aus $-\frac{1}{z_1}$ und $-\frac{1}{z_2}$ an die C_3 legen lassen, so repräsentieren ihre Berührungspunkte die gesuchten Wurzeln.

Infolge von

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = u$$

besteht das Gleichungssystem

$$(-\lambda_1).\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \lambda_1.(-\lambda_2).\lambda_3\lambda_4 = \lambda_1\lambda_2.(-\lambda_3).\lambda_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.(-\lambda_4) = -u,$$

dessen geometrischer Inhalt dahin zu deuten ist, dass von den Berührungspunkten der vier hyperosculierenden Kreise je drei mit demjenigen Punkte auf einem Kreise liegen, welcher mit dem vierten den Tangentialpunkt gemein hat.

Wenn es sich um einen cubischen Kreis handelt, der keinen Doppelpunkt besitzt, so ist die entsprechende Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1, und es gehen, conform mit der Eigenschaft, dass die R_4 in einem ihrer Punkte r' von neun Schmiegungsebenen geschnitten wird, durch einen Punkt r der C_3 neun Krümmungskreise, deren Osculationsstellen $r_1, r_2, \ldots r_9$, wie die vorliegende Abbildung lehrt, zu einer Configuration $(9_4, 12_3)$ Anlass geben, wenn man die Bedeutung des Begriffes einer Configuration dahin modificiert, dass

Digitized by Google

an Stelle der ihr zugehörigen Geraden durch r gehende Kreise treten. Coincidiert r mit dem reellen unendlich fernen Punkte der C_3, so entsteht die bekannte Wendepunktsconfiguration.

Auch hinsichtlich der Lagenverhältnisse, welche zwischen den Berührungspunkten $a_1, \ldots a_{16}$ der hyperosculierenden Kreise einer circularen C_3 vom Geschlechte 1 bestehen, gibt die zugehörige Raumcurve vierter Ordnung Aufschluss, indem die hyperosculierenden Ebenen der letzteren in Betracht gezogen werden, über deren Osculationspunkte man sich am einfachsten bei Benützung der Parameterdarstellung

$$W_4 \equiv (x : y : z : t = 1 : pu : p'u : p''u)$$

orientiert, worin pu die von Weierstraß eingeführte doppelt periodische Function darstellt.

Nach dem Satze von der Erhaltung des Schwerpunktes in der Theorie der doppelt periodischen Functionen nämlich genügen, die Parameter der Punkte, in denen eine Ebene der R_4 begegnet, der Congruenz

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \text{ (modd } 2\omega, 2\omega'),$$

aus welcher für die fraglichen Osculationspunkte

$$4u \equiv 0 \text{ (modd } 2\omega, 2\omega')$$

hervorgeht.

Die beiden Gruppen $(r_1, r_2, \ldots r_9)$ und $(a_1, a_2, \ldots a_{16})$ erscheinen als die sich selbst entsprechenden Elemente zweier Correspondenzen $(1,4)_2$ und $(1,9)_3$, womit zugleich ein neuer Beweis für die Richtigkeit der gemachten Zahlenangaben erbracht ist, da vermöge des Cayley'schen Correspondenzprincipes eine auf einem Träger vom Geschlechte p definierte $\alpha - \beta$ deutige Correspondenz $(\alpha, \beta)_\gamma$ von der Wertigkeit γ

$$\alpha + \beta + 2\gamma p$$

Coincidenzstellen besitzt.

Um die Eigenschaften der neunelementigen Systeme $(r_1, \ldots r_9)$ zu discutieren, werde die Darstellung

$$x : y : z = 1 : pu : p'u$$

gewählt, die einer ebenen Curve W_3 angehört, welche als Projection der Raumcurve W_4 anzusehen ist. Obzwar dieselbe im Allgemeinen keinen cubischen Kreis darstellt, — wenn x, y, z Hesse'sche Coordinaten darstellen, so findet dies statt, sobald pu durch die Gleichung

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2+1)}}$$

definiert ist — so wird doch der erstrebte Zweck erreicht, indem man auf der W_3 zwei feste Punkte k, k' annimmt, welche die Rolle

Digitized by Google

der absoluten Kreisrpunkte übernehmen und entsprechend an die Stelle der Kreise das Gebüsche der ∞^3 Kegelschnitte treten lässt, welche das Punktepaar k, k' enthalten.

Die Schnittpunkte von W_3 mit einer Graden, beziehungsweise einem Kegelschnitte genügen den Relationen:

$$\left.\begin{aligned} u_2 + u_2 + u_3 &\equiv 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (\text{modd } 2\omega, 2\omega').$$

Insbesondere gilt für das definierte Gebüsche von Kegelschnitten, welche fernerhin der Kürze halber als Kreise bezeichnet werden sollen, die Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv -k - k' \equiv u,$$

falls $\overline{kk'}$ der W_3 zum drittenmale in u begegnet.

Weiters wird die Mannigfaltigkeit M der neunelementigen Punktgruppen $(r_1 .. r_9)$ durch die Congruenz

$$(A) \qquad 3u_1 + u_2 \equiv u$$

definiert, welche auch in der Form

$$(B) \qquad u_1^{(i)} + \frac{u_2 - u}{3} + w^{(i)} = 0$$

darstellbar ist, wenn $w^{(i)}$ irgend eines der neun in Bezug auf das Modulsystem $2\omega, 2\omega'$ incongruenten Periodendrittel, also den Parameter eines Wendepunktes, bezeichnet.

Aus (B) geht hervor, dass die Gruppe $u', .. u^{(9)}$ — der untere Index möge unterdrückt werden —, welche das Lösungssystem der Congruenz (A) mit der Unbekannten u_1 darstellt, erhalten wird, indem man das System der Wendepunkte aus irgend einer der neun Stellen

$$v^{(i)} = \frac{u_2 - u}{3} + w^{(i)} \quad (i = 1 .. 9)$$

auf die W_3 projiciert.

Da

$$3v^{(i)} + (2u - u_2) \equiv u$$

ist, so gehört das System $(v', .., v^{(9)})$ ebenfalls der Mannigfaltigkeit M an, und zwar ist dasselbe dem Punkte

$$v_2 \equiv 2u - u_2$$

in demselben Sinne zugeordnet, in welchem die Gruppe $u^{(i)}$ der Stelle u_2 correspondiert.

Von den drei Gruppen $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ $(i = 1, .. 9)$ gilt demnach der Satz, dass sie eine desmische Configuration $(27_9, 81_3)$ bilden,

Digitized by Google

insoferne als irgend zwei derselben neunfach perspectiv sind und ihre neun zugehörigen Perspectivitätscentren das dritte System erzeugen.

In Analogie mit der für cubische Kreise mit einem Knotenpunkte aufgestellten Definition sollen zwei Systeme $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, welche mit dem Systeme $w^{(i)}$ in desmischer Lage sich befinden, als conjugiert bezeichnet werden. Zwei conjugierte Gruppen genügen der Congruenz

$$u_2 + v_2 - 2u \equiv 0,$$

welche besagt, dass die Punkte u_2, v_2 und der Tangentialpunkt $-2u$ der Stelle u auf einer Geraden gelegen sind. Daraus folgt, dass es vier sich selbst conjugierte Gruppen gibt, deren zugeordnete Stellen ein Punktquadrupel mit dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkte $-2u$ bilden, wie dies auch durch Rechnung unmittelbar zu erkennen ist, da die fraglichen Stellen der Congruenz

$$2x \equiv 2u$$

genügen, welche die Lösung

$$x \equiv u + \text{ einer Periodenhälfte}$$

besitzt. Den vier incongruenten Periodenhälften entsprechend gibt es vier Lösungen

$$x_{00} \equiv u, \quad x_{10} \equiv u + \omega, \quad x_{01} \equiv u + \omega', \quad x_{11} \equiv u + \omega + \omega',$$

deren erste dem Systeme $w^{(i)}$ correspondiert.

Die Congruenz

$$x_{00} + x_{10} + x_{01} + x_{11} \equiv 4u$$

drückt, da ihr die Gestalt

$$x_{00} + x_{10} + x_{01} + x_{11} - 2u - 2u \equiv 0$$

verliehen werden kann, aus, dass die vier Stellen x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11} auf der ersten Polare von $-2u$ liegen.

Projiciert man eine Gruppe $u^{(i)} \sim [3u + u_2 \equiv u]$ der Mannigfaltigkeit M aus einem beliebigen Punkte t der W_3 auf diese Curve, so erhält man wiederum eine Gruppe $v^{(i)} \sim [3v + v_2 \equiv u]$ von M, für welche

$$v_2 \equiv 2u - u_2 + 3t$$

ist, da aus der Gleichung

$$u^{(i)} + t + v^{(i)} \equiv 0$$

die folgende

$$3v^{(i)} + (2u - u_2 + 3t) \equiv u$$

gewonnen wird.

Digitized by Google

Da in dem Werte für v_2 der Term $3t$ auftritt, so ist klar, dass man zu derselben Gruppe $v^{(i)}$ gelangt, wenn man t durch $(t + w^{(i)})$, d. h. durch irgend ein Element der Gruppe $[3t + t_2 \equiv u]$ ersetzt, in welcher t sich vorfindet. Hiebei ist

$$t_2 \equiv 3u - u_2 - v_2,$$

also

$$t_2 + u_2 + v_2 - 2u \equiv u,$$

d. h. t_2, u_2, v_2 und der Tangentialpunkt von u liegen auf einem Kreise, welcher in die unendlich weite Gerade und den $u_2, v_2, -2u$ enthaltenden Strahl zerfällt, wenn $t_2 \equiv u$ wird.

Es sind also irgend zwei Gruppen $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ von M neunfach perspectiv, derart, dass die neun zugehörigen Perspectivitätscentren $t^{(i)}$ wiederum eine Gruppe derselben Mannigfaltigkeit repräsentieren; anders ausgedrückt: die Systeme $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $t^{(i)}$ bilden eine desmische Configuration $(27_9, 81_3)$, welche die früher aufgestellte, für welche $t^{(i)}$ mit dem Systeme der Wendepunkte identisch ist, als Specialfall umfasst.

Nachtrag.

1.

Die Tripeldreiecke einer Ellipse K haben unter allen derselben eingeschriebenen Dreiecken ein Maximum des Flächeninhaltes.

Es ist nämlich evident, dass unter den sämmtlichen der Ellipse eingeschriebenen Dreiecken mit einer gemeinschaftlichen Basis $\overline{ab}$ dasjenige die größte Fläche besitzt, dessen dritte Ecke mit dem Berührungspunkte einer der beiden zu $\overline{ab}$ parallelen Tangenten von K zusammenfällt, weshalb ein K eingeschriebenes Dreieck $a\,b\,c$ dessen Fläche nicht kleiner sein soll als diejenige irgend eines andern diesem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreieckes, der Forderung zu genügen hat, dass seine Höhen mit den Normalen von K in a, b, c coincidieren. Dies ist aber gerade jene Eigenschaft, welche als charakteristisch für die Tripeldreiecke nachgewiesen wurde.

Um dieses Resultat auf analytischem Wege zu begründen, ist es angezeigt, von der folgenden Formel für die Fläche eines der Ellipse eingeschriebenen Dreieckes auszugehen:

$$f = -\frac{1}{2}\,ab\,\{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_3 - \varphi_1)\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,ab\,.\,\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Aus derselben geht hervor, dass zwei Dreiecke mit den Ecken $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und $\varphi_1 + k, \varphi_2 + k, \varphi_3 + k$, wo k irgend einen beliebigen Wert bedeutet, einen gleichen Flächeninhalt besitzen,

Digitized by Google

in welchem Theoreme der Satz über die Flächengleichheit zweier Tripeldreiecke als ein Specialfall enthalten ist.

Da vermöge der Gleichungen

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

dem Übergange von einer Stelle φ zu einer zweiten $(\varphi + k)$, die auf das Wertsystem x, y angewandte unimodulare Substitution

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$
$$\alpha = \cos k, \quad \beta = -\frac{a\sin k}{b}, \quad \gamma = \frac{b\sin k}{a}, \quad \delta = \cos k$$

äquivalent ist, so ergibt sich die Flächengleichheit der genannten beiden Dreiecke auch aus dem Multiplicationstheoreme der Determinantentheorie:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Um die Wertesysteme zu finden, für welche f zu einem Maximum wird, sind die Gleichungen aufzulösen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} = +\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} = -\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, wie dies sein muss, da Φ als eine Function, welche nur von den Differenzen je zweier ihrer Argumente abhängt, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} = 0$$

genügt.

Werden φ_2 und φ_3 als constant angesehen, so liefert die Gleichung $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} = 0$ jenen Wert des Argumentes φ_1, für welchen das Dreieck $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ bei festgehaltener Basis $\overline{\varphi_2\varphi_3}$ ein Maximum des Flächeninhaltes repräsentiert.

Die geometrische Bedeutung der beiden in Bezug auf den Modul 2π incongruenten Wurzeln dieser Gleichung

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1),$$

von denen die $k = 1$ entsprechende die Lösung des vorliegenden Maximumproblemes darstellt, ergibt sich durch Rückkehr zu dem Parameter $\lambda = e^{i\varphi}$, welcher unter der Voraussetzung

Digitized by Google

$$K \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Quadratwurzel aus dem Doppelverhältnisse des folgenden Strahlenquadrupels darstellt:

$$x^2 + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Für $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$ $(k = 1, 2, 3)$ lauten alsdann die Lösungen von $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = 0$:

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\lambda_2 \lambda_3},$$

welche den Berührungspunkten der beiden zu $\overline{\lambda_2 \lambda_3}$ parallelen Strahlen entsprechen.

In dem Gleichungssysteme $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ kann unbeschadet der Allgemeinheit $\varphi_3 = 0$ gesetzt werden, da aus einem speciellen Lösungssysteme alle andern in einfacher Weise herzuleiten sind.

Aus

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

folgt aber unter der Voraussetzung $\varphi_1 > \varphi_2$:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$$
$$2\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi,$$

also

$$\varphi_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Es besitzen demnach alle der Ellipse K eingeschriebenen Dreiecke mit den Ecken k, $k + \frac{2\pi}{3}$, $k + \frac{4\pi}{3}$ ein Maximum des Flächeninhaltes.

2.

Der Satz, wonach zu zwei beliebigen Tripeldreiecken eines cubischen Kreises mit einem Knotenpunkte ein drittes gehört, das mit ihnen eine desmische Configuration bildet, besitzt das folgende Analogon, zu dem die Krümmungsinvolution auf einem centralen Kegelschnitte K Anlass gibt: Zwei Tripeldreiecke des letzteren constituieren mit dem Systeme ihrer drei Perspectivitätscentra eine desmische Configuration.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

GEORGES CARRÉ & C. NAUD, Éditeurs 3, rue Racine, Paris.

SCIENTIA

Exposé et Développement des questions scientifiques à l'ordre du jour.

RECUEIL

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

MM. APPELL, CORNU, D'ARSONVAL, FRIEDEL, LIPPMANN, MOISSAN, POINCARRÉ, POTIER,

Membres de l'Institut

Pour la Partie Physico-Mathématique

ET SOUS LA DIRECTION DE

MM. BALBIANI, prof. au Collège de France; D'ARSONVAL, FILHOL, FOUQUÉ, GAUDRY, GUIGNARD, MAREY, MILNE-EDWARDS,

Membres de l'Institut

Pour la Partie Biologique.

Chaque fascicule comprendra de 80 á 100 pag. in-8 écu, avec cartonnage spécial.

Prix du fascicule..... **2** francs.

On peut souscrire à une série de 6 fascicules *(Série Physico-Mathématique* ou *Série Biologique)* au prix de **10** francs

A côté des revues périodiques spéciales enregistrant au jour le jour le progrès de la Science, il nous a semblé qu'il y avait place pour une nouvelle forme de publication, destinée à mettre en évidence, par un exposé philosophique et documenté des découvertes récentes, les idées générales directrices et les variations de l'évolution scientifique.

A l'heure actuelle, il n'est plus possible au savant de se spécialiser; il lui faut connaître l'extension graduellement croissante des domaines voisins : mathématiciens et physiciens, chimistes et biologistes ont des intérêts de plus en plus liés.

C'est pour répondre à cette nécessité que, dans une série de monographies, nous nous proposons de mettre au point les questions particulières, nous efforçant de montrer le rôle actuel et futur de telle ou telle acquisition, l'équilibre qu'elle détruit ou établit, la déviation qu'elle imprime, les horizons qu'elle ouvre, la somme de progrès qu'elle représente.

Mais il importe de traiter les questions, non d'une façon dogmatique, presque toujours faussé par une classification arbitraire, mais dans la forme vivante de la raison qui débat pas à pas le problème, en détache les inconnues et l'inventorie avant et après sa solution, dans l'enchaînement de ses aspects et de ses conséquences. Aussi, indiquant toujours les voies multiples que suggère un fait, scrutant les possibilités logiques qui en dérivent, nous efforcerons-nous de nous tenir dans le cadre de la méthode experimentale et de la méthode critique.

Nous ferons, du reste, bien saisir l'esprit et la portée de cette nouvelle collection, en insistant sur ce point, que la nécessité d'une publication y sera toujours subordonnée à l'opportunité du sujet.

Digitized by Google

Verlag von **Louis Nebert** in **Halle a. S.**

Thomae, Prof., Dr. A., **Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complex. Veränderlichen.** Zweite Auflage gr. 4°. geh. 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen.** Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Prof. Felix Müller. Lex.-8. geh. 18 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss einer Theorie der Functionen einer complex. Veränderlichen und der Thetafunctionen.** Dritte erheblich vermehrte Auflage. gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhein'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Über eine specielle Classe Abel'scher Functionen.** 2 Hefte gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Über eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung IV. Ordnung Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Übungsbuch für den geometrischen Theil der Functionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projectivischen Geometrie.** Auf Grund neuer von Prof. Karl Küpper herrühr. Definitionen und Beweise, leichfasslich zusammengestellt. gr. 8. geh. 2 M. 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale.** Zweite verb. und verm. Auflage gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton-schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Über die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8 geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A, **Über Pole und Polaren der parabolischen Curven dritter Ordnung.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8 geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. J. A., **Über Beta- und Gammafunctionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Verlag von **J. B. Metzler** in Stuttgart.

Dr. Christ. Beyel,

Axonometrie und Perspective

in system. Zusammenhang.

Mit 9 Tafeln in Steindruck. — M. 2.40.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

Title page

X. Jahrgang 1899. 4. Vierteljahr.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
NOV 18 1899
CAMBRIDGE, MASS.

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR CULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

Prof. G. v. ESCHERICH und Prof. L. GEGENBAUER

IN WIEN.

WIEN, 1899.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

Bezugspreis: Jährlich 7 fl.

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Sobotka, J., Zur Perspective des Kreises 289

Dintzl, Erwin, Der zweite Ergänzungssatz des cubischen Reciprocitätsgesetzes 303

Bobek, Karl, Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen 307

Studnička, F. J., Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten . . 338

Kohl, Emil, Über die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes 343

Gegenbauer, Leopold, Bemerkung über einen die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Satz des Herrn J. J. Sylvester 370

Biermann, Otto, Bemerkungen über die einer algebraischen Curve adjungierten Curven 373

Internationaler Verein zur Beförderung des Studiums der Quaternionen und verwandter Systeme der Mathematik 376

Literatur-Berichte.

Heusch, F., Cours d'analyse 39

Gross, G., Dr., Die mechanische Wärmetheorie 39

Dreher, Eugen, Dr. und *Jordan, K. T., Dr.*, Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus 39

Goursat, E., Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre à deux variables indépendantes 39

Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome III. 41

Picard, E., Traité d'Analyse T II. et III 42

Darboux, Gaston, Dr., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes T. I. 44

Gross, Th., Dr., R. Mayer und H. v. Helmholtz. Eine kritische Studie . 46

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
NOV 18 1899
CAMBRIDGE MASS.

Zur Perspective des Kreises.

Von **J. Sobotka** in Wien.

In der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik wurden in den letzten Jahren einige Aufgaben und elementare Constructionen, die sich auf die Centralprojection von Kreisen beziehen, von den Herren Schlömilch, Beyel, Schur und Schüssler besprochen,*) zu denen ich mir im Folgenden einige Bemerkungen und Erweiterungen zu geben erlaube. Die betreffenden Mittheilungen von Geheimrath Schlömilch bilden seine letzten Beiträge für die erwähnte Zeitschrift, und es ist interessant, dass Schlömilch vor mehr als vierzig Jahren seine Zeitschrift mit einer von ihm selbst verfassten Abhandlung in die Öffentlichkeit eingeführt hat, die mit vorliegendem Thema innig zusammenhängt, und auf die ich gleichfalls noch im Folgenden zurückkommen werde.

1. Was zunächst die Ermittelung derjenigen Centralprojectionen, durch welche Kreise des Raumes in einen gegebenen Kreis der Bildebene projiciert werden und deren Ebenen eine gegebene Gerade der Bildebene als Fluchttrasse besitzen, anbelangt, muss ich hier noch auf den im Jahre 1893 erschienenen I. Band des ausgezeichneten Lehrbuches der Darstellenden Geometrie von Rohn und Papperitz aufmerksam machen, worin sich in Art. 264 u. f. die auf kürzestem Wege erzielte Lösung dieser Aufgabe vorfindet; die dann weiter in Art 385 zu einer schönen Lösung der Aufgabe benützt wird: „Eine als Centralprojection eines Kreises entstandene Ellipse ist als affine Curve eines Kreises darzustellen."

2. In Verbindung mit der vorangehenden Aufgabe werden in den herangezogenen Abhandlungen diejenigen Centralprojectionen gesucht, durch welche zwei gegebene

*) 1. Schlömilch: Ueber die Construction von Kegelschnitten aus 5 Punkten oder 5 Tangenten.
2. Schlömilch: Über die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck.
3. Schur: Über die Projection von 5 Punkten einer Ebene in 5 Punkte eines Kreises. Alle drei Abhandlungen im 39. Jahrgang (1894).
4. Schlömilch: Zur Perspective des Kreises.
5. Beyel: Zwei Aufgaben aus der Perspective. Diese zwei Abhandlungen im 40. Jahrgang (1895).
6. Schüssler: Zur Perspective des Kreises. Im 42. Jahrgang (1897).

Digitized by Google

Kreise aus demselben Centrum auf eine Ebene wieder als Kreise projiciert werden.

Bei dieser Aufgabe wird jedoch vorausgesetzt, dass die gegebenen Kreise in einer Ebene liegen. Hier soll nun eine Lösung der Aufgabe entwickelt werden, für den Fall, dass beide Kreise beliebige Lagen im Raume einnehmen.

Ist ein Kreis k gegeben und wird ein Punkt C als Projectionscentrum beliebig gewählt, so gibt die Berührungsebene in C an die durch diesen Punkt und durch k gelegte Kugel die Stellung für alle möglichen zur Ebene von k nicht parallelen Ebenen an, in die sich der gegebene Kreis wieder als Kreis projiciert. Dies ist ja eine bekannte Haupteigenschaft der sogenannten stereographischen Projection.

Ist demnach C ein Punkt von dem zwei gegebene Kreise k_1, k_2 auf eine Ebene Π wieder als Kreise projiciert werden, so ist umgekehrt nothwendig, dass sich die Kugelflächen (Ck_1), (Ck_2) in C berühren, und dass ihre gemeinschaftliche Berührungsebene Π_0 parallel zu Π ist.

Wir haben darnach durch k_1 und k_2 sich berührende Kugelflächen zu legen; die Berührungspunkte C geben alsdann die Projectionsmittelpunkte und die ihnen zugehörigen gemeinschaftlichen Berührungsebenen Π_0 die Stellungen für die Projectionsebenen an, in welche sich k_1 und k_2 als Kreise projicieren.

Wir wollen noch den geometrischen Ort c der Punkte C, sowie die Umhüllungsfläche der Ebenen Π_0 näher betrachten.

Es sei g die Schnittgerade der Ebene G_1 von k_1 mit der Ebene G_2 von k_2 und es traffe Π_0 diese Gerade im Punkte P; A_1, B_1 resp. A_2, B_2 seien ferner die reellen oder conjugiert imaginären Schnittpunkte von k_1 und k_2 mit g. Da beide Kugeln (Ck_1), (Ck_2) in P dieselbe Potenz, die gleich $\overline{PC}^2$ ist, besitzen, so ist

$$PA_1 \,.\, PB_1 = PA_2 \,.\, PB_2 = PC^2.$$

Dieser Bedingung genügt ein einziger Punkt auf g, nämlich der Mittelpunkt der Involution, welche durch die Punktepaare A_1B_1, A_2B_2 festgelegt ist. $\overline{PC}^2$ ist der Potenz dieser Involution gleich, woraus sofort folgt, dass die Curve c auf einer um P als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche K liegt, welche die Kreise k_1, k_2 und die Gerade g orthogonal schneidet, letztere in den Doppelpunkten der erwähnten Involution. Die Umhüllungsfläche der Ebenen Π_0 ist eine Kegelfläche P, deren Spitze der Punkt P ist, den wir auch als den Potenzpunkt der Kreise k_1, k_2 bezeichnen können.

Aus dem Angeführten ergibt sich, dass P immer reell ist und K nur dann imaginär wird, wenn beide Kreise k_1, k_2 die Gerade g reell so schneiden, dass die Schnittpunkte des einen Kreises die Schnittpunkte des andern von einander trennen. Die Construction von K selbst begegnet nach dem Gesagten keine Schwierigkeiten.

Digitized by Google

Da Π_0 durch den Mittelpunkt P der Kugelfläche K geht, so berührt die Senkrechte in C auf Π_0 diese Kugelfläche und schneidet als Centrallinie der Kugeln (Ck_1), (Ck_2) auch die Geraden a_1, a_2, von denen die erste durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 geht und zu G_1 senkrecht ist, während die zweite durch den Mittelpunkt M_2 von k_2 geht und zu G_2 senkrecht ist.

„Bewegt sich also eine Gerade so, dass sie beständig a_1, a_2 schneidet und die Kugel K berührt, so beschreibt ihr Berührungspunkt C mit K die Curve c."

Die bewegliche Gerade beschreibt somit eine Kegelfläche vierten Grades R, für welche a_1, a_2 Doppelgeraden sind; die Curve c auf der Leitfläche ist vierter Ordnung erster Art und die erzeugenden Geraden von R legen auf den Geraden a_1, a_2 eine (2, 2) deutige Beziehung ihrer Punkte fest. Der Schnitt von R mit der unendlich fernen Ebene ist eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, nämlich den unendlich fernen Punkten von a_1 und a_2.

Nachdem die Ebenen Π_0 zu den erzeugenden Geraden von R senkrecht stehen, so folgt daraus:

„Die Ebenen Π_0 hüllen eine Kegelfläche vierter Classe mit den Ebenen G_1, G_2 als Doppelberührungsebenen ein."

Die Curve c lässt sich leicht als Curve vierter Ordnung erster Art nachweisen. K ist bereits eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch c geht. Die Kugelflächen durch k_1 bilden einen Kugelbüschel $[k_1]$ und ebenso bilden die Kugelflächen durch k_2 einen Kugelbüschel $[k_2]$. Jede Kugelfläche K_1 aus $[k_1]$ wird von zwei Kugelflächen aus $[k_2]$ berührt. Die Verbindungsgerade l_1 dieser Berührungspunkte wollen wir die Berührungssehne von K_1 nennen.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Berührungssehne l_1 die Regelschaar $[l_1]$ eines Hyperboloids beschreibt, wenn K_1 den Büschel $[k_1]$ durchläuft, woraus dann folgt, dass auch die analog ermittelten Berührungssehnen l_2 der Kugeln in $[k_2]$ eine zweite Regelschaar $[l_2]$ bilden.

Zu dem Behufe beachten wir, dass jede Kugel K_1 in $[k_1]$ die Kugel K nach einem Kreise orthogonal schneidet. Sämmtliche Durchmesser von K_1, die sich auf diesen Kreis stützen, berühren somit K, und diejenigen unter ihnen, welche gleichzeitig a_2 schneiden, gehören der Regelfläche R an und berühren K in zwei Punkten von K_1. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte C_1, C_1^* ist somit eine Sehne l_1.[1])

Die Sehne l_1 schneidet also a_2, sie schneidet auch die Polare $\mathfrak{a}_1$ von a_1 inbezug auf K, weil sie in der Polarebene eines Punktes von a_1 bezüglich K liegt. So haben wir bereits zwei Leitgeraden a_2, $\mathfrak{a}_1$ für $[l_1]$ gefunden. Zu bemerken ist noch, dass $\mathfrak{a}_1$

[1]) Eine die gegebenen Entwickelungen zur Darstellung bringende Figur, welche die Vorstellung der bezüglichen Gebilde wesentlich fördert, lässt sich nach den gegebenen Ausführungen leicht entwerfen.

Digitized by Google

die Schnittpunkte von k_1 mit K verbindet und in Folge dessen ohneweiters bestimmt ist.

Die Polarebenen von P in Bezug auf die Kugeln K_1 des Büschels $[k_1]$ gehen ebenfalls durch $\mathfrak{a}_1$. Da jede Sehne l_1 in einer solchen Ebene liegt, so geht die Polare l_1^x von l_1 in Bezug auf K_1 durch P und ist senkrecht zu der Ebene welche l_1 mit dem Mittelpunkt von K_1 verbindet; da diese Ebene durch a_2 geht, also zu G_2 senkrecht steht, so liegt l_1^x in G_2 und ist normal zu der Centrallinie des Kreises k_2 und des Schnittkreises k_1 von K_1 mit G_2.

Die Gerade l_1^x ist dabei gleichzeitig der Schnitt für die den Punkten C_1, C_1^x zugehörigen Ebenen Π_0, Π_0^x. Der Strahlenbüschel der Geraden l_1^x um P ist demgemäß projectiv dem Kugelbüschel $[k_1]$, also auch projectiv mit der Schaar der den Strahlen l_1^x in Bezug auf die Kugeln K_1 zukommenden Polargeraden l_1.

Da sämmtliche l_1^x in G_2 liegen, so gehen die entsprechenden l_1 durch die Pole von G_2 in Bezug auf die Kugeln K_1. Diese Pole liegen in der durch a_1 geführten Normalebene von g und beschreiben eine Hyperbel h_1, welche durch den auf $\mathfrak{a}_1$ liegenden Pol der Geraden g in Bezug auf k_1 geht und deren eine Asymptote r durch den Durchschnittspunkt A_1 von a_1 mit G_2 geht und zu a_2 parallel ist; der Spurpunkt B_1 in G_2 für die zweite Asymptote s ist zu A_1 in Bezug auf g symmetrisch. Die Asymptote s selbst ist zu a_1 normal. Hiedurch ist h_1 auch schon hinreichend bestimmt.

Die Geraden von $[l_1]$ schneiden sonach h_1, $\mathfrak{a}_1$, a_2; sie bilden also thatsächlich eine Regelschaar.

Ebenso einfach wie h_1 lässt sich auch der Spurkegelschnitt n_1 von $[l_1]$ in der Ebene G_2 ermitteln.

Der Kugelbüschel $[k_1]$ schneidet nämlich G_2 in einem Kreisbüschel, der gleichfalls auf den Büschel der Strahlen l_1^x projectiv bezogen werden kann; m_1 wird alsdann von den Polen der Geraden l_1^x inbezug auf die zugeordneten Elemente des erwähnten Kreisbüschels beschrieben; er geht insbesondere durch den Punkt $(g\,\mathfrak{a}_1)$, durch den Schnitt M_2 der Geraden a_2 mit G_2, durch den Fußpunkt F der Senkrechten von M_2 auf g, durch die Berührungspunkte der Tangenten von P an k_2 und durch die Nullkreise des besagten Kreisbüschels.

Beziehen wir die Strahlenbüschel um M_2 und P auf die Punkte der Centralgeraden dieses Kreisbüschels perspectiv, so wird m_1 auch erzeugt als Schnitt des Strahlenbüschels um M_2 mit demjenigen Strahlenbüschel um $(g\,\mathfrak{a}_1)$, dessen Strahlen zu den Strahlen des Büschels um P normal sind, da ja jedem l_1^x derjenige Kreis in $[k_1]$ entspricht, dessen Mittelpunkt auf der zu l_1^x durch M_2 gefällten Senkrechten liegt, wie leicht einzusehen ist.

Digitized by Google

Die Orthogonalprojection von $\mathfrak{a}_1$ in die Ebene G_2 ist offenbar senkrecht zu (PA_1), weil sie sich als Projection der Polarebene von A_1 in Bezug auf K darstellt, und wird von $(A_1 M_2)$ gleichfalls in einem Punkte auf m_1 geschnitten, welcher die orthogonale Projection der zu a_2 parallelen Erzeugenden a_2^x von $[l_1]$ ist, weil ja $(a_2 A_1) \equiv (a_2 r)$ eine asymptotische Ebene der Trägerfläche L_1 von $[l_1]$ ist. Die Ebene $(a_2 F)$ berührt diese Trägerfläche und da sie parallel ist zur Ebene $(r s)$, so liegt in ihr eine Gerade u, die durch F parallel zu s geht. Die Ebene $(u s)$ ist somit eine asymptotische Ebene von L_1 und enthält deshalb eine zu s parallele Leitgerade v für die Regelschaar $[l_1]$, die also auch a_2^x schneidet.

Dadurch kommen wir zur möglichst einfachen Bestimmung von $[l_1]$, indem wir in der Lage sind, sofort drei Leitgeraden dieser Regelschaar anzugeben.

Zwei von diesen Leitgeraden sind nämlich die früher angeführten Geraden a_2, $\mathfrak{a}_1$, die dritte ist die jetzt gefundene Gerade v deren Construction wir, wie folgt, zusammenfassen können.

Man legt durch den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{a}_1$ mit der Ebene $(a_2 A_1)$ die Normalebene zu g und bringt diese mit der Geraden (FB_1) zum Schnitte; alsdann ist die Gerade v dadurch bestimmt, dass sie durch den zuletzt erhaltenen Schnittpunkt geht, in der erwähnten Normalebene liegt und zu G_1 parallel ist.

Die Bestimmung der Regelschaar $[l_2]$ ist vollständig analog.

Die Curve c ist also thatsächlich eine Curve vierter Ordnung erster Art, und da zu dem von ihr getragenen Flächenbüschel zweiter Ordnung auch die Kugel K als Element gehört, so folgt daraus nebenbei, dass alle Flächen dieses Büschels gemeinschaftliche Kreisschnittebenen besitzen.

Ist P unendlich fern, so wird c eine ebene Curve; haben k_1, k_2 einen Punkt gemeinschaftlich, so reduciert sich K auf diesen Punkt, haben sie zwei Punkte gemein, so liegen sie auf einer Kugel und werden von jedem Punkte derselben auf jede zu ihrer Berührungsebene in diesem Punkte parallele Ebene als Kreise projiciert. Fallen schließlich die Ebenen G_1, G_2 in eine zusammen, so erhalten wir das von den Eingangs genannten Autoren erzielte Resultat.

3. Einfacher noch ist die Fläche L_1 durch drei Geraden der Regelschaar $[l_1]$ selbst bestimmt, die man sofort construieren kann. Zwei von ihnen n_1, p_1 sind die Transversalen zu $\mathfrak{a}_1$, a_2, welche durch die Schnittpunkte des Kreises k_2 mit K gehen; die dritte q_2 ist die zu g senkrechte in G_1 liegende Transversale von $\mathfrak{a}_1$ und a_2. Diese Gerade q_1 ist also mit der früher mit u bezeichneten Geraden identisch.

Dass diese drei Geraden der Regelschaar $[l_1]$ angehören, folgt aus der Bestimmung derselben Regelschaar durch die Leitgebilde $\mathfrak{a}_1$, a_2 und h_1 resp. m_1 ohneweiters. Denn die Schnittpunkte von

Digitized by Google

k_2 mit K liegen auf h_1 und die zuletzt erwähnte Transversale geht durch den Punkt F auf m_1.

Diese drei Geraden n_1, p_1, q_1 lassen sich mithin äußerst einfach construieren.

Um dann c zu construieren, legt man etwa durch q_1 Hilfsebenen; schneidet irgend eine solche Hilfsebene n_1 in R, p_1 in S und die Kugel K in einem Kreise i, so liefern die Schnittpunkte von $(R\,S)$ mit i zwei Punkte von c.

Die Curve c kann man sich auch, wie folgt, erzeugt denken.

Auf der Kugelfläche K ordne man zwei Kreisbüschel $[\mathfrak{a}_1]$ mit der Achse $\mathfrak{a}_1$ und $[\mathfrak{a}_2]$ mit der Achse $\mathfrak{a}_2$ einander zu, so dass sich in ihnen solche Kreise entsprechen, die einander berühren; alsdann ist c der geometrische Ort dieser Berührungspunkte.

Benützen wir nun eine inverse Abbildung derart, dass wir als Centrum der Inversion einen gemeinschaftlichen Punkt der gegebenen Kreise k_1, k_2 mit K wählen. Gehört dieser Punkt beispielsweise dem Kreise k_2 an, so geht durch die Inversion $[\mathfrak{a}_1]$ in einem ebenen Kreisbüschel $[\mathfrak{a}_1]^x$, und $[\mathfrak{a}_2]$ in einen Büschel $[\mathfrak{a}_2]^x$ von Strahlen über, und die Strahlen von $[\mathfrak{a}_2]^x$ berühren alsdann die entsprechenden Kreise von $[\mathfrak{a}_1]^x$; der Ort der Berührungspunkte ist die Curve c^x, welche unserer Curve c invers entspricht.

Der Mittelpunkt von $[\mathfrak{a}_2]^x$ heiße G, alsdann ist c^x auch das Erzeugnis des Büschels $[\mathfrak{a}_1]^x$ mit dem zu ihm projectiven Büschel erster Ordnung $[\mathfrak{g}]^x$ der Polargeraden von G in Bezug auf die Kreise von $[\mathfrak{a}_1]^x$. Transformieren wir wieder zurück auf die Kugel K, so erkennen wir daraus, dass c das Erzeugnis zweier projectiver Kreisbüschel $[\mathfrak{a}_1]$, $[\mathfrak{g}]$ auf K ist, von denen der zweite durch einen Schnittpunkt von k_2 mit K geht.

Die Verbindungsgeraden der Schnittpunktepaare entsprechender Kreise in diesen Büscheln sind die Geraden l_1, woraus folgt, dass diese Geraden das Erzeugnis zweier projectiver Ebenenbüschel bilden, dass also $[l_1]$ eine Regelschaar ist, wie wir schon früher gezeigt haben.

4. Schlömilch behandelt im ersten Jahrgang seiner Zeitschrift auf Seite 19 in eigenartiger Weise folgende Aufgabe.

„Fünf in einer Ebene gegebene Punkte A, B, C, D, E sind in eine andere gegebene Ebene so zu projicieren, dass die Projectionen A', B', C', D', E' in die Peripherie eines und desselben Kreises fallen."

Diese Aufgabe ist mit der folgenden, die uns jetzt beschäftigen soll, identisch.

Die Bildebene Π, in ihr fünf in allgemeiner Lage befindliche Punke A', B', C', D', E' und eine zweite Ebene E sind gegeben; man soll ein Projectionscentrum derart bestimmen, dass diese Punkte Pro-

Digitized by Google

jectionen von fünf Punkten A, B, C, D, E eines in der Ebene E liegenden Kreises darstellen.

Man wird zunächst solche Centralprojectionen suchen, für die vier von den gegebenen Punkten, etwa A', B', C', D' die Projectionen der Ecken A, B, C, D eines in E liegenden Kreisvierecks sind.

Schlömilch gelangt auf elementar-planimetrischem Wege zu einer einfachen Lösung dieser Aufgabe. Die von ihm entwickelte Construction ist richtig; die Herleitung derselben besitzt jedoch nicht die gewünschte Allgemeinheit. Sind nämlich A, B, C, D vier aufeinander folgende Punkte eines Kreises, so bilden die Verbindungsgeraden derselben in ihrer Reihenfolge ein gewöhnliches Kreiseck; Schlömilch stützt nun die Lösung der Aufgabe darauf, dass die Summe der spitzen Winkel, welche die Seiten dieses Viereckes mit irgend einer Transversale desselben bilden gleich 180^0 ist, was jedoch nicht für alle Lagen der Transversale zutrifft, so dass in dieser Hinsicht die Erläuterung seiner Construction vervollständigt werden müsste.

Wir geben hier zuerst eine andere Ableitung der Schlömilch'schen Construction.

Wegen der Unbestimmtheit unserer Aufgabe können wir noch die Fluchttrasse $\mathfrak{e}$ von E unter den Parallelen zur Geraden $(\Pi\,E)$ wählen und dann nach dem geometrischen Ort des umgelegten Projectionscentrums S_0 fragen.

Die Kegelschnitte durch A', B', C', D' bilden einen Büschel (1) und schneiden auf $\mathfrak{e}$ eine Involution ein. Die Doppelpunkte G', H' dieser Involution sind in Bezug auf alle Kegelschnitte dieses Büschels conjugiert. Ihnen entsprechen im Kegelschnittbüschel (2) durch A, B, C, D die allen Kegelschnitten desselben gemeinsamen Richtungen zweier conjugierten Durchmesser, wofern der erste Kegelschnittbüschel als Projection des zweiten aufgefasst wird. Soll $A\,B\,C\,D$ ein Kreisviereck sein, so muss der ihm umschriebene Kreis dem Büschel (2) auch angehören und es müssen die erwähnten gemeinsamen Durchmesserrichtungen infolge dessen auf einander normal stehen, also muss S_0 auf dem über $\overline{G'\,H'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise k liegen, welcher also der geometrische Ort von S_0 ist. Will man, dass ein bestimmter Kegelschnitt von (1) die Projection eines Kreises vorstelle, so hat man einen zweiten Kreis so zu legen, dass für ihn irgend zwei conjugierte Punkte auf $\mathfrak{e}$ bezüglich dieses Kegelschnittes die Endpunkte eines Durchmessers sind; der Schnitt dieses Kreises mit k liefert alsdann die zugehörigen Punkte S_0.

5. Um zu dem Kreise k zu gelangen, kann man sich auch auf folgenden Satz berufen.

Zieht man in einem Kegelschnitte zwei Sehnen, welche zu den Achsen desselben antiparallel sind, so liegen die vier Endpunkte derselben auf einem Kreis und die weiteren zwei Sehnen-

Digitized by Google

paare, welche diese Endpunkte verbinden, sind gleichfalls zu den Achsen des Kegelschnittes antiparallel.

Die Schnittpunktepaare der Gegenseiten des Vierecks $A'B'C'D'$ mit e legen eine Involution mit G', H' als Doppelpunkten fest; sie werden deshalb von irgend einem Punkte S_0 auf k durch Strahlenpaare projiciert, deren Winkel durch $(G'\,S_0), (H'\,S_0)$ halbiert werden. Diese Strahlenpaare sind nichts anderes als die umgelegten Fluchtgeraden für die Gegenseitenpaare im Viereck $A\,B\,C\,D$, so dass diese zu den Geraden $(G'\,S_0)$, $(H'\,S_0)$ antiparallel sind.

Da nun nach Vorangehendem die Richtungen von $(G'\,S_0)$ und $(H'\,S_0)$ conjugiert sind in Bezug auf alle Kegelschnitte von (2), so sind die Achsen aller dieser Kegelschnitte zu diesen Geraden parallel. Es ist dem herangezogenen Satz zufolge im Büschel (2) thatsächlich ein Kreis enthalten, der durch die Punkte $A\,B\,C\,D$ geht.

Die jetzige Ableitung wurde hier aus dem Grunde ausgeführt, weil sie den natürlichen Ursprung der Schlömilch'schen mehr elementaren Ableitung bildet, mit der sie übrigens innig verknüpft ist.

Im Folgenden soll eine andere, was die Durchführung anbelangt einfachere Construction des behandelten Problems auf elementarem Wege erzielt werden.

6. Es seien also wieder A', B', C', D' vier beliebige Punkte in Π und es sollen die aus ihnen in früherer Weise abgeleiteten Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen.

Wir denken uns wieder die Punkte A, B, C, D der Reihe nach mit einander zu einem Kreisviereck verbunden. Die Winkel dieses Vierecks mögen der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden.

Schneiden sich keine zwei nicht zusammenhängende Seiten dieses Vierecks, so ist

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0,$$

schneiden sich aber zwei nicht zusammenhängende Seiten, dann ist

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta.$$

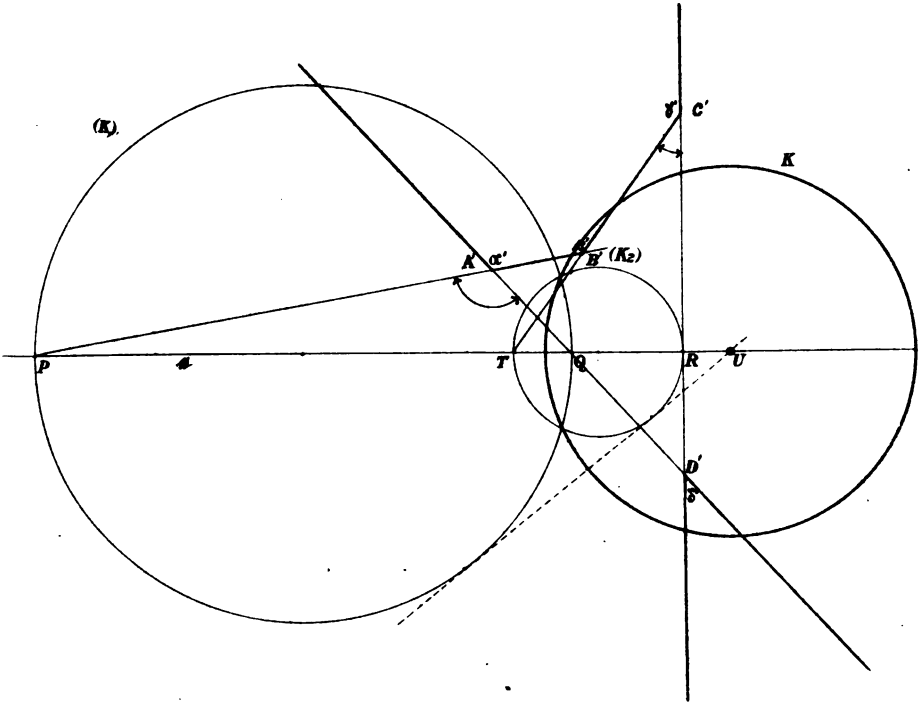
Es sei e wieder die gewählte Fluchttrasse von E. Soll unsere Aufgabe reell gelöst werden, so dürfen die Seiten des entsprechenden Vierecks $A'\,B'\,C'\,D'$ diese Gerade nicht schneiden, weil ja ein gewöhnliches Kreisviereck ganz im Endlichen liegt; damit ist aber noch nicht gesagt, dass diese Bedingung zureichend zur Erzielung der Realität ist.

Um dieser Bedingung zu entsprechen, verbinde man die Punkte A', B', C', D' der Reihe nach mit einander durch einen Linienzug, welcher wohl die unendlich ferne Gerade überschreiten, aber nicht die Gerade e schneiden darf.

Erzielt man in dem so gezogenen Viereck keinen Schnitt von nicht zusammenhängenden Seiten, so sind die Winkel α', γ'

Digitized by Google

an A' resp. C' und ebenso β', δ' an B' resp. D' in demselben Projectionen von supplementären, andernfalls von gleichen Winkeln.



Wir bezeichnen Fig. 1 noch beziehentlich mit P, T, R, Q die Schnittpunkte der Geraden $(A'B'), (B'C'), (C'D'), (D'A')$ mit $\mathfrak{e}$, dann werden die Winkel $(PB'T), (RD'Q)$ und ebenso die Winkel $(QA'P), (TC'R)$ gleichfalls Projectionen von supplementären oder gleichen Winkeln sein, was einerseits von den Winkeln α', γ' resp. β', δ' andererseits von der Lage der Geraden $\mathfrak{e}$ gegen das Viereck $A'B'C'D'$ abhängig ist, worüber uns die Figur aber in jedem Falle sofort Aufschluss gibt.

Ist S_0 wieder das umgelegte Projectionscentrum, so muss die soeben erläuterte Beziehung dann auch zwischen den von den umgelegten Fluchtstrahlen eingeschlossenen Winkeln $(PS_0T), (RS_0Q)$ und $(QS_0P), (TS_0R)$ bestehen.

Bei der Construction wird es bloß darauf ankommen, festzustellen, ob der eine oder der andere Zusammenhang bei einem der zwei Winkelpaare platzgreift, da dadurch schon $ABCD$ als ein Kreisviereck gesichert ist und die Beziehung für das zweite Paar sich dann mit ergibt.

Digitized by Google

Es kommt somit darauf an, solche Punkte S_0 in Π zu suchen, für welche entweder

$$\sphericalangle PS_0T + \sphericalangle RS_0Q = 180^0 \text{ oder } \sphericalangle PS_0T = \sphericalangle RS_0Q$$

ist je nach der getroffenen Entscheidung.

Um dies zu erzielen, legen wir durch P und Q einen (in der Figur nicht verzeichneten) Kreis k_1, dessen Mittelpunkt M_1 heißen möge, errichten über RT als Basis ein mit PQM_1 ähnlich liegendes Dreieck RTM_2, so dass seine dritte Ecke M_2 mit M_1 im ersten Falle zu verschiedenen Seiten, im zweiten Falle auf derselben Seite von e liegt, und führen den durch R und T bestimmten Kreis k_2 mit dem Mittelpunkte in M_2; alsdann ist der geometrische Ort der verlangten, umgelegten Projectionsmittelpunkte S_0 derjenige Kreis k, der durch die Schnittpunkte S_1, S_2 von k_1 mit k_2 geht und dessen Mittelpunkt U der Schnitt der Geraden $(M_1 M_2)$ mit e ist.

Zuerst sieht man, dass die Punkte S_1, S_2 dem gesuchten Orte angehören, weil die Winkel, unter denen die Strecken PQ, RT von S_1 oder S_2 aus gesehen werden, im ersten Falle supplementär, im zweiten Falle gleich sind. Die Gerade $(S_1 S_2)$ trifft e in dem Punkte K, welcher in Bezug auf die Kreise k_1, k_2 gleiche Potenz hat; es ist infolge dessen K der Mittelpunkt der auf e durch die beiden Punktepaare PQ, RT festgelegten Involution.

Einem anderen Kreis k_1' durch P und Q entspricht ein Kreis k_2' durch R und T; im Schnitte beider Kreise erhalten wir zwei neue Punkte S_1^x, S_2^x für die Lage des umgelegten Centrums S_0; aber die Verbindungsgerade dieser Punkte muss ebenfalls durch den Punkt K gehen, dessen Lage ja nur von den Punktepaaren PQ, RT abhängig ist. Ebenso schneidet die Verbindungsgerade der Mittelpunkte M_1', M_2' der Kreise k'_1, k'_2 die Fluchttrasse e in dem früher erhaltenen Punkte U; denn dieser ist das Centrum einer ähnlichen Lage zweier ebenen Systeme in Π, für die sich die Strecken PQ, RT entweder direct oder invers entsprechen.

Da

$$KS_1 . KS_2 = KS_1^x . KS_2^x$$

und

$$S_1 U = S_2 U,\ S_1^x U = S_2^x U,$$

so liegen je zwei in vorbeschriebener Art entstandene Schnittpunktepaare auf einem Kreis k, der U zum Mittelpunkte hat.

Demgemäß ist dieser Kreis k der geometrische Ort sämmtlicher Punkte S_0.

Darin liegt auch die Begründung für folgende Construction von k. Fig. 1.

Wir errichten über PQ und RT als Durchmessern Kreise, so ist der geometrische Ort k von S_0 derjenige Kreis des durch

Digitized by Google

sie bestimmten Kreisbüschels, welcher seinen Mittelpunkt in ihrem inneren oder äußeren Ähnlichkeitpunkte hat, jenachdem $\sphericalangle PS_0Q$ mit RS_0T supplementär oder gleich werden soll. In unserer Figur tritt der letztere Fall ein.

Die vier Punkte $PQRT$ lassen sich zweimal zu zwei Paaren ordnen, nämlich PQ, RT und QR, TP. Dabei kann man, reelle Lösungen vorausgesetzt, die Bezeichnung so wählen, dass die Punkte des einen Paares durch die des anderen getrennt werden, wodurch sich die Durchführung unserer Construction besonders einfach gestaltet. Diese Bedingung stimmt mit der überein, dass die Involution PQ, RT reelle Doppelpunkte besitze.

7. Der Zusammenhang dieser Lösung mit der in den vorhergehenden Artikeln abgeleiteten ist sehr einfach. PQ, RT sind zwei Paare einer Involution. Der gesuchte Kreis k ist den dort gegebenen Erläuterungen zufolge derjenige Orthogonalkreis zu den über PR, QT als Durchmessern beschriebenen Kreisen l_1, l_2, welcher seinen Mittelpunkt auf $\mathfrak{e}$ hat. In der Inversion für k als Grundkreis entsprechen die Kreise l_1, l_2 sich selbst; also entsprechen sich in ihr auch die Punkte der Punktepaare PQ, RT. Es entspricht mithin auch dem Kreise m_1 über PR als Durchmesser der Kreis m_2 über QT als Durchmesser sowie sich die Kreise n_1, n_2, für welche PT, resp. QR Durchmesser sind, invers entsprechen. Aus diesem Grunde schneiden sich sowohl m_1, m_2 als auch n_1, n_2 auf k, und der Mittelpunkt U von k ist ein Ähnlichkeitspunkt sowohl für das erste wie für das zweite Kreispaar.

In unserer Figur wurden die auftretenden Beziehungen für einen bestimmten, aus derselben leicht übersehbaren Fall, zur Darstellung gebracht.

8. Sollen schließlich fünf in Π gegebene Punkte A', B', C', D', E' Bildpunkte von fünf zu suchenden Punkten A, B, C, D, E in einer gegebenen Ebene E sein, welche so liegen, dass man durch sie einen Kreis führen kann, so wird man aus A', B', C', D', E' zwei Vierecke, beispielsweise $A'B'C'D'$ und $A'B'C'E'$ bilden und erhält dann nach getroffener Wahl von $\mathfrak{e}$ einen Kreis k als geometrischen Ort von S_0 für das erste Viereck und analog einen Kreis k_x, welcher dem zweiten Viereck in der früher erläuterten Weise zukommt. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die Umlegungen S_1^0, S_2^0 der Punkte S_1, S_2, von denen die Punkte A', B', C', D', E' in Π sich in die Ebene E als fünf Punkte eines Kreises projicieren.

Man erkennt sofort, wie diese Constructionen zu specialisieren sind, um die von Schlömilch angegebene elementare Construction eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnittes mit Hilfe eines Kreises zu erhalten. Es braucht nicht erst bemerkt zu werden, dass die hier soeben erledigte Construction in ihrer allgemeinen Form dasselbe leisten würde. Der Wert derartiger Constructionen

Digitized by Google

von Kegelschnitten ist aber weder in wissenschaftlicher noch in pädagogischer Hinsicht bedeutend.

9. Schlömilch hat eine einfache Überführung eines durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnittes in einen Kreis durch Centralprojection gleichfalls dazu benützt, um einen Kegelschnitt aus fünf Tangenten zu construieren. Bezüglich des Wertes dieser Kegelschnittconstruction gilt dasselbe wie zuvor. Die Auffassung dieser Überführung vom Standpunkte der Darstellenden Geometrie beansprucht aber immerhin ein gewisses Interesse.

Wir beschäftigen uns deshalb zunächst mit der Aufgabe:

Vier in einer Ebene Π beliebig gelegene Geraden a', b', c', d' sollen in eine zweite Ebene E als Tangenten a, b, c, d eines Kreises projiciert werden.

Wir können behufs Lösung dieser Aufgabe auch umgekehrt a', b', c', d' als die Projectionen von vier in E gelegenen, erst zu suchenden Tangenten a, b, c, d eines Kreises u betrachten; Π ist alsdann unsere Projectionsebene. Die Schnittgerade (Π E) heiße e. Wegen der Unbestimmtheit unserer Aufgabe kann man als Fluchttrasse e von E irgend eine in Π zu e gezogene Paralle annehmen.

Es seien p, q, r die ein Dreiseit bildenden Diagonalen des durch a', b', c' d' bestimmten Vierseits, und P, Q, R seien die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiseits.

PQR ist offenbar das gemeinsame Polardreieck für alle Kegelschnitte $u', \ldots$, welche a', b', c', d' berühren, und somit eine Kegelschnittschaar (u') bilden. Die zu den Schnittpunkten der Diagonalen p, q, r mit e harmonisch conjugierten Punkte in Bezug auf die Punktepaare QR, RP, resp. PQ liegen bekanntlich auf einer Geraden g, der Polare von e in Bezug auf (u'). Auf g liegen die Pole von e bezüglich sämmtlicher Kegelschnitte in (u'). Irgend ein Kegelschnitt u' von (u') ist alsdann festgelegt, wenn wir für denselben irgend einen Punkt E' auf g als Pol von e annehmen. Wir betrachten nun einen solchen Kegelschnitt und bezeichnen weiter die Schnittpunkte der Geraden p, q, r, g, (PE'), (QE') mit e beziehungsweise durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{G}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$. Es ist in Bezug auf u' zunächst (PE') die Polare von $\mathfrak{P}$, (QE') die Polare von $\mathfrak{Q}$; somit sind $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ conjugierte Punktepaare und $(\mathfrak{P}E')$ $(\mathfrak{P}_1E')$, $(\mathfrak{Q}E')$ $(\mathfrak{Q}_1E')$ conjugierte Strahlenpaare.

Soll also u' die Projection eines Kreises u und e die Projection der unendlich weiten Geraden seiner Ebene sein, so stellt E' die Projection des Kreismittelpunktes E vor und die soeben erwähnten zwei Strahlenpaare sind die Projectionen zweier Paare zueinander normaler Durchmesser von u. Infolge dessen erhält man die möglichen umgelegten Projectionsmittelpunkte als Schnitte der Kreise k_1, k_2, welche über $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1)$ resp. $(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1)$ als Durchmesser beschrieben werden.

Verändert man die Lage von E' auf g, so verändert hiedurch auch der Punkt $\mathfrak{P}_1$ auf e seine Lage perspectiv zu E' und ebenso der Punkt $\mathfrak{Q}_1$. Bei dieser Veränderung durchläuft der Kreis k_1

Digitized by Google

einen Büschel (k_1) sich in $\mathfrak{P}$ berührender Kreise, und der Kreis k_2 durchläuft einen zu (k_1) projectiven Büschel (k_2) von Kreisen, die sich in $\mathfrak{Q}$ berühren.

Das Erzeugnis von (k_1) und (k_2) ist demnach eine Curve vierter Ordnung c^0, welche durch die absoluten Punkte von Π zweimal hindurchgeht. Dieselbe schneidet $\mathfrak{e}$ orthogonal in den Punkten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$.

Drehen wir die Curve c^0 um $\mathfrak{e}$, bis ihre Ebene parallel zu E wird, so liefert sie in dieser Lage den geometrischen Ort solcher Punkte, von denen a', b', c', d' in die Ebene E nach vier Tangenten eines Kreises projiciert werden.

Geht $\mathfrak{e}$ insbesondere durch einen der Eckpunkte P, Q, R des gemeinsamen Polardreiecks, dann artet die Projectivität der Kreisbüschel (k_1), (k_2) aus, und wir erhalten als geometrischen Ort der umgelegten Mittelpunkte einen Kreis mit dem Mittelpunkte auf $\mathfrak{e}$; dieser Kreis geht durch den erwähnten Eckpunkt und durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{e}$ mit der Verbindungsgraden der beiden andern Eckpunkte. Fällt ferner $\mathfrak{e}$ mit einer Seite des Dreieckes PQR zusammen, so gibt die Strecke, welche durch die auf $\mathfrak{e}$ liegenden Eckpunkte desselben begrenzt wird, einen Durchmesser desjenigen Kreises, auf dem die umgelegten Projectionsmittelpunkte liegen. Der letzte Fall ist eben der von Schlömilch in Betracht gezogene.

10. Schließlich legen wir uns folgende Aufgabe vor.

Fünf in einer Ebene Π gegebene Geraden a', b', c', d', e' in allgemeiner Lage sollen in eine zweite gegebene Ebene E als Tangenten a, b, c, d, e eines Kreises projiciert werden.

Aus dem soeben Besprochenen ergibt sich, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, nachstehende Lösung.

Wir greifen aus den gegebenen Geraden viere heraus, beispielsweise a', b', c', d', bilden das Dreieck PQR und ermitteln die Gerade g wie zuvor. Ebenso bilden wir aus e' und drei von den soeben benützten Geraden ein Vierseit und ermitteln analog die Gerade h derart, dass sie mit $\mathfrak{e}$ jedes Gegeneckenpaar dieses Vierseits harmonisch trennt.

Der Schnittpunkt E' von g mit h ist alsdann der Pol von $\mathfrak{e}$ in Bezug auf den durch die Tangenten a', b', c', d', e' bestimmten Kegelschnitt. Die Geraden p und (PE') schneiden aus $\mathfrak{e}$ eine Strecke aus, über der als Durchmesser wir einen Kreis k_1 beschreiben; ebenso fassen wir die Strecke, welche auf $\mathfrak{e}$ durch die Geraden q, (QE') festgelegt wird, als Durchmesser eines Kreises k_2 auf. Die Schnittpunkte beider Kreise stellen die Umlegung der gesuchten Projectionsmittelpunkte dar, die also nur noch um $\mathfrak{e}$ nach C_1, C_2 so zu drehen sind, dass ihre Verbindungsgerade parallel zu E wird.

Die Geraden a', b', c', d', e' werden alsdann von den Punkten C_1, C_2 in die Ebene E als fünf Tangenten eines Kreises projiciert.

Digitized by Google

11. Die Construction gibt zu folgenden Specialfällen Anlass.

1. $\mathfrak{e}$ wird durch einen der Eckpunkte des Dreieckes PQR etwa durch P geführt.

Hier ist $g = (QR)$. Sind p', q', r' die Diagonalen eines zweiten aus den gegebenen Geraden gebildeten Vierseits und $P'Q'R'$ die Ecken des durch diese Diagonalen gebildeten Dreiseits, so schneide man p' und $(P'E')$, weiter q' und $(Q'E')$ mit $\mathfrak{e}$, wodurch man zwei Strecken erhält, die als Durchmesser zweier Kreise betrachtet werden. Der Schnitt dieser Kreise gibt die fraglichen umgelegten Projectionsmittelpunkte.

2. $\mathfrak{e}$ verbindet zwei Gegenecken eines aus den gegebenen Geraden gebildeten Vierseits $a'b'c'd'$.

Ist also etwa $\mathfrak{e} = (PQ)$, so ist $E' = R$.

Wir gelangen so zu dem von Schlömilch behandelten Falle.

Nach unserer Construction hätte man, um die umgelegten Projectionsmittelpunkte zu erhalten, über PQ als Durchmesser einen Kreis zu legen und mit einem Kreise zum Schnitt zu bringen, dessen auf $\mathfrak{e}$ liegender Durchmesser, wie folgt, erhalten wird.

Man bildet aus den gegebenen Geraden ein zweites Vierseit und zieht in demselben die zwei Diagonalen, welche den auf $\mathfrak{e}$ liegenden Eckpunkt desselben nicht enthalten; ist R' der Schnittpunkt dieser Diagonalen, so liefert (RR') einen Endpunkt des gesuchten Durchmessers; der zweite Endpunkt desselben ist eben der auf $\mathfrak{e}$ liegende Eckpunkt des Vierseit.

Diese, aus unserer allgemeinen Betrachtung hervorgegangene Construction erfordert das Ziehen einer Geraden mehr als die in Schlömilchs Mittheilung von C. Pelz angegebene Construction.

3. Bildet man aus den Geraden a', b', c', d', e' zwei Vierseite mit den zugehörigen Diagonaldreiseiten pqr, $p'q'r'$, deren Ecken mit P, Q, R resp. P', Q', R' bezeichnet werden mögen, so kann schließlich $\mathfrak{e}$ eine Ecke des ersten Dreiseits mit einer des zweiten verbinden.

Ist also beispielsweise $\mathfrak{e} = (PP')$, so ergeben sich die umgelegten Projectionsmittelpunkte im Schnitt der Kreise, welche $P\mathfrak{P}$ und $P'\mathfrak{P}'$ zu Durchmessern haben, wofern wieder $\mathfrak{P} = (p\,\mathfrak{e})$, $\mathfrak{P}' = (p'\,\mathfrak{e})$.

Diese Construction erfordert das Ziehen von zwei Linien mehr als die soeben citierte.

Digitized by Google

Der zweite Ergänzungssatz des cubischen Reciprocitätsgesetzes.

Von **Erwin Dintzl** in Wien.

In weit einfacherer Weise als für das biquadratische Reciprocitätsgesetz[1]) kann für die cubischen Reste der zweite Ergänzungssatz auf den ersten zurückgeführt, das ist das Zeichen

$$\left[\frac{1-j}{a+bj}\right] \tag{1}$$

durch das Zeichen

$$\left[\frac{j}{\alpha+\beta j}\right]$$

ausgedrückt werden. Dies soll in dieser kurzen Mittheilung gezeigt werden.

1. Ist der Nenner des Zeichens eine durch drei nicht theilbare reelle ganze Zahl, so hat man wegen

$$\left[\frac{3}{a}\right]=1$$

und

$$3=-j^2(1-j)^2$$

nach dem Multiplicationssatze:

$$\left[\frac{1-j}{a}\right]^2\left[\frac{-j^2}{a}\right]=+1$$

woraus die Formel folgt:

$$\left[\frac{1-j}{a}\right]=\left[\frac{-j^2}{a}\right]$$

---

[1]) Siehe „Über den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes". Diese Monatshefte X. Jahrg. p. 88–96.

Digitized by Google

oder wegen

$$\left[\frac{-1}{a}\right]=1$$

(I) $$\left[\frac{1-j}{a}\right]=\left[\frac{j}{a}\right]^2.$$

2. Ist der Nenner des Zeichens eine zweigliedrige complexe Zahl, so kann man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, annehmen, dass in dem Zeichen (1)

$$a=3r+1,\ b=\varepsilon\beta=3s\ (\varepsilon=\pm 1, \beta>0)$$

ist.

Da

$$\left[\frac{m}{n}\right]^3=1$$

ist, so folgt nach dem Multiplicationssatze der Zeichen

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{-\varepsilon}{a+bj}\right]^2\left[\frac{-3\varepsilon-3\varepsilon j}{a+\varepsilon\beta j}\right]$$

oder weil

$$\left[\frac{-\varepsilon}{a+bj}\right]=+1$$

ist,

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{-3\varepsilon-3\varepsilon j}{a+\varepsilon\beta j}\right].$$

Durch Benützung des Additionssatzes verwandelt man diese Formel in:

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}{a+\varepsilon\beta j}\right].$$

Da bei den cubischen Resten volle Reciprocität besteht, so kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{a+\varepsilon\beta j}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right]$$

oder nach dem Additionssatze:

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{3\varepsilon+3\varepsilon j}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right]$$

und infolge des Multiplicationssatzes, da ε für jede Zahl cubischer Rest ist,

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{3}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right]\left[\frac{1+j}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right].$$

Digitized by Google

Multipliciert man diese Gleichung mit den ihr analogen:

$$\left[\frac{1+j}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right]=\left[\frac{3}{a-3\varepsilon+\varepsilon(\beta-3)j}\right]^2\left[\frac{3}{a-6\varepsilon+\varepsilon(\beta-6)j}\right]\left[\frac{1+j}{a-6\varepsilon+\varepsilon(\beta-6)j}\right]$$

$$\left[\frac{1+j}{a-3.\frac{\beta-3}{3}\varepsilon+3\varepsilon j}\right]=\left[\frac{3}{a-3.\frac{\beta-3}{3}\varepsilon+3\varepsilon j}\right]^2\left[\frac{3}{a-\varepsilon\beta}\right]\left[\frac{1+j}{a-\varepsilon\beta}\right]$$

so ergibt sich die Relation:

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right]=\left[\frac{3}{a+bj}\right]^2\left[\frac{3}{a-\varepsilon\beta}\right]\left[\frac{1+j}{a-\varepsilon\beta}\right].$$

Da nun

$$1+j=-j^2,\ 3=(1-j)^2(1+j)$$

und bei reellem m und n

$$\left[\frac{m}{n}\right]=+1$$

ist, so erhält man schließlich

$$\text{(II)}\qquad \left[\frac{1-j}{a+bj}\right]=\left[\frac{j}{a+bj}\right]\left[\frac{j}{a-b}\right]\ (b\gtrless 0).$$

Hiemit ist die vorgelegte Aufgabe erledigt. Der Vollständigkeit halber möge noch die Ausrechnung der Formeln vorgenommen werden.

Nach der Definition des Zeichens ist:

$$\left[\frac{j}{n}\right]=j^{\frac{Nn-1}{3}}$$

und daher geht (I) über in

$$\left[\frac{1-j}{a}\right]=j^{\frac{2(a^2-1)}{3}}$$

und weil

$$\frac{2}{3}(a^2-1)\equiv\frac{\varepsilon_1 a-1}{3}\pmod 3 \qquad (a\equiv\varepsilon_1\pmod 3)$$

ist, so folgt

$$\text{(III)}\qquad \left[\frac{1-j}{a}\right]=j^{\frac{\varepsilon_1 a-1}{3}}.$$

Digitized by Google

Die Formel (II) stellt sich folgendermaßen dar:

$$\left[\frac{1-j}{a+bj}\right] = j^{\frac{2(a^2+b^2-1)}{3} - ab}.$$

Nun ist

$$\frac{2(a^2+b^2-1)}{3} - ab \equiv \frac{2}{3}(a^2-1) \pmod 3$$

$$\equiv \frac{a-1}{3} \pmod 3$$

und daher

(IV) $$\left[\frac{1-j}{a+bj}\right] = j^{\frac{a-1}{3}}.$$

Beachtet man, dass bei zweigliedrigem Nenner der Voraussetzung nach a die Form $3r+1$ hat, so können die zwei Formeln (III) und (IV) vereinigt werden zu:

$$\left[\frac{1-j}{a+bj}\right] = j^{\frac{\varepsilon_1 a - 1}{3}} \quad (a \equiv \varepsilon_1 \pmod 3;\ b \gtreqless 0).$$

Digitized by Google

Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen.

Von **Karl Bobek** in Prag.

II. Abtheilung. Flächen mit singulären Punkten.

Die Flächen dritter Ordnung mit singulären Punkten, welche von mehr als vierzehn Constanten abhängen, lassen, mit Ausnahme der Fläche mit zwei Biplanarknoten, nur endliche Gruppen von Collineationen in sich zu. Und zwar besitzen die Flächen mit einem conischen oder biplanaren Knoten bei allgemeinen Werten der Invarianten keine Collineationen in sich; diese treten erst auf beim Vorhandensein gewisser Relationen zwischen den Invarianten. Hingegen existieren stets Collineationen, welche die allgemeine Fläche mit mehr als einem conischen Knoten, oder einem biplanaren Knoten zweiter Art oder einem Uniplanarenknoten in sich transformieren.

Die Fläche mit zwei biplanaren Knoten lässt eine einfach unendliche continuierliche Gruppe von Collineationen in sich zu und besitzt daher, obgleich sie nur von 15 Constanten abhängt, doch eine Invariante. Für specielle Werte derselben treten dann noch andere ebenfalls einfach-unendliche Gruppen von Collineationen auf, welche die Fläche in sich transformieren.

Es zeigt sich ferner, dass bei den Flächen mit singulären Punkten, welche Collineationen in sich zulassen, nicht nothwendigerweise Tripelpunkte, in denen sich drei unäre Grade schneiden, auftreten, wie bei den Flächen ohne singuläre Punkte.

Behufs kurzer Bezeichnung der Flächen wurde das Zeichen F_ν gewählt für die Fläche dritter Ordnung, welche der νten Classe von Schäfli [1]) angehört.

---

[1]) Schläfli „On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species etc." Philosophical Transactions 1863, pag. 193, oder „Rodenberg „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung", Math. Annalen Bd. 14, pag. 46 u. ff.

Digitized by Google

I. Flächen mit conischen Knoten.

1. Die Fläche F_2 mit einem conischen Knoten.

§. 1. Die Fläche F_2 mit einem conischen Knoten c wird in demselben von dem Kegel zweiten Grades $\mathfrak{C}$ osculiert, welcher die sechs binären Geraden $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ von F_2 enthält. Jede Ebene $\mathfrak{E}_{ik}$ durch $b_i b_k$ enthält noch eine unäre Gerade a_{ik} von F_2. Ist $\mathfrak{T}_i$ die Tangentialebene von $\mathfrak{C}$ längs b_i, so kann man die drei Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{T}_1\ \mathfrak{E}_{12}\ \mathfrak{E}_{13}\ \mathfrak{E}_{14}),\quad (\mathfrak{T}_1\ \mathfrak{E}_{12}\ \mathfrak{E}_{13}\ \mathfrak{E}_{15}),\quad (\mathfrak{T}_1\ \mathfrak{E}_{12}\ \mathfrak{E}_{13}\ \mathfrak{E}_{16})$$

oder die ihnen gleichen

$$(b_1\ b_2\ b_3\ b_4),\quad (b_1\ b_2\ b_3\ b_5),\quad (b_1\ b_2\ b_3\ b_6)$$

als Invarianten der Fläche F_2 für die binäre Gerade b_1 bezeichnen und man zeigt, dass zwei Flächen, die gleiche Invarianten haben, durch eine bestimmte Raumcollineation ineinander überführt werden können[1]), sowie, dass von einer Fläche F_2 noch 15 Bestimmungsstücke (Constanten) willkürlich wählbar sind, sobald ihre drei Invarianten gegeben werden.

Hat also eine F_2 für zwei binäre Geraden gleiche Invarianten, so existiert stets eine Raumcollineation A, welche F_2 in sich transformiert, und umgekehrt, wird F_2 durch eine Raumcollineation A in sich transformiert, dann sind die Invarianten der Fläche für zwei der binären Geraden, die sich in A entsprechen, gleich.

---

[1]) Da dieser Satz sofort benützt wird, möge hier sein Beweis folgen: Sind F_2 und F_2' zwei Flächen mit dem conischen Knoten c resp. c′ und haben dieselben für b_1 und b_1' gleiche Invarianten, so beziehe man die Strahlenbündel [c] und [c′] collinear so aufeinander, dass den Strahlen b_1, b_2, b_3, b_4 von [c] die Strahlen b_1', b_2', b_3', b_4' von [c′] entsprechen. Dann wird dem Kegel $\mathfrak{C}$ der Kegel $\mathfrak{C}'$ entsprechen müssen, da für sie $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1', b_2', b_3', b_4')$ ist. Es sind aber auch b_5 und b_5' sowie b_6 und b_6' homologe Gerade wegen $(b_1, b_2, b_3, b_5) = (b_1', b_2', b_3', b_5')$ resp. $(b_1, b_2, b_3, b_6) = (b_1', b_2', b_3', b_6')$.

Ordnet man ferner der Ebene E, welche die drei Geraden a_{12}, a_{34}, a_{56} von F_2 enthält, die Ebene E' zu, welche die Geraden $a_{12}', a_{34}', a_{56}'$ aus F_2' ausschneidet, so werden hiedurch ∞^1 Collineationen festgelegt, in denen allen a_{12}, a_{12}'; a_{34}, a_{34}'; a_{56}, a_{56}' homologe Gerade sind. Um eine der Collineationen A festzulegen, kann man noch der Ebene E_1 durch a_{12} und etwa a_{35}, die Ebene E_1' durch a_{12}' und a_{35}' zuweisen, wodurch A so bestimmt ist, dass sich F_2 und F_2' entsprechen. Denn a_{35} als Verbindungsgerade der Durchstoßpunkte von b_3, b_5 mit E_1 hat zur Homologen die Gerade, welche die Schnittpunkte von E_1' mit b_3', b_5' enthält und diese ist a_{35}'. Aber auch die dritte Gerade a_{46} von F_2 in E_1 hat zur Homologen a_{46}' von F_2'.

Die zu F_2 homologe Fläche dritter Ordnung in A hat also mit F_2' elf Gerade gemeinschaftlich ist daher mit ihr identisch.

Der Beweis bleibt giltig, wenn F_2' mit F_2 identisch ist, und daher b_1' eine der fünf übrigen Geraden b_i ist.

Digitized by Google

Hieraus folgt, dass für jede Fläche F_2, welche eine Collineation in sich zulässt, die sechs binären Geraden b_i einem cyclisch-projectivischen System angehören müssen, dessen Ordnung identisch ist mit der Periode der Collineation. Da die Projectivität nur zwei Coïncidenzgerade aufweisen kann, so haben wir folgende Fälle:

1. Die sechs Geraden bilden drei Paare $b_1\ b_2$, $b_3\ b_4$, $b_5\ b_6$ einer Involution.

2. Vier der Geraden bilden zwei Paare $b_1\ b_2$, $b_3\ b_4$ einer Involution, deren Deckelemente die zwei letzten b_5, b_6 sind.

3. Die sechs Geraden bilden zwei Cyclen $b_1\ b_2\ b_3$ und $b_4\ b_5\ b_6$ einer tricyclischen Projectivität.

4. Vier der Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 bilden einen Cyclus einer quaternär-cyclischen Projectivität, deren Deckelemente die zwei letzten Geraden b_5, b_6 darstellen.

5. Fünf der Geraden b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 bilden einen Cyclus einer quinär-cyclischen Projectivität, für welche die sechste b_6 ein Deckelement ist.

6. Die sechs Geraden bilden einen Cyclus einer senär-cyclischen Projectivität.

In den Fällen 4, 5, 6 ist die Lage der sechs Geraden projectivisch bestimmt, daher auch für die entsprechenden Flächen F_2 die Invarianten numerische Werte haben.

Die Abbildung der Fläche F_2 auf eine Ebene kann nach Clebsch durch einen Kreis $\mathfrak{K}$ vermittelt werden, auf welchem die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Bilder der binären Geraden darstellen, während die fünfzehn unären Geraden a_{ik} zu Bildern die Geraden $\overline{ik}$ haben. So oft sich drei der Geraden $\overline{ik}$ in einem Punkte α_0 schneiden, treten Tripelpunkte α auf F_2 auf.

Wir untersuchen nun der Reihe nach die oben angegebenen sechs Fälle.

§. 2. Die sechs Geraden bilden drei Paare einer Involution, so zwar, dass $b_1\ b_2$, $b_3\ b_4$, $b_5\ b_6$ Paare derselben sind, dann müssen sich $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ in einem Punkte α_0 schneiden, dem auf F_2 ein Tripelpunkt α entspricht, durch den a_{12}, a_{34}, a_{56} gehen.

Die entsprechende Collineation A ist die central-involutorische Collineation mit dem Centrum α und der Collineationsebene $\mathfrak{A}$, welche Polarebene von α für $\mathfrak{C}$ ist.

Es ist klar, dass, wenn F_2 einen Tripelpunkt α besitzt, auch derselbe Centrum einer central-involutorischen Collineation ist.

§ 3. Vier der sechs Geraden bestimmen eine Involution durch $b_1\ b_2$ und $b_3\ b_4$ als Paare, das dritte Paar $b_5\ b_6$ stellt die Deckelemente der Involution dar. Wie aus der Figur 1 folgt, schneiden sich daher a_{56}, a_{14}, a_{23} in einem Punkte α und a_{56}, a_{13}, a_{24} in α', so dass also a_{56} zwei Tripelpunkte aufweist.

Digitized by Google

Die Fläche besitzt daher die Gruppe von vier Collineationen $1, A, A', AA' = A'A = T$, von denen die letzte eine geschart-involutorische ist. (Vgl. I. Abt. §. 7).

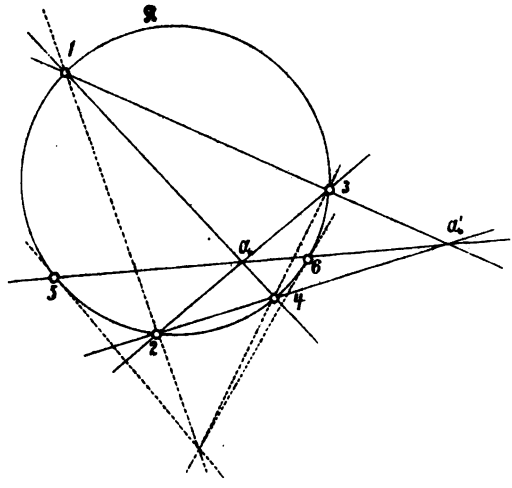


Fig 1.

§. 4. Bilden die sechs Geraden zwei Cyclen zu drei, so mögen die Deckpunkte der tricyclischen Projectivität auf $\mathfrak{R}$ in die imaginären Kreispunkte verlegt werden. Dann sind 1, 2, 3, ebenso wie 4, 5, 6 die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes und wie aus der Figur 2 sofort ersichtlich, schneiden sich auf F_2 die Geraden

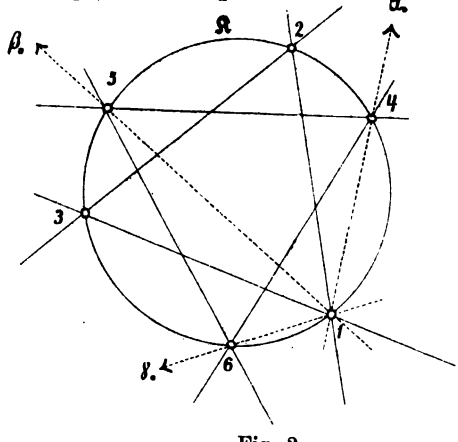


Fig. 2.

$$a_{14}, a_{26}, a_{35} \text{ in } \alpha$$
$$a_{15}, a_{24}, a_{36} \text{ „ } \beta$$
$$a_{16}, a_{25}, a_{34} \text{ „ } \gamma$$

und die drei Tripelpunkte α, β, γ liegen auf einer Geraden.

Da durch die Collineation Π die Geraden b_1, b_2, b_3 in b_2, b_3, b_1 übergehen sollen und F_2 ungeändert bleibt, so muss die Gerade a_{12} in a_{23} und diese in a_{31} übergehen. In ähnlicher Weise findet man die nachstehenden Cyclen, welche durch $1, \Pi$ und Π^2 hervorgebracht werden:

Digitized by Google

$$\Pi) \quad \begin{matrix} b_1 & b_4 & a_{12} & a_{45} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ b_2 & b_5 & a_{23} & a_{56} & a_{25} & a_{26} & a_{24} \\ b_3 & b_6 & a_{31} & a_{46} & a_{36} & a_{34} & a_{35} \end{matrix}$$

Beachtet man, dass durch die centrale Collineation A, wie aus Figur 2 folgt die Zuordnung, der Geraden von F_2 in nachstehender Weise geschieht:

$$A) \quad \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{16} & a_{15} & a_{25} & a_{14} & a_{26} & a_{35} \\ b_4 & b_6 & b_5 & a_{46} & a_{45} & a_{56} & a_{24} & a_{34} & a_{36} \end{matrix}$$

und durch B die Geraden wie folgt gepaart werden:

$$B) \quad \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{14} & a_{16} & a_{26} & a_{15} & a_{24} & a_{36} \\ b_5 & b_4 & b_6 & a_{45} & a_{56} & a_{46} & a_{25} & a_{35} & a_{34} \end{matrix}$$

so erkennt man, dass

$$\Pi = AB$$

ist. Da die Tripelpunkte α, β, γ auf einer Geraden liegen, so folgt wie in der I. Abtheilung §. 8, dass

$$\Pi = AB = B\Gamma = \Gamma A$$

ist, welche Beziehung sich auch direct mit Rücksicht auf Γ ergibt.

Die Fläche F_2 besitzt daher die Gruppe von sechs Collineationen $1, A, B, \Gamma, \Pi = AB, \Pi^2 = BA$, von denen die letzteren zwei planar-tricyclische sind.

Eine central- oder geschart-tricyclische Collineation kann F_2 nicht zugelassen, da durch eine solche auch $\mathfrak{C}$ in sich übergehen muss.

Dass umgekehrt eine F_2, welche zwei Tripelpunkte α, β besitzt, so dass $\overline{\alpha\beta}$ nicht auf der Fläche liegt eine planar-ternäre Collineation zulässt ist sofort klar.

§. 5. Bilden die vier Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 einen Cyclus einer quaternären Projectivität, deren Deckelemente b_5 und b_6 sind, so bringe man 5, 6 in die imaginären Kreispunkte der Ebene, wodurch 1, 2, 3, 4 die Ecken eines Quadrates bilden. Die Lage der sechs Punkte ist projectivisch bestimmt und wird dieselbe wie Figur 3 angenommen, so ergibt sich

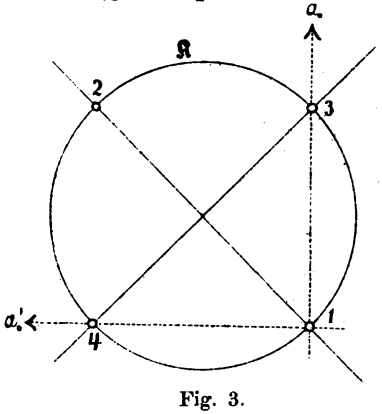


Fig. 3.

$$(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = -1 \quad (b_1\, b_2\, b_3\, b_5) = +\sqrt{-1}$$
$$(b_1\, b_2\, b_3\, b_6) = -\sqrt{-1}$$

Digitized by Google

so dass die Fläche projectivisch bestimmt ist. Da vermöge dieser Werte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6 \overline{\wedge} b_3\, b_4\, b_2\, b_1\, b_5\, b_6,$$

ist, so kann F_2 so in sich transformiert werden, dass $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6$ übergeht in $b_3\, b_4\, b_2\, b_1\, b_5\, b_6$. Nennen wir diese Raumcollineation Δ, so ergeben sich für dieselbe folgende Quadrupel:

$\Delta)$
$$\begin{array}{cccccccc} b_5 & b_6 & b_1 & a_{15} & a_{16} & a_{13} & a_{12} & a_{56} \\ & & b_3 & a_{35} & a_{36} & a_{23} & a_{34} & \\ & & b_2 & a_{25} & a_{26} & a_{24} & & \\ & & b_4 & a_{45} & a_{46} & a_{14}. & & \end{array}$$

Die Collineation Δ^2 ist also eine gescharte mit a_{56} als Leitstrahl. Diese Gerade enthält zwei Tripelpunkte α und α', in denen sich a_{13}, a_{24} resp. a_{14}, a_{23} schneiden, wie aus Figur 3 ersichtlich.

Da 3, 4 symmetrisch zu $\overline{12}$ liegt, so wird die circulare Involution im Punkte 3, welche die imaginären Kreispunkte 5, 6 projiciert auf $\overline{12}$ dieselbe Involution ausschneiden, wie die circulare Involution des Punktes 4, d. h. die imaginären Geraden $\overline{35}, \overline{36}$ und $\overline{46}, \overline{45}$ schneiden einander auf $\overline{12}$ in den conjungiert imaginären Punkten β_0, β_0'.[1]) Daher liegen auf der Geraden a_{12} die beiden Tripelpunkte β und β', in denen sich a_{13}, a_{35}, a_{46} resp. a_{14}, a_{45}, a_{36} schneiden.

Analog liegen auf a_{34} zwei Tripelpunkte γ und γ', in denen sich a_{34}, a_{26}, a_{15} resp. a_{34}, a_{25}, a_{16} treffen.

Die Punkte $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sind die Ecken eines vollständigen Vierseites, dessen Diagonaldreiseit die drei Geraden a_{12}, a_{34}, a_{56} sind. Die Punkte α', β', γ' liegen auf einer Geraden.

In Folge dessen ist die quaternäre Collineation Δ erzeugbar durch drei central-involutorische Collineationen, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, ist $\Delta = B\, A\, \Gamma$.

Neben diese treten noch die zwei quaternären Collineationen $\Delta_1 = A\, \Gamma\, B$ und $\Delta_2 = \Gamma\, B\, A$, deren Quadrate die geschaarten Involutionen mit der Leitgeraden a_{34} resp. a_{12} sind.

Die Fläche lässt die Gruppe G_{24} von 24 Collineation zu, wie sie in der I. Abtheilung §. 17 dargestellt wurde.

§. 6. Bilden die fünf Geraden b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ein quinär-cyclisch-projectivisches System, dessen ein Deckelement b_6 ist, so werden bei unserer Abbildung der F_2, wenn der Puukt 6 und das andere Deckelement in die imaginären Kreispunkte verlegt werden, die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 die Ecken eines regulären Fünfeckes bilden. Da

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6 \overline{\wedge} b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_1\, b_6$$

[1]) Cfr.: Bobek, Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Leipzig 1889. pag. 81.

Digitized by Google

ist, so ergeben sich für die drei Invarianten numerische Werte, so dass die Fläche projectivisch bestimmt ist. Aus der Abbildung ersieht man, dass F_2 keinen Tripelpunkt enthält. Die quinäre Collineation η ist nicht durch centrale Collineationen erzeugbar und F_2 besitzt nur die cyclische Gruppe $1, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ von Collineationen. Ließe nämlich F_2 noch andere Collineationen zu, so müssten die sechs binären Erzeugenden noch einem anderen projectivisch-cyclischen System angehören, was unzulässig ist.

§. 7. Bilden die sechs Geraden b_i einen Cyclus, dann ist

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6 \,\overline{\wedge}\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_1$$

woraus folgt, dass die Invarianten der Fläche numerische Werte haben, diese also projectivisch bestimmt ist.

Bildet man die sechs Geraden b_i so ab, dass die Deckpunkte der senär-cyclischen Projectivität auf $\mathfrak{K}$ die imaginären Kreispunkte werden, so sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Ecken eines regulären Sechseckes.

Die senär-cyclische Collineation X ordnet dann die Geraden der Fläche in nachstehender Weise zu Sextupeln:

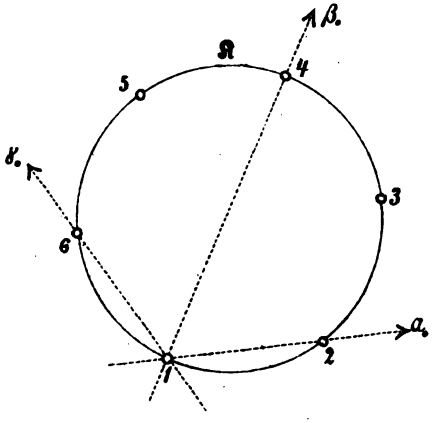


Fig. 4

$X)$

$$\begin{array}{llll} b_1 & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ b_2 & a_{23} & a_{26} & a_{24} \\ b_3 & a_{34} & a_{13} & a_{36} \\ b_4 & a_{45} & a_{24} & \\ b_5 & a_{56} & a_{35} & \\ b_6 & a_{16} & a_{46}. & \end{array}$$

Aus der Figur 4 ersieht man sofort, dass sich die Geraden

a_{12}	a_{36}	a_{45}	schneiden	in	einem	Tripelpunkt α
a_{14}	a_{23}	a_{56}	"	"	"	" β
a_{16}	a_{25}	a_{34}	"	"	"	" γ
a_{14}	a_{25}	a_{36}	"	"	"	" α'

und dass weitere Tripelpunkte nicht auftreten. α, β, γ liegen auf einer Geraden, während $\overline{\alpha'\alpha}$, $\overline{\alpha'\beta}$, $\overline{\alpha'\gamma}$ Flächengerade sind. Wir haben daher die Lage der Tripelpunkte auf F_2, wie sie im

Digitized by Google

§. 18 der I. Abtheilung der Betrachtung zu Grunde lag und erhalten wie dort die Gruppe G_{12} der 12 Collineationen X^n, $A X^n$ $(n = 0, 2, \ldots, 5)$, welche die Fläche dritter Ordnung ungeändert lässt.

Man findet leicht, dass $X = A' A \Gamma$ ist, sich also durch centrale Collineationen erzeugen lässt.

2. Die Fläche F_4 mit zwei conischen Knoten.

§. 8. Die Osculationskegel $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in den Knoten c und c' von F_4 berühren einander längs der quaternären Geraden d von F_4 und schneiden sich noch in einem Kegelschnitt k^2 in der Ebene $\mathfrak{R}$. Jeder der Kegel enthält vier binäre Gerade b_i resp. b_i' von F_4, welche sich auf k^2 schneiden in dem Punkte i.

$\mathfrak{E}_i$ sei die Ebene, welche $b_i\, b_i'$ enthält, also durch d geht und $\mathfrak{E}_{ik}$ resp. $\mathfrak{E}_{ik}'$ seien, die Ebenen durch b_i, b_k resp. b_i', b_k' welche je noch eine unäre Gerade a_{ik} resp. $a_{m,n}$ enthalten, wenn i, k, m, n die vier Zahlen 1, 2, 3, 4 sind.

Man kann die beiden Doppelverhältnisse $(d\, b_1\, b_2\, b_3)$ und $(d\, b_1\, b_2\, b_4)$ als Invarianten der Fläche bezeichnen und zeigt wie im §. 1, dass zwei Flächen mit gleichen Invarianten stets durch eine Collineation in einander überführbar sind.

Da nun stets

$$(d\, b_1'\, b_2'\, b_3') = (d\, b_1\, b_2\, b_3)$$
$$(d\, b_1'\, b_2'\, b_4') = (d\, b_1\, b_2\, b_4)$$

ist, so muss stets eine Collineation existieren welche F_4 so in sich überführt, dass b_i in b_i' also $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}'$ übergeht. Diese central-involutorische Collineation ist sofort angebbar.

In der Ebene $\mathfrak{E}$, welche F_4 längs d berührt, liegt noch die unäre Gerade a, welche d in α schneiden möge. Die central-involutorische Collineation A, deren Centrum α und deren Ebene $\mathfrak{R}$ ist, transformiert F_4 in der oben angeführten Weise. Die Paare homologer Geraden sind:

$$A) \qquad \begin{matrix} a\, d\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \\ b_1'\, b_2'\, b_3'\, b_4'\, a_{34}\, a_{24}\, a_{23}. \end{matrix}$$

Ist nun Γ irgend eine Collineation, welche F_4 so in sich tranformiert, dass $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in einander übergehen, so wird die Collineation $A\Gamma$ die Fläche so in sich transformieren, dass sowohl $\mathfrak{C}$ als $\mathfrak{C}'$ in sich übergehen. Hat man also alle Collineationen bestimmt, welche F_4 in sich transformieren derart, dass der Kegel $\mathfrak{C}$ erhalten bleibt, so erhält man alle Collineationen überhaupt, die F_4 ungeändert

Digitized by Google

lassen, wenn man zu denselben die Collineation A hinzunimmt.

Die Collineation A ist mit allen Collineationen, die F_4 ungeändert lassen, vertauschbar, da diese sowohl α als $\mathfrak{K}$ ungeändert lassen müssen.

§. 9. Jede Collineation, welche $\mathfrak{C}$ und F_4 ungeändert lässt, muss die vier binären Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 so cyclisch vertauschen, dass d ein Deckelement der cyclischen Projectivität auf $\mathfrak{C}$ wird.

Umgekehrt entspricht jeder solchen cyclisch-projectiven Beziehung eine Collineation, welche F_4 ungeändert lässt. Die Periode der Collineation stimmt mit der Ordnung des Cyclus der Projectivität überein. Wir haben also folgende Möglichkeiten:

1. Die vier binären Geraden bestimmen als zwei Paare $b_1\, b_2$, $b_3\, b_4$ eine Involution, deren ein Deckelement die quaternäre Gerade d ist.

2. Drei der vier binäre Geraden b_1, b_2, b_3 bestimmen eine tricyclische Projectivität, deren Deckelemente b_4 und d sind.

3. Die vier binären Geraden bilden eine Quadrupel einer quaternär-cyclischen Projectivität, deren ein Deckelement d ist.

§. 10. Sind b_1, b_3 und b_2, b_4 die beiden Paare der Involution, deren ein Deckelement d ist, so schneiden sich die Ebenen $\mathfrak{E}_{13}, \mathfrak{E}_{24}$ und $\mathfrak{E}$ in einer Geraden t, welche F_4 noch in α', einem Tripelpunkte, schneidet, der auf den Geraden a_{13}, a_{24}, a enthalten ist. α' ist daher der zweite Asymptotenpunkt von a und liegt mithin in $\mathfrak{K}$. Durch ihn gehen auch die Ebenen $\mathfrak{E}'_{24}$ und $\mathfrak{E}'_{13}$.

F_4 lässt die Gruppe $1, A, A', A\,A' = A'A$ von Collineationen in sich zu, von denen die letzte die Kegel $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ mit einander vertauscht und eine geschart-involutorische Collineation ist.

§. 11. Besteht die tricyclisch-projectivische Beziehung

$$d\, b_4\, b_1\, b_2\, b_3 \,\overline{\wedge}\, d\, b_4\, b_2\, b_3\, b_1,$$

so haben die Invarianten der Fläche numerische Werte, diese ist also projectivisch bestimmt.

Die tricyclische Collineation π ordnet die Geraden der Fläche in folgende Tripel:

$$\pi) \qquad \begin{matrix} a\, d\, b_4\, b'_4 & b_1\, b'_1 & a_{14}\, a_{12} \\ & b_2\, b'_2 & a_{24}\, a_{23} \\ & b_3\, b'_3 & a_{34}\, a_{13}. \end{matrix}$$

Da für π die Punkte a, c, c' von d Coïncidenzpunkte sind, so sind es alle Punkte von d, die Collineation ist daher ein tri-

Digitized by Google

cyclisch-planare, deren Achse p die Tangente von k^2 im Punkte 4 ist, während d die Gegenachse darstellt. Diese Collineation π ist nicht durch central-involutorische Collineationen, welche F_4 ungeändert lassen, erzeugbar.[1])

Zu der cyclischen Gruppe von Collineationen $1, \pi, \pi^2$ tritt nach §. 9 noch die Collineation A, so dass die ganze Gruppe von Collineationen $1, \pi, \pi^2, A, A\pi = \pi A, A\pi^2 = \pi^2 A$ ist. Von diesen sind die beiden letzten senäre Collineationen, und da $(A\pi)^2 = \pi^2$ und $(A\pi)^3 = A$ ist, ist diese Collination von Charakter X des §. 18 der I. Abtheilung. Die Anordnung der Geraden von F_4 zu Sextupeln vermöge $A\pi$ ergibt sich leicht aus den Schemen für A und π auf pag. 314 resp. 315.

§. 12. Bilden die vier binären Geraden ein quaternär-cyclisches System, dessen ein Deckelement d ist, besteht daher die Relation:

$$d\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \overline{\wedge}\, d\, b_2\, b_3\, b_4\, b_1$$

so sind die Invarianten der Fläche numerisch bestimmt, daher auch die Fläche projectivisch gegeben.

Dieselbe lässt eine quaternäre Collineation ν zu, deren Quadrat eine central-involutorische Collineation ist. Die Gruppierung der Geraden ergibt sich

$$\nu) \qquad \begin{matrix} a\,d & b_1\, b_1' & a_{12}\, a_{13} \\ & b_2\, b_2' & a_{23}\, a_{24} \\ & b_3\, b_3' & a_{34} \\ & b_4\, b_4' & a_{14} \end{matrix}$$

---

[1]) Ist π_0 die tricyclische Collineation, welche π in der Ebene $\mathfrak{R}$ induciert, so entspricht sich in π_0 die Curve dritter Ordnung C^3 selbst, in welcher $\mathfrak{R}$ von F_4 getroffen wird. Ist δ der Durchstoßpunkt von d mit $\mathfrak{R}$ so sind $\overline{\delta 1}$, $\overline{\delta 2}$, $\overline{\delta 3}$, $\overline{\delta 4}$ Tangenten von C^3 und da die Projectivität besteht $d\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \overline{\wedge}\, d\, b_2\, b_3\, b_1\, b_4$, so folgt auch für den Büschel der vier Tangenten: $\delta\,(1\,2\,3\,4) \overline{\wedge} \delta\,(2\,3\,1\,4)$ d. h. derselbe ist ein äquianharmonischer und daher ist C^3 die äquianharmonische Curve dritter Ordnung. Für die Collineation π_0 ist das von den Geraden p, $\overline{\delta 4}$ und der Schnittlinie q der Ebene $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R}$ gebildete Dreieck, das Hauptdreieck und da sich C^3 in π_0 selbst entspricht, muss das Hauptdreieck der Curve ein- und umschrieben sein, daher, da q Tangente von C^3 in δ ist, und $\overline{\delta 4}$ die C^3 in 4 berührt, ist p Tangente von C^3 in Schnittpunkte δ' von p mit q.

Dieser Fall, dass die Axe p der tricyclischen Collineation π keine Tripelpunkte der Fläche dritter Ordnung enthält, kann bei Flächen ohne Doppelpunkt oder blos mit einem conischen Knoten nicht auftreten. Denn die Curven, in welchen die Ebenen durch p die Fläche schneiden, müssen sich selbst entsprechen in der tricyclischen Collineation ihrer Ebene, für die p eine Hauptgerade ist. Da p keine Wendepunkte enthalten soll, müssten die Curven alle äquianharmonisch sein und p müsste sie also auf F, in einem Punkte δ' berühren

Die Gegenaxe p' der Collineation enthält die Ecken x' die Hauptdreiecke der ebenen Collineationen und es müsste dann $\overline{\delta' x'}$ stets Tangente der Schnittcurve sein, d h. p' müsste auf F liegen und die Ebene $\overline{\delta' p'}\, F$ längs p' berühren, woraus folgt, dass F auf p' entweder zwei conische Knoten oder ein Uniplanarknoten oder einen Biplanarknoten zweiter Art besitzt. Vgl. Bobek, Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. Wien. Ber. 1887, Bd. XCVI. pag 359.

Digitized by Google

also entsprechen sich vermöge ∇^2 die Geraden a, a_{13}, a_{24} selbst und schneiden sich in dem Tripelpunkte α' auf $\mathfrak{K}$.

Die Collineation $A\nabla = \nabla A = \nabla'$ ist wieder eine quaternäre Collineation, deren Quadrat $\nabla'^2 = \nabla^2 = A'$ ist. Die Gruppierung der Geraden gibt das Schema:

$\nabla' = A\nabla$)

$$\begin{array}{llll} a\,d & b_1\,b_1' & a_{12}\,a_{13}\,a_{24} \\ & b_2'\,b_2 & a_{14} \\ & b_3\,b_3' & a_{34} \\ & b_4'\,b_4 & a_{23}. \end{array}$$

Wir haben also als Gruppe der Collineationen, welche F_4 ungeändert lassen:

$$1, \nabla, \nabla^2, \nabla^3, A, \nabla A, \nabla^2 A, \nabla^3 A.$$

Andere Collineationen kann diese Fläche nicht zulassen.

3. Die Fläche F_8 mit drei conischen Knoten.

§. 13. Sind $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ die Knoten $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ ihre Osculationskegel und $d = \overline{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}''}$, $d' = \overline{\mathfrak{c}''\,\mathfrak{c}}$, $d'' = \overline{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}}$ die drei quaternären Geraden, längs welcher F_8 von den Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ berührt wird, so enthalten diese noch je eine Gerade a, a', a'' von F_8. Die drei Geraden liegen in einer Ebene $\mathfrak{A}$ und treffen d, d', d'' je in $\alpha, \alpha', \alpha''$. Diese Punkte liegen in der Schnittlinie p von $\mathfrak{A}$ mit der Ebene $\mathfrak{B}$ der drei Knoten. Ausser diesen Geraden besitzt F_8 noch sechs binäre Gerade $b_1, b_2, b_1', b_2', b_1'', b_2''$, die paarweise durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ gehen. Es mögen einander $b_1\,b_1'$ in 1, $b_1\,b_2''$ in 2 schneiden. Diese Punkte liegen auf dem Kegelschnitte k^2, in welchem sich $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ schneiden, und der auch durch $\mathfrak{c}$ geht, seine Ebene heiße $\mathfrak{K}$. Analog mögen $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{K}''$ die Ebenen der Kegelschnitte k'^2 und k''^2 sein, in welchen sich $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}''$ resp. $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ schneiden.

Entsprechend den drei Punkten $\alpha, \alpha', \alpha''$ besitzt F_8 nach §. 8 drei centrale Collineationen A, A', A'', deren Collineationsebenen $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ sind, und zwei tricyclisch-planare Collineationen $\Pi = AA' = A'A'' = A''A$ und $\Pi^2 = A'A = AA'' = A''A'$.

Die Zuordnung der Geraden ist

für A)

$$\begin{array}{llllllll} d & a & d' & a' & b_1 & b_1' & b_2' \\ & & d'' & a'' & b_2 & b_1'' & b_2'' \end{array}$$

für A')

$$\begin{array}{llllllll} d' & a' & d & a & b_1 & b_2 & b_1' \\ & & d'' & a'' & b_2'' & b_1'' & b_2' \end{array}$$

für A'')

$$\begin{array}{llllllll} d'' & a'' & d & a & b_1 & b_2 & b_1'' \\ & & d' & a' & b_1' & b_2' & b_2'' \end{array}$$

Digitized by Google

daher für

$$\Pi = A\,A') \qquad \begin{matrix} d & a & b_1 & b_2 \\ d'' & a'' & b_1'' & b_2'' \\ d' & a' & b_2' & b_1' \end{matrix}.$$

Da für A die Ebene $\mathfrak{A}$ Collineationsebene ist und $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ einander entsprechen, so schneiden sich $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ in einer Geraden p' dieselbe ist Gegenaxe der Collineation Π, deren Axe die Gerade $p = \overline{a\,a'\,a''}$ ist, in welcher sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schneiden.

Da $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'', \mathfrak{E}'$, einander in Π entsprechen, so liegt ihr Schnittpunkt b auf p', seine Polarebene für die drei Kegel $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ ist $\mathfrak{B}$.

Als Invariante der Fläche dritter Ordnung F_3 kann man das Doppelverhältnis der vier Erzeugenden eines der drei Kegel definieren, welche auch auf F_3 liegen, denn es ist zufolge Π

$$(d''\,d'\,b_1\,b_2) = (d'\,d\,b_1''\,b_2'') = (d\,d''\,b_2'\,b_1').$$

§. 14. Jede Raumcollineation, welche F_3 ungeändert lässt, transformiert entweder die $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ cyclisch oder sie lässt einen Kegel, oder alle drei ungeändert. Da man in den ersten Fällen diese Collineation mit Π, Π^2, A, A', A'' so combinieren kann, dass die Kegel ungeändert bleiben, so genügt es, die Collineationen zu betrachten, welche alle drei Kegel festlassen.

Fügt man zu diesen die Collineationen die Gruppe 1, A, A', A'', Π, Π^2, so erhält man alle Collineationen überhaupt, welche F_3 ungeändert lassen.

Eine Collineation, welche $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ ebenso wie F_3 nicht ändert, besitzt alle Punkte von $\mathfrak{B}$ zu Coïncidenzpunkten, denn sowohl c, c', c'' als a, a', a'' sind solche.

Die Collineation ist daher eine centrale und b ist Collineationscentrum als Schnittpunkt von $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$.

Da $\mathfrak{C}$ sich selbst entsprechen muss, so ist die Collineation eine involutorische B mit b als Centrum und $\mathfrak{B}$ als Collineationsebene. Es müssen die binären Geraden b_1, b_2 einander entsprechen, daher geht die Ebene derselben durch b und schneidet $\mathfrak{E}$ in der unären Geraden a, die daher ebenso wie a' und a'' durch b gehen. Dieser ist also Tripelpunkt der Fläche.

Es folgt auch umgekehrt, geht die Fläche dritter Ordnung F_3 durch den Punkt b, so ist dieser für dieselbe ein Tripelpunkt und demselben entsprechend besitzt F_3 eine central-involutorische Collineation B.

Da die Erzeugenden b_1, b_2 von d', d'' harmonisch getrennt werden auf dem Kegel $\mathfrak{C}$, so folgt, dass

$$(d''\,d'\,b_1\,b_2) = (d'\,d\,b_1''\,b_2'') = d\,d''\,b_2'\,b_1') = -1$$

ist. Diese Fläche $F_3^{(1)}$ ist also projectivisch bestimmt, sie möge harmonische Fläche heißen.

Digitized by Google

Es ergibt sich aus der projectivischen Beziehung sofort die Anordnung der Geraden von $F_8^{(1)}$ zu Paaren, vermöge:

$$B) \qquad \begin{matrix} d\,d'\,d''\,a\,a'\,a''\,b_1\,b_1'\,b_1'' \\ b_2\,b_2'\,b_2''. \end{matrix}$$

§. 15. Die Collineation A, A', A'' daher auch Π und Π^2 sind mit B vertauschbar, wie leicht ersichtlich, daher besteht die ganze Gruppe der Collineationen, welche F_8 ungeändert lässt, aus folgenden 12 Operationen:

$$\begin{matrix} 1, A, & A', & A'', & \Pi = A\,A' & \Pi^2 = A'\,A \\ B, AB, & A'B, & A''B, & \Pi B, & \Pi^2 B. \end{matrix}$$

Die ersten sechs gehören jeder Fläche mit drei conischen Knoten zu, die letzten sechs auch noch der harmonischen $F_8^{(1)}$. Von diesen sind B central-involutorisch, $AB, A'B$ und $A''B$ geschart-involutorisch.

Die letzten zwei Collineationen $\Pi B, \Pi^2 B$ sind von der Periode sechs und da $(\Pi B)^2 = \Pi^2$ und $(\Pi B)^3 = B$ ist, ist dieselbe vom Charakter X.

Die Collineationsgruppe ist also identisch mit der G_{12} des §. 19 der I. Abtheilung.

Aus dem Gang der Untersuchung ergibt sich, dass andere Flächen dritter Ordnung mit drei conischen Knoten, welche Collineationen in sich zulassen, nicht existieren.

4. Die Fläche F_{16} mit vier conischen Knoten.

§. 16. Rücken die beiden binären Geraden b_1, b_2 der im §. 13 betrachteten Fläche F_8 zusammen, so tritt noch ein vierter Knoten $\mathfrak{c}'''$ auf, die Invariante nimmt den Wert $+1$ an, so dass je zwei Flächen F_{16} mit vier conischen Knoten durch Raumcollineationen in einander transformiert werden können.

Bezeichnet man die den Knoten $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}'', \mathfrak{c}'''$ gegenüber liegenden Ebenen des von ihnen gebildeten Tetraeders mit $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}'''$ und ist $\mathfrak{A}$ die Ebene, welche die drei unären Geraden a, b, c von F_{16} enthält, so ist F_{16} durch die fünf Ebenen vollständig bestimmt. Weist man also diese fünf Ebenen von F_{16} den entsprechenden fünf Ebenen einer anderen F'_{16} zu, so ist die Raumcollineation bestimmt, welche F_{16} in F'_{16} verwandelt.

Da man beim Festhalten von $\mathfrak{A}$ die Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}'''$ irgend einer andern Anordnung zuweisen, und dadurch eine Collineation festlegen kann, welche F_{16} in sich transformiert, so existiert eine Gruppe von $4! = 24$ Collineationen, welche F_{16} in sich transformiert. Diese Gruppe kann auch durch central-involutorische Collineationen erzeugt werden. Sind nämlich $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ die Schnittpunkte von a, b, c mit den Gegenkanten des Tetraeders

Digitized by Google

$\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}''\,\mathfrak{c}'''$, welche quaternäre Gerade von F_{16} sind, so folgt, wie im §. 8, dass diese Punkte Centren ebensovieler involutorischer Collineationen sind, welche F_{16} in sich verwandeln. Die Centren sind die Ecken des Vierseites, in welchem die Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}'''$ des Tetraeders die Ebene $\mathfrak{A}$ schneiden, wodurch die Gruppe G_{24} als dieselbe charakterisiert ist, wie sie im §. 17 der I. Abtheilung angegeben wurde.

II. Flächen mit biplanaren Knoten erster Art.

1. Die Fläche F_3 mit einem Biplanarknoten B_3.[1])

§. 17. Es seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Figur 5 die Ebenen des Biplanarknoten $\mathfrak{b}$, ihre Schnittlinie a, Axe des Knotens, liegt nicht auf F_3, und sie enthalten jede drei ternäre Gerade c_1, c_2, c_3 resp. c_1', c_2', c_3' die neun Ebenen $\mathfrak{E}_{ik}$ durch c_i und c_k' enthalten noch jede eine unäre Gerade a_{ik} von F_3.

Als Invarianten der Fläche F_3 können die beiden Doppelverhältnisse $(a\,c_1\,c_2\,c_3)$ und $(a\,c_1'\,c_2'\,c_3')$ definiert werden, und man zeigt, wie im §. 1, dass zwei Flächen F_3 mit gleichen Invarianten stets durch Raumcollineationen in einander überführbar sind und dass für eine F_3 noch 15 Constanten willkürlich wählbar sind, wenn die beiden Invarianten gegeben werden.

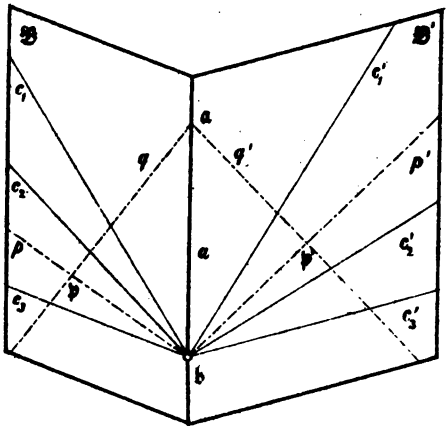


Fig. 5.

§ 18. Im Folgenden werden einige Sätze, die aus der Polarentheorie folgen, verwendet, und da es mir nicht möglich ist einen Literaturhinweis zu geben, will ich dieselben hier anführen.

[1]) Der Biplanarknoten, welcher die Classe der Fläche um ν-Einheit reduciert, wird mit B_ν bezeichnet. Vgl. etwa Rodenberg, Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. Math. Annalen Bd. 14, pag. 46.

Digitized by Google

Die quadratischen Polaren $P^2_{\mathfrak{x}'}$ der Punkte $\mathfrak{x}'$ der Ebene $\mathfrak{B}'$ bilden ein lineares Netz. Den Punkten des Strahles l' des Strahlenbüschel $(\mathfrak{b})'$ in der Ebene $\mathfrak{B}'$ entspricht ein Polarenbüschel, dessen Basiscurve in $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}$ liegt. Und zwar ist der in $\mathfrak{B}'$ liegende Theil die quadratische Polare von l' für das Strahlenbüschel c_1', c_2', c_3' und der in $\mathfrak{B}$ liegende Theil ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{l'}$, der a in $\mathfrak{b}$ berührt. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{l'}$ bilden einen Büschel, dessen zwei weitere Grundpunkte $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ auf der Geraden q liegen mögen. $\mathfrak{K}_{l'}$ ist bestimmt, durch seine Tangente a in $\mathfrak{b}$ und die drei Punkte $1_{l'}, 2_{l'}, 3_{l'}$, in welchen die Ebenen durch $l' c_1, l' c_2, l' c_3$ die F_3 berühren.

Ist p' die lineare Polare von a für das Strahlentripel c_1', c_2', c_3' in $\mathfrak{B}'$, so gehen die Polarflächen der Punkte von p' durch a, schneiden also $\mathfrak{B}$ noch in der Geraden q, welche mit a zusammen einen zerfallenen Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{K}_{l'}$ gibt.

In analoger Weise tritt in $\mathfrak{B}'$ ein Kegelschnittbüschel $\mathfrak{K}_l'$ auf entsprechend dem Strahlenbüschel $(\mathfrak{b})$ in $\mathfrak{B}$, und dem in a und q' zerfallenden Kegelschnitt, wird die lineare Polare p von a in Bezug auf c_1, c_2, c_3 zugeordnet sein.

Ist $\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt von p und q und $\mathfrak{p}'$ der von p' und q', so geht die gemischte Polare $\mathfrak{P}$ der Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ in Bezug auf F_3 durch q und q', diese Geraden treffen einander daher im Punkte $\mathfrak{a}$ der Axe a des Biplanarknoten.

Erwähnt sei, dass die quadratischen Polaren der Punkte von a ein Kegelbüschel bilden, dessen Basis die vier Strahlen $\overline{b\,c}, \overline{b\,\mathfrak{d}}, \overline{b\,c'}, \overline{b\,\mathfrak{d}'}$ sind. Dasselbe enthält noch zwei Ebenenpaare, deren Pole auf a durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ harmonisch getrennt sind, und welche Ecken des Pentaeders von F_3 sind. Die zugehörigen Axen der Ebenenpaare liegen in der Ebene $\mathfrak{A}$ durch p und p' und trennen diese Strahlen harmonisch.

§. 19. Soll die Fläche dritter Ordnung F_3 durch eine Raumcollineation in sich übergehen, so können entweder die Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ einander involutorisch entsprechen, oder sie können Coïncidenzebenen der Collineation sein.

Findet der erste Fall statt, so müssen die ternären Geraden c_1, c_2, c_3 von $\mathfrak{B}$ in die ternären Geraden von $\mathfrak{B}'$ übergehen. Es mögen c_1', c_2', c_3' die ihnen homologen Geraden in der Collineation Λ heißen. Dann muss $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = (a\,c_1'\,c_2'\,c_3')$ sein, d. h. die Ebenen $\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{22}, \mathfrak{E}_{33}$ gehören einem Büschel an, dessen Axe die F_3 noch in α treffen möge. In diesem Punkte schneiden sich daher a_{11}, a_{22}, a_{33}, er ist also ein Tripelpunkt. Es ist nun leicht zu sehen, dass in der central-involutorischen Collineation A, deren Centrum α ist, und für die $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ ein Paar homologer Ebenen sind, die Fläche F_3 sich selbst entspricht.

Digitized by Google

Mithin wird auch $A\,\Lambda$ die Fläche in sich transformieren, jedoch so, dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Coïncidenzebenen sind.

Kennt man also alle Flächen F_3, welche durch Raumcollineationen in sich transformierbar sind, so dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Coïncidenzebenen sind, so hat man für diese noch die centrale Collineation A hinzuzunehmen, so oft die beiden Invarianten der Fläche einander gleich werden.

Sind aber $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Coïncidenzebenen der Collineation, so muss diese sowohl die vier Strahlen a, c_1, c_2, c_3 als auch a, c_1', c_2', c_3' in sich transformieren derart, dass a Coïncidenzstrahl bleibt. Es müssen mithin die vier Strahlen entweder alle Coïncidenzstrahlen sein, oder das Quadrupel ist ein harmonisches oder äquianharmonisches.

Der Fall, dass alle acht Strahlen Coïncidenzstrahlen sind, gibt nur die Identität. Wir haben also folgende Möglichkeiten:

(1) $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = -1$, $(a\,c_1'\,c_2'\,c_3')$ willkürlich

(2) $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = -1$, $(a\,c_1'\,c_2'\,c_3') = -1$

(3) $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = \varepsilon$, $(a\,c_1'\,c_2'\,c_3')$ willkürlich

(4) $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = \varepsilon$, $(b\,c_1'\,c_2'\,c_3') = -1$

(5) $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = \varepsilon$, $(a\,c_1'\,c_2'\,c_3') = \varepsilon$ $(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0)$,

für welche wir der Reihe nach die Collineations-Gruppen aufstellen wollen. Der Fall $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = (a\,c_1'\,c_2'\,c_3')$ führt nur zur Collineation A.

§. 20. Ist $(a\,c_1\,c_2\,c_3) = -1$ so fällt die lineare Polare p Fig. 6 von a für c_1, c_2, c_3 mit c_1 zusammen. Die Gerade q' trifft c_1', c_2', c_3' in den drei Punkten $1_1', 2_2', 3_3'$, in welchen sie von den Geraden a_{11}, a_{12}, a_{13} geschnitten wird. Die Geraden $c_1 = p$ und q' bestimmen nun eine geschaart-involutorische Collineation τ, deren Axen sie sind, und in welcher $F_3^{(1)}$ sich selbst entspricht. Denn c_1, c_1', c_2', c_3' sind Coïncidenzstrahlen von τ und c_2, c_3 homologe Gerade.

Aber auch die Geraden a_{11}, a_{12}, a_{13} sind Coïncidenzgeraden von τ, daher fällt die zu $F_3^{(1)}$ in τ homologe Fläche mit ihr zusammen. Die Gruppierung der Geraden von $F_3^{(1)}$ zu Paaren ist die Folgende:

$\tau)$ $\quad c_1'\,c_2'\,c_3'\,c_1\,c_2\,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}$

$\qquad c_3\,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}.$

Die Fläche $F_3^{(1)}$ besitzt keinen Tripelpunkt und τ ist nicht durch centrale Collineationen, welche $F_3^{(1)}$ ungeändert lassen, erzeugbar.

Digitized by Google

§. 21. Ist $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = -1$ und $(a\, c_1'\, c_2'\, c_3') = -1$, so möge die Fläche harmonische Fläche $F_3^{(2)}$ heißen. Es tritt zu der eben erwähnten Collineation τ, deren Leitstrahlen $p = c_1$ und q' sind noch die analoge Collineation τ', deren Leitstrahlen $p' = c_1'$ und q sind.

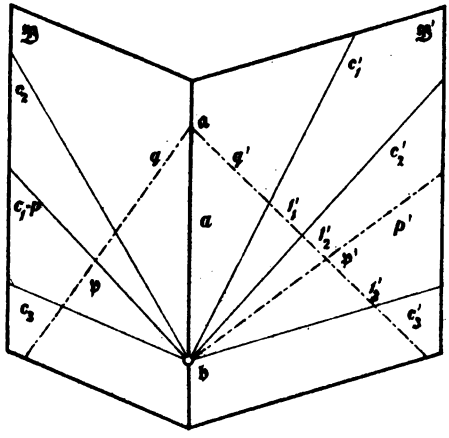


Fig. 6.

Die Paare für τ' sind dann

$\tau')$ $$c_1\, c_2\, c_3\, c_1'\, c_2'\, a_{12}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{11}\, a_{21}\, a_{31}$$ $$c_3'\, a_{13}\, a_{23}\, a_{33}.$$

Die Collineationen τ und τ' sind mit einander vertauschbar. Nach §. 19 tritt aber noch eine central-involutorische Collineation hinzu, welche $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ verwandelt, und zwar da $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = (a\, c_1'\, c_2'\, c_3')$ aber auch $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = (a\, c_1'\, c_3'\, c_2')$ ist, so existieren zwei solche Collineationen A und A' und sind die ihnen entsprechenden Paare:

$A)$ $$c_1\, c_2\, c_3\, a_{12}\, a_{13}\, a_{23}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$ $$c_1'\, c_2'\, c_3'\, a_{21}\, a_{31}\, a_{32}$$

$A')$ $$c_1\, c_2\, c_3\, a_{13}\, a_{12}\, a_{22}\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$ $$c_1'\, c_3'\, c_2'\, a_{21}\, a_{31}\, a_{33}.$$

Die Fläche besitzt zwei Tripelpunkte α, α' auf a_{11}, in denen sich a_{22}, a_{33} resp. a_{23}, a_{32} schneiden, und die Centren der Collineationen A resp. A' sind. Ihre Aufeinanderfolge $AA' = A'A = T$ ist eine geschaart-involutorische Collineation, deren Paare sind:

$T = AA')$ $$a_{11}\, c_1\, c_1'\, c_2\, c_2'\, a_{12}\, a_{21}\, a_{23}\, a_{22}$$ $$c_3\, c_3'\, a_{13}\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}.$$

Digitized by Google

Es zeigt sich sofort, dass $\tau\tau' T = 1$ daher $A\tau = A'\tau'$ ist. Ebenso folgt

$$A\tau = \tau' A \qquad A'\tau = \tau' A'$$

voraus auch

$$A\tau' = \tau A \qquad A'\tau' = \tau A'$$

sich ergibt.

Da die Collineationen $1, A, A', \tau, \tau'$ die $F_3^{(2)}$ nicht ändern, so wird auch die durch dieselbe erzeugte Gruppe $F_3^{(2)}$ in sich transformieren. Jedes Product der vier Symbole A, A', τ, τ' stellt das Symbol einer solchen Collineation dar. Bei der Bildung der Producte kann man zufolge der obigen Relationen die Operationen τ und τ' immer an die erste Stelle bringen und da $\tau\tau' = \tau'\tau = T$ ist, reducieren sich die Producte auf solche, die bloß die Factoren $1, \tau, \tau'$ oder $\tau\tau'$ an erster Stelle enthalten, wodurch man zu den folgenden Symbolen gelangt:

$1,$	$A,$	$A',$	$AA' = A'A = T$
$\tau,$	$\tau A,$	$\tau A',$	$\tau T = \tau'$
$\tau',$	$\tau' A = \tau A',$	$\tau' A' = \tau A,$	$\tau' T = \tau$
$\tau\tau' = T,$	$\tau\tau' A = A',$	$\tau\tau' A' = A,$	$\tau\tau' T = 1.$

Folglich sind blos die acht Operationen: $1, A, A', T, \tau, \tau A, \tau A', \tau'$, von einander verschieden und erschöpfen die Gruppe, welche $F_3^{(2)}$ in sich transformiert. Von diesen Operationen ist $\tau A = \Delta$ eine quaternäre Collineation, deren Quadrat

$$\Delta^2 = \tau A . \tau A = \tau\tau' AA = T$$

die geschaarte Collineation mit den Leitstrahlen a_{11} und a ist. Man kann daher die Gruppe der Collineationen, welche $F_3^{(2)}$ ungeändert lassen, darstellen durch

$$1, \Delta, \Delta^2, \Delta^3, A, A\Delta, A\Delta^2, A\Delta^3$$

oder durch

$$1, \Delta, \Delta^2, \Delta^3, A', A'\Delta, A'\Delta^2, A'\Delta^3.$$

§. 22. Ist für die Fläche $F_3^{(3)}$ die Invariante $(a c_1' c_2' c_3')$ willkürlich, während $(a c_1 c_2 c_3) = \varepsilon$, $(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0)$ ist; so fällt die quadratische Polare von a in Bezug auf das Strahlentripel c_1, c_2, c_3 mit der linearen Polare p Fig. 7 zusammen, und die in §. 18 definierten Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{c'}$ berühren auch q im Schnittpunkte $\mathfrak{p}$ von p. Bezeichnet man, wie früher den Schnittpunkt von a_{ik} mit $\mathfrak{B}$ mit i_k, den mit $\mathfrak{B}'$ mit i_k', so liegen

$1_1, 2_1, 3_1$ auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{c_1'}$
$1_2, 2_2, 3_2$ „ „ „ $\mathfrak{K}_{c_2'}$ und
$1_3, 2_3, 3_3$ „ „ „ $\mathfrak{K}_{c_3'}$

Digitized by Google

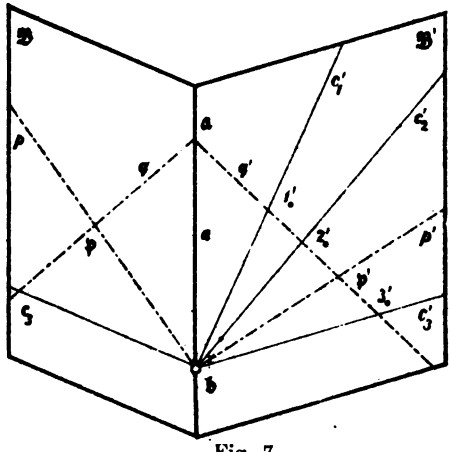


Fig. 7.

derart, dass sie je ein Tripel einer tricyclische Projectivität auf dem Kegelschnitte darstellen, deren Deckpunkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}$ sind. Sie werden nämlich aus $\mathfrak{b}$ durch die Strahlen c_1, c_2, c_3 projiciert. Bezeichnet man mit $1'_0, 2'_0, 3'_0$ die Schnittpunkte von q' mit c'_1, c'_2, c'_3 so bilden die Punkte $1'_1, 2'_1, 3'_1$ ein Tripel einer tricyclischen Projectivität auf c'_1, deren Deckpunkte $\mathfrak{b}$ und $1'_0$ sind. Denn im Ebenenbüschel (c'_1) bilden $\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{21}, \mathfrak{E}_{31}$ ein Tripel von Ebenen der tricyclischen Projectivität, deren Deckebenen $\mathfrak{B}'$ und die Ebene durch c'_1 und p ist, wie aus dem Schnitte dieses Büschels mit $\mathfrak{B}$ folgt. Die obigen Punkte sind aber die Berührungspunkte der genannten Ebene auf c'_1. Aus demselben Grunde folgt, dass

$1'_2, 2'_2, 3'_2$ ein Tripel und $\mathfrak{b}, 2'_0$ die Deckpunkte
$1'_3, 2'_3, 3'_3$ „ „ „ $\mathfrak{b}, 3'_0$ „ „ „

je einer tricyclischen Projectivität auf c'_2 resp. c'_3 bilden.

Wird p als Axe, q' als Gegenaxe einer tricyclisch-planaren Collineation π angenommen, deren Deckebenen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{P}$ (die Ebene durch q' und $\mathfrak{p}$) sind, so entspricht sich $F_3^{(3)}$ in dieser Collineation selbst.

Man erkennt leicht, dass

$$1'_1, 2'_1, 3'_1;\quad 1'_2, 2'_2, 3'_2;\quad 1'_3, 2'_3, 3'_3$$

ebenso

$$1_1, 2_1, 3_1;\quad 1_2, 2_2, 3_2;\quad 1_3, 3_3, 3_3$$

je ein Tripel homologer Punkte der Collineation π darstellen.

Digitized by Google

Die Geraden, welche die unter einander stehenden Punkte verbinden, bilden daher ein Tripel homologer Geraden von π, das sind aber die Geraden

$$a_{11}, a_{21}, a_{31}; \quad a_{12}, a_{22}, a_{32}; \quad a_{13}, a_{23}, a_{33}.$$

Die Geraden c_1', c_2', c_3', welche die drei Tripel der ersten Zeile tragen, sind Coïncidenzgeraden von π und c_1, c_2, c_3, welche je einen Punkt der Tripel der zweiten Zeile tragen, bilden wieder ein Tripel von π. Hieraus folgt die obige Behauptung.

Wir haben also folgendes Schema für

$\pi)$
$$\begin{matrix} c_1' & c_2' & c_3' \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{matrix}$$

Die Curve $\mathfrak{P}^3$, in welcher $\mathfrak{P}$ die $F_3^{(3)}$ schneidet, entspricht sich in π selbst und da sie p nicht schneidet muss sie äquianharmonisch sein mit drei Wendepunkten auf q'. Dass $1_0', 2_0', 3_0'$ thatsächlich Wendepunkte von $\mathfrak{P}^3$ sind, deren Tangenten sich in $\mathfrak{p}$ schneiden, folgt daraus, dass die quadratische Polare von $\mathfrak{p}$ für $F_3^{(3)}$ durch q' geht und seine lineare Polare die Ebene $\mathfrak{B}'$ ist.

Außer $1, \pi, \pi^2$ besitzt $F_3^{(3)}$ keine Collineationen, die sie ungeändert lassen.

§. 23. Für $F_3^{(4)}$ sei $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = \varepsilon$ und $(a\, c_1'\, c_2'\, c_3') = -1$. Dann besitzt $F_3^{(4)}$ nach §. 22 eine Collineation π und nach §. 20 die Collineation τ' des §. 21 in sich, also auch die ganze Gruppe von Collineationen, welche diese beiden erzeugen. Man findet nun leicht, dass $\tau' \pi = \xi$ eine senäre Collineation ist, so zwar dass $\xi^2 = \pi$ und $\xi^3 = \tau'$ ist, denn τ' lässt sowohl p als $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{P}$ ungeändert, ist also mit π vertauschbar.

Die Gruppe von Collineationen, welche $F_3^{(4)}$ ungeändert lässt, ist daher die cyclische Gruppe:

$$1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5.$$

§. 24. Ist für $F_3^{(5)}$ sowohl $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = \varepsilon$ als $(a\, c_1'\, c_2'\, c_3') = \varepsilon$, so möge sie äquianharmonische Fläche heißen. Für dieselbe tritt zu der Collineantion π des §. 22 noch die analoge Collineation π' mit der Axe p' und Gegenaxe q Fig. 8 auf, für welche die Tripel nachstehend sich ergeben:

$\pi')$
$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_1' \\ c_2' & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ c_3' & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ & a_{13} & a_{23} & a_{33}. \end{matrix}$$

Digitized by Google

Nach §. 19 treten zu π und π' noch weitere drei centralinvolutorische Collineationen hinzu. Und zwar

da $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = (a\, c_1'\, c_2'\, c_3')$ ist die Collineation A
„ $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = (a\, c_2'\, c_3'\, c_1')$ „ „ „ B
und da $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = (a\, c_3'\, c_1'\, c_2')$ „ „ „ Γ.

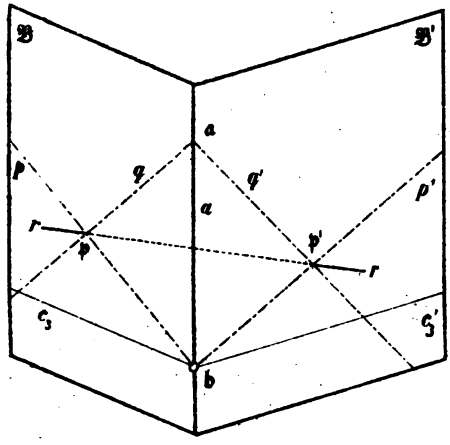


Fig. 8.

Denselben gehören als Centren die Tripelpunkte α, β, γ einer Geraden r zu. Die Anordnung der Flächengeraden zu Paaren liefern die nachstehenden Schemata:

$A)$ $\begin{matrix} c_1\, c_2\, c_3\, a_{12}\, a_{13}\, a_{23}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \\ c_1\, c_2\, c_3\, a_{21}\, a_{31}\, a_{32} \end{matrix}$

$B)$ $\begin{matrix} c_1\, c_2\, c_3\, a_{13}\, a_{11}\, a_{21}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\ c_2\, c_3\, c_1\, a_{22}\, a_{32}\, a_{33} \end{matrix}$

$\Gamma)$ $\begin{matrix} c_1\, c_2\, c_3\, a_{11}\, a_{12}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\ c_3\, c_1\, c_2\, a_{23}\, a_{33}\, a_{31} \end{matrix}$

Die letzten drei Geraden sind die je im Tripelpunkte sich schneidenden Flächengeraden, ihre Ebenen gehen sämmtlich durch a, dem Schnittpunkte von q und q', da sie sich in π und π' entsprechen.

Es treten ferner $\Pi = AB$ und $\Pi^2 = BA$ als tricyclisch-planare Collineation hinzu, deren Axe r und Gegenaxe a ist. Da in jeder der drei Collineationen A, B, Γ die Geraden p und p' ebenso wie q und q' Figur 8 einander entsprechen müssen, so geht r durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$.

Digitized by Google

Die $F_3^{(5)}$ bleibt durch die Collineationen π, π', A, B, Γ ungeändert, also auch durch die von ihnen erzeugte Gruppe.

§. 25. Betrachten wir vorrerst die durch π und π' allein erzeugte Gruppe. Man erkennt sofort, dass π und π' gegeneinander vertauschbar sind, da π' sowohl die Ebene $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{P}$ als auch die Axe p' ungeändert lässt. Es hat daher die Gruppe, welche π und π' erzeugt, nur die folgenden neun Collineationen:

$$(G_9) \qquad \begin{matrix} 1 & \pi & \pi^2 \\ \pi' & \pi'\pi & \pi'\pi^2 \\ \pi'^2 & \pi'^2\pi & \pi'^2\pi^2. \end{matrix}$$

Von diesen ist $\pi'\pi^2 = \Pi = AB$ und $\pi'^2\pi = \Pi^2 = BA$, wie man sich leicht überzeugt aus den für π, π' resp. A und B aufgestellten Schematen.

Die Collineation $\pi\,\pi' = \varphi$ ist eine tricyclisch-centrale, denn ihr zu Folge ordnen sich die Geraden der Fläche in folgende Tripel:

$$\varphi = \pi\,\pi') \qquad \begin{matrix} c_1 & c_1' & a_{11} & a_{12} & a_{21} \\ c_2 & c_2' & a_{22} & a_{23} & a_{32} \\ c_3 & c_3' & a_{33} & a_{31} & a_{13} \end{matrix}$$

d. h. die drei Geraden, welche sich je in einem der Punkte α, β, γ schneiden, bilden ein Tripel homologer Geraden für φ, also sind α, β, γ Coïncidenzpunkte von φ. Desgleichen sind auch die Punkte von p und p' Coïncidenzpunkte, daher ist die Ebene $\mathfrak{A}$ der Geraden p, p', r Collineationsebene und der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ der Ebenen der drei Tripel unärer Geraden Collineationscentrum von φ. Die Ebene $\mathfrak{A}$ schneidet $F_3^{(5)}$ in einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt in $\mathfrak{b}$, längs welcher sie von einem Kegel mit der Spitze in $\mathfrak{a}$ osculiert wird.

§. 26. Nimmt man zu dieser Gruppe von neun Collineationen noch die drei central-involutorischen A, B, Γ, so erhält man durch ihre Combinationen die ganze Gruppe, welche $F_3^{(5)}$ ungeändert lässt. Bildet man alle möglichen Producte aus den Symbolen $A, B, \Gamma\ \pi, \pi'$, so erhält man offenbar die Symbole aller möglichen Collineationen, welche $F_6^{(5)}$ ungeändert lassen. Es finden aber folgende Relationen statt:

$$\begin{matrix} \pi A = B\pi & \pi' A = \Gamma\pi' \\ \pi B = \Gamma\pi & \pi'\Gamma = B\pi' \\ \pi\Gamma = A\pi & \pi' B = A\pi', \end{matrix}$$

welche es ermöglichen, in jedem Producte die Symbole A, B, Γ an

Digitized by Google

die ersten Stellen links zu bringen, so dass, wenn Z ein Product, in dem nur π und π' auftreten, bedeutet, jedes der möglichen Producte sich auf eines der folgenden reducieren muss:

$$Z,\ AZ,\ BZ,\ \Gamma Z,\ ABZ,\ BAZ.$$

Da aber $AB = \Pi = \pi'\pi^2$ ist, so treten die zwei letzten schon unter Z auf, und es erübrigen bloß die Producte von der Form

$$Z,\ AZ,\ BZ,\ \Gamma Z.$$

Da die Collineationen A, B, Γ sämmtlich sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{a}$ festlassen, so sind sie mit der central-ternären Collineation φ vertauschbar und es sind daher $\psi_\alpha = A\varphi = \varphi A$; $\psi_\beta = B\varphi = \varphi B$ und $\psi_\gamma = \Gamma\varphi = \varphi\Gamma$ drei senäre Collineationen, deren Quadrate sämmtlich φ^2 darstellen, und deren dritte Potenzen die centralen Collineationen A, B, Γ sind.

Mit Hilfe der im §. 26 angegebenen Relationen findet man nun sofort, dass $A\pi = \psi_\beta^5$ ist, indem

$$\psi_\beta^5 = B\varphi^2 = B\pi'^2\pi^2 = B\Pi^2\pi = A\pi$$

folgt. Analoge Beziehungen ergeben sich für $A\pi'$, $A\pi^2$, $A\pi'^2$, $A\pi$,... Es treten mithin als wirklich verschiedene senäre Collineationen nur die drei $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma$ und ihre fünften Potenzen auf.

Die Producte $A\pi'\pi^2$, $A\pi'^2\pi$ und analog für B und Γ stellen aber wegen $\pi'\pi^2 = AB$ wieder nur die Collineationen A, B, Γ dar.

Es bleiben also unter den Symbolen der Form AZ, BZ, ΓZ nur sechs übrig, welche verschiedene Collineationen darstellen, die in G_9 nicht auftreten und von A, B, Γ verschieden sind. Infolge dessen besteht die ganze Gruppe, welche $F_3^{(5)}$ in sich transformiert aus 18 Collineationen:

3 central-involutorischen A, B, Γ

2×3 planar-tricyclischen $\pi, \pi^2, \pi', \pi'^2, \Pi, \Pi^2$

2 central-tricyclischen $\varphi = \pi\pi'$, $\varphi^2 = \pi^2\pi'^2$

2×3 senären $\psi_\alpha, \psi_\alpha^5, \psi_\beta, \psi_\beta^5, \psi_\gamma, \psi_\gamma^5$, deren Quadrate die centrale Collineation φ und deren dritte Potenzen die centralen Collineationen A, B, Γ sind, wozu noch die Identität kommt.

Die Gruppen kann dargestellt werden durch G_9, AG_9 oder G_9, BG_9 oder G_9, ΓG_9 wenn G_9 die Gesammtheit der im §. 25 definierten Collineationen ist.

Auch $\psi_\alpha^n, B\psi_\alpha^n, \Gamma\psi_\alpha^n$

oder $\psi_\beta^n, A\psi_\beta^n, \Gamma\psi_\alpha^n$

oder $\psi_\gamma^n, A\psi_\gamma^n, B\psi_\gamma^n,$ $(n = 0, 1, \ldots, 5)$

stellen die 18 Operationen der Gruppe dar.

G_9 ist die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe von G_{18}.

Digitized by Google

2. Die Fläche F_6 mit einem Biplanarknoten B_3 und einem conischen Knoten.

§. 27. Liegt der conische Knoten $\mathfrak{c}'$ in $\mathfrak{B}'$ und ist $\mathfrak{C}'$ sein Osculationskegel, so berührt derselbe $\mathfrak{B}'$ längs der Geraden $f' = \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}'}$, welche für F_6 sechsfach zählt.

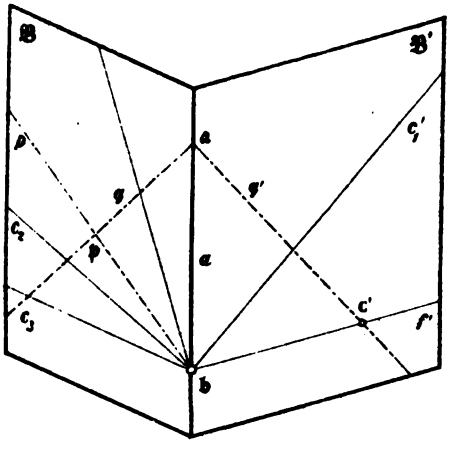


Fig. 9.

Soll eine Collineation die Fläche in sich überführen, so kann das nur so geschehen, dass sowohl $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{B}'$ erhalten bleiben. Infolge dessen muss die einzige Invariante $(a\, c_1\, c_2\, c_3)$ entweder den Wert -1 oder ε haben.

Ist $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = -1$, fällt also p mit c_1 zusammen, so existiert eine geschaarte involutorische Collineation τ, deren Leitgeraden c_1 und q' sind, welche F_6 in sich überführt.

Für die Fläche mit der Invariante $(a\, c_1\, c_2\, c_3) = \varepsilon$ tritt eine ternär-planare Collineation π auf, deren Axe p und Gegenaxe q' ist. Die durch letztere gehenden Deckebenen sind $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{P}$, welches $\mathfrak{C}$ längs der Erzeugenden $\overline{\mathfrak{p}'\mathfrak{c}'}$ berührt.

3. Die Fläche F_{13} mit einem Biplanarknoten B_3 und zwei conischen Knoten.

§. 28. Die Fläche F_{13} besitzt keine Invariante, alle Flächen sind in eine durch Collineation überführbar.

Die conischen Knoten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$, welche in den Ebenen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ des Biplanarknotens liegen, geben in der Verbindungsgeraden $d = \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'}$ eine quaternäre Gerade von F_{13} und die längs derselben F_{13} berührende Ebene enthält noch eine unäre Gerade a von F_{13}, deren Schnittpunkt α mit d nach §. 8 pag. 314 Centrum einer in-

Digitized by Google

volutorischen Collineation A ist, welche F_{13} in sich transformiert, so dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ einander involutorisch entsprechen. Andere Collineationen lässt F_{13} nicht zu.

4. Die Fläche F_9 mit zwei Biplanarknoten B_3 und B_3'.

§. 29. Die beiden Biplanarknoten gemeinschaftliche Ebene $\mathfrak{B}$ enthält die neunfach auf F_9 zählende Gerade j, längs welcher

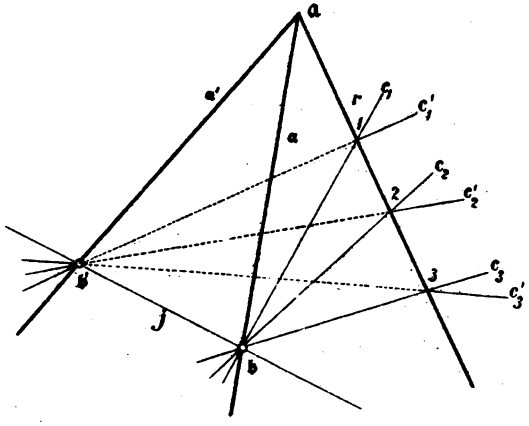


Fig. 10.

sie F_9 in zweiter Ordnung berührt. In der zweiten Biplanarebene $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{b}$ liegen die ternären Geraden c_1, c_2, e_3, welche von den drei ternären Geraden c_1', c_2', c_3' des Biplanarknotens $\mathfrak{b}'$ in 1, 2, 3 geschnitten werden. Diese Punkte liegen Figur 10 auf der Schnittlinie r der Ebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}'$ und werden aus j durch die Ebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ projiciert. $\mathfrak{a}$ sei der Schnittpunkt von r und der beiden Axen a, a' der Knoten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$.

Durch die sieben Geraden j, c_i und c_i' und die Wendeebene $\mathfrak{B}$ ist F_9 nicht bestimmt, man kann noch einen Punkt im Raume annehmen, durch den sie gehen soll, damit die Fläche festgelegt wird.

§. 30. Soll eine Raumcollineation F_9 ungeändert lassen, so muss sie vor allem die sieben Geraden j, c_i, c_i' in sich überführen und die Wendeebene $\mathfrak{B}$ zur Coïncidenzebene haben.

Da im allgemeinen der Büschel der vier Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ keine Collineation in sich zulässt, so dass $\mathfrak{B}$ erhalten bleibt, so sind alle Ebenen des Büschels (j) Coïncidenzebenen der möglichen Collineationen. Die Ebene $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}'$ können entweder auch Coïncidenzebenen sein, oder sie entsprechen einander involutorisch.

Digitized by Google

1. Sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}'$ Coïncidenzebenen der Collineationen R, so sind diese noch nicht bestimmt, man kann einem Raumpunkte $\mathfrak{x}$ noch einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{x}'$ der Ebene $\overline{j\,\mathfrak{x}}$ zuweisen. Soll die Collineation R überdies F_9 in sich überführen, so kann man einem Punkte $\mathfrak{x}$ von F_9 einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{x}'$ des Kegelschnittes x^2 zuweisen, denn die Ebene $\overline{j\,\mathfrak{x}}$ aus F_9 ausschneidet. Es gibt daher einfach unendlich viele Collineationen, dieser Art R, sie bilden eine (continuierliche) Gruppe, denn je zwei hinter einander ausgeführt, geben wieder eine Collineation derselben Art.

2. Sollen durch die Collineationen $\mathfrak{S}$ die Ebenen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}'$ in einander übergehen, so müssen dieselben central-involutorische Collineationen sein, deren Centren $\mathfrak{s}$ auf j liegen. Auch für diese kann man einem Punkte $\mathfrak{x}$ von F_9 einen Punkt $\mathfrak{x}'$ zuweisen, der auf dem Kegelschnitte x^2 der Ebene $\overline{j\,x}$ liegt. Der Schnittpunkt von j mit $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'$ ist das Collineationscentrum $\mathfrak{s}$ der Collineation $\mathfrak{S}$, deren Ebene durch r geht und von $\mathfrak{s}$ durch $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}'$ harmonisch getrennt. ist. Auch dieser Collineationen $\mathfrak{S}$ gibt es einfach unendlich viele, jeder Punkt von j kann Centrum einer solchen sein. Sie bilden aber für sich allein keine Gruppe, denn zwei derselben $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ geben, nach einander ausgeführt, eine Collineation R. Man erhält also die sämmtlichen Collineationen $\mathfrak{S}$, wenn man sämmtliche Collineationen R mit einer Collineation $\mathfrak{S}_1$ combiniert. Symbolisch $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 R$. Die Collineationen R und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 R$ zusammen genommen bilden eine einfach unendliche Gruppe von Collineationen, in welcher R die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe ist.

Je zwei Collineationen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}'_1$, deren Centren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}'_1$ von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ harmonisch getrennt werden, sind mit einander vertauschbar und $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}'_1 \mathfrak{S}_1 = \tau$ ist die geschart-involutorische Collineation, deren Leitstrahlen j und r sind.

Die Fläche F_9 hängt bloß von 15 Constanten ab, da sie aber einfach unendlich viele Transformationen in sich zulässt, besitzt sie doch eine Invariante, als welche sofort das Doppelverhältnis der vier Ebenen $(\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3) = (\mathfrak{a}\,1\,2\,3)$ erkannt wird.

Transformiert man die Fläche mittels einer Raumcollineation so, dass $\mathfrak{B}$ die unendlich ferne Ebene des Raumes, a, a' Tangenten des imaginären Kugelkreises und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ ihre Berührungspunkte sind, so wird F_9 zur Rotationsfläche dritter Ordnung. Die Collineationen R sind Rotationen und die Axe r und $\mathfrak{S}$ sind Spiegelungen in Bezug auf irgend eine Ebene durch r. Die Invariante ist das Verhältnis der zwei Strecken, welche die Schnittpunkte von F_9 auf r bestimmen.

§. 31. Soll F_9 außer den eben genannten Collineationen noch andere zulassen, so muss das Punktquadrupel $\mathfrak{a}\,1\,2\,3$ eine Transformation in sich znlassen, derart, dass $\mathfrak{a}$ festbleibt, das heißt, es ist $(\mathfrak{a}\,1\,2\,3)$ entweder $= -1$ oder $= \varepsilon$ $(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0)$.

Digitized by Google

Ist $(\mathfrak{a}\,1\,2\,3) = -1$, so ist eine quadratische Involution im Büschel (j) festgelegt, für welche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}_1$ Deckebenen sind und $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ ein Paar homologer Ebenen. Sind nun $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ irgend ein Paar homologer Ebenen dieser Involution und weist man einem Punkte $\mathfrak{x}$ des Kegelschnittes x^2 von F_9 in $\mathfrak{E}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}'$ des Kegelschnittes x'^2 der Ebene $\mathfrak{E}'$ zu, so ist nach §. 30, 1. eine Collineation $\mathfrak{T}$ bestimmt, welche F_9 derart in sich überführt, dass c_1 und c_1' erhalten bleiben, während c_2 in c_3 und c_2' in c_3' übergeht.

Solcher Collineationen $\mathfrak{T}$ gibt es daher wieder einfach unendlich viele und sie bilden eine continuierliche Gruppe. Man erhält sie alle, wenn man eine bestimmte $\mathfrak{T}_0$ mit allen Collineationen R zusammensetzt. Als $\mathfrak{T}_0$ kann man eine der beiden geschart-involutorischen Collineationen nehmen mit den Leitstrahlen c_1 und a' oder c_1' und a.

Ist $(\mathfrak{a}\,1\,2\,3) = \varepsilon\,(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0)$, so ist im Büschel (j) eine tricyclische Projectivität festgelegt, deren Deckebenen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ sind, in welcher $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ einen Cyclus bilden. Sind $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ irgend drei Ebenen eines Cyclus, und weist man dem Punkte $\mathfrak{x}$ von F_9 und $\mathfrak{E}$ einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{x}'$ von F_9 und $\mathfrak{E}'$ zu, so wird nach §. 30, 1. eine Collineation $\mathfrak{U}$ bestimmt, in welcher homologe Punkte stets durch die drei Ebenen eines Tripels aus j projiciert werden, und in der c_1, c_2, c_3 ebenso c_1', c_2', c_3' homologe Gerade sind.

Alle Collineationen $\mathfrak{U}$ werden erhalten, wenn man eine derselben $\mathfrak{U}_0$ mit allen Collineation R zusammensetzt. Als $\mathfrak{U}_0$ kann man die central-tricyclische wählen, deren Centrum $\mathfrak{a}$ und deren Collineationsebene $\mathfrak{A}$ ist.

Anmerkung. Die Fläche F_{17} mit zwei Biplanarknoten $\mathfrak{B}$ erster Art und einem conischen Knoten, sowie die Fläche mit drei Biplanarknoten besitzen keine Invariante und lassen stets continuierliche Gruppen von Collineationen in sich zu.

III. Flächen mit biplanaren Knoten zweiter Art.

§. 32. Die Schnittlinie f der Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ des Biplanarknotens $\mathfrak{b}$ Figur 11 liegt auf der Fläche F_5 und längs derselben berührt eine Eben $\mathfrak{E}$ die F_5. Diese Ebene enthält noch eine unäre Gerade a von F_5, welche die sechsfach zählende Gerade f in α schneiden möge. In jeder der Ebenen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ liegen zwei quaternäre Gerade d_1, d_2 resp. d_1', d_2'. Die vier Ebenen $\mathfrak{E}_{ik}$ durch $d_i\, d_k'$ enthalten noch je eine unäre Gerade a_{ik}. Es schneiden einander a_{11}, a_{22} und a_{12}, a_{21}.

Die Fläche lässt eine central-involutorische Collineation A in sich zu, deren Centrum α und deren Ebene $\mathfrak{A}$ ist. Letztere bestimmt sich als die Ebene, welche durch die Schnittlinien s von

Digitized by Google

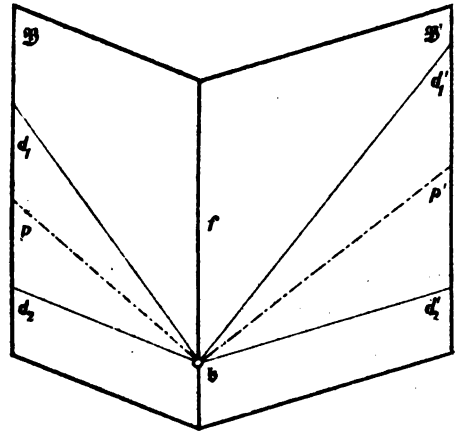


Fig. 11.

$\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{22}$ und t von $\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{12}$ geht. Sie möge $\mathfrak{B}$ in p und $\mathfrak{B}'$ in p' schneiden. Dann ist offenbar $(f\,p\,d_1\,d_2) = -1$ ebenso $(f\,p'\,d_1'\,d_2') = -1$ und $(p\,p'\,s\,t) = -1$. Die Tangentialebene von F_9 längs f möge $\mathfrak{A}$ in der Geraden g schneiden, dann kann das Doppelverhältnis der vier Strahlen $(p\,p'\,g\,s)$ oder $(p\,p'\,g\,t) = \dfrac{-1}{(p\,p'\,g\,s)}$ als Invariante der Fläche definiert werden.

Sollen die Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ für eine Collineation Coïncidenzebenen sein, so ist diese nothwendig die obige Collineation A, vermöge welcher sich entsprechen

A)
$$\begin{matrix} f\,a\,d_1\,d_1'\,a_{11}\,a_{12} \\ d_2\,d_2'\,a_{22}\,a_{21}. \end{matrix}$$

Sollen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ einander involutorisch entsprechen können, so muss $(p\,p'\,g\,s) = -1$ also $(p\,p'\,g\,t) = +1$ sein, d. h. die Ebene $\mathfrak{E}$ muss durch den Schnittpunkt t der Ebene $\mathfrak{E}_{12}$ und $\mathfrak{E}_{21}$ gehen, der Schnittpunkt a' der Geraden a_{12} und a_{21} liegt daher auf a, dieser ist mithin ein Tripelpunkt. Diesem entsprechend tritt daher noch eine centrale Collineation A' auf, deren Paare

A')
$$\begin{matrix} f\,a\,d_1\,d_2\,a_{11}\,a_{12}\,a_{21} \\ d_2'\,d_1'\,a_{22} \end{matrix}$$

sind.

Die Collineationen A und A' liefern die gescharte Collineation $A\,A' = A'\,A = T$, deren Leitgeraden a und s sind, ihre Paare ergeben sich leicht:

$AA' = T$)
$$\begin{matrix} f\,a\,d_1\,d_2\,a_{12}\,a_{11}\,a_{22} \\ d_1'\,d_2'\,a_{21}. \end{matrix}$$

Digitized by Google

Diese Fläche ist projectivisch bestimmt und lässt sonst keine Collineation in sich zu.

§. 33. Hat die Fläche mit dem Biplanarenknoten zweiter Art in $\mathfrak{b}$ noch einen conischen Knoten $\mathfrak{c}'$ in der Ebene $\mathfrak{B}'$, so fallen d_1' und d_2' in die achtfach zählende Gerade h', die $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{c}'$ verbindet. Durch $\mathfrak{c}'$ gehen die zwei binären Geraden b_1, b_2, welche d_1 resp. d_2 schneiden und mit α in einer Ebene liegen.

Die Fläche hat 15 willkürliche Bestimmungsstücke und besitzt keine Invariante. Die Collineation A mit dem Centrum α auf a und f transformiert die Fläche in sich. Sonst existiert keine Collineation, welche F_{10} in sich überführt. Denn für eine solche müssten $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{E}$ und die Ebene durch b_1 b_2 Coïncidenzebenen, daher ihr Schnittpunkt α Scheitel eines Coïncidenzbündels sein; die Collineation also eine centrale mit α als Centrum. Sie muss dann involutorisch sein.

Die Fläche F_{13} mit einem Biplanarknoten zweiter Art und zwei conischen Knoten hängt bloß von 14 Constanten ab.

§. 34. Die Fläche F_7 hat einen Biplanarknoten zweiter Art, wird aber von der Ebene $\mathfrak{B}'$ längs der zehnfach zählenden

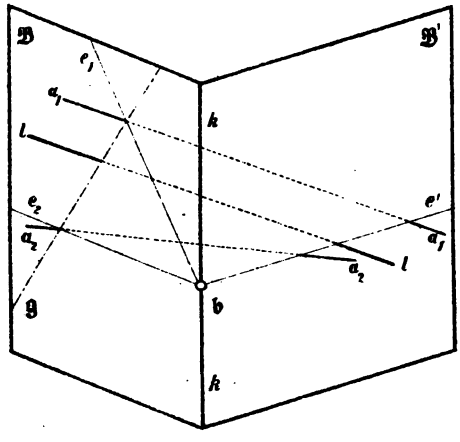


Fig. 12.

Axe k des Knotens berührt. In $\mathfrak{B}$ (Figur 12) liegen noch zwei fünffach zählende Geraden e_1 e_2, in $\mathfrak{B}'$ die einzige quinäre Gerade e'.

In den Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ durch e_1 e' sesp. e_2 e' liegt je eine unäre Gerade a_1, a_2. Die Fläche hat keine Invariante und hängt von 15 Constanten ab.

Soll eine Collineation die F_7 ungeändert lassen, so müssen für dieselbe $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Coïncidenzebenen sein. Die Geraden a_1 und a_2 müssen entweder jede mit ihrer entsprechenden coïncidieren, oder sie müssen sich involutorisch entsprechen.

Digitized by Google

Sind a_1 und a_2 Coïncidenzgeraden der Collineation, so ist diese, da auch k eine Coïncidenzgerade ist,[1]) eine geschaarte T, deren Leitstrahlen e' und g sind, wenn letztere Gerade die Durchstoßpunkte von a_1, a_2 mit $\mathfrak{B}$ trägt.

Sollen einander a_1 und a_2 involutorisch entsprechen, dann wird die Gerade l, welche k von a_1, a_2 harmonisch trennt auf dem Hyperboloid durch k, a_1, a_2, auch eine Coïncidenzgerade der Collineationen sein. Es sind mithin die Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \overline{g\,l}$ und $\overline{e'\,l}$ Coïncidenzebenen der Collineationen.

Jedes der Hyperboloide durch k, l, e', g enthält einander involutorisch entsprechende Gerade t, t' welche k und l harmonisch trennen. Um eine der Collineationen festzulegen kann man noch einem Punkte von t einen beliebigen Punkt von t' zuweisen.

Die Geraden t, welche e' und g schneiden, treffen F_7 in Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ so, dass diese von e' und g harmonisch getrennt werden. Weist man nun dem Punkte $\mathfrak{x}$ von t den Punkt $\mathfrak{x}_1'$ von t' zu, so wird in der hiedurch bestimmten Collineation Δ die F_7 sich selbst entsprechen. Da für Δ^2 die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ homologe werden, so ist $\Delta^2 = T$. Für Δ^3 entsprechen einander $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2'$.

Die Fläche F_7 besitzt also die einzige Gruppe $1, \Delta, \Delta^2, \Delta^3$ von Collineationen in sich.

Die übrigen Flächen mit Biplanarknoten hängen von weniger als 15 Constanten ab.

IV. Die Flächen mit einem Uniplanarknoten.

§. 35. Die Fläche F_{12} mit einem Uniplanarknoten $\mathfrak{u}$, in welchem sich die drei achtfach zählenden Geraden h_1, h_2, h_3 schneiden, derart, dass die Tangentialebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ von F_{12} längs h_1, h_2, h_3 nicht durch eine Gerade gehen, hängt von 15 Constanten ab. Sie besitzt keine Invariante.

Die Gruppe der Collineationen, welche sie ungeändert lässt, besteht aus drei central-involutorischen Collineationen A, B, Γ, deren Centren α, β, γ auf den Geraden h_1, h_2, h_3 und auf den unären Geraden a_1, a_2, a_3 liegen, in denen die Ebenen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ die F_{12} noch schneiden. Da α, β, γ auf einer Geraden liegen, so erzeugen die Collineationen noch die zwei ternär-planaren AB und BA. Sonst treten keine Collineationen auf, welche F_{12} in sich transformieren.

---

[1]) Man zeigt leicht, dass jede Collineation, welche drei zu einander windschiefe Coïncidenzgerade besitzt, eine gescharte ist; denn alle Geraden der Schar des Hyperboloides, welches durch die drei Geraden bestimmt ist, sind Coïncidenzgeraden und die Deckpunkte der projectivischen Punktreihen auf ihnen liegen auf zwei Geraden der Leitschar. Diese sind die Leitstrahlen der gescharten Collineation.

Digitized by Google

Schneiden sich $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ in einer Geraden, ist also der Schnittpunkt von a_1, a_2, a_3 ein Tripelpunkt der Fläche, dann hängt sie bloß von 14 Constanten ab und lässt unendlich viele Collineationen in sich zu.

Alle übrigen Flächen mit Uniplanarknoten hängen von weniger als 15 Constanten ab und lassen daher immer unendlich viele Collineationen in sich zu.

Digitized by Google

Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten.

Von Prof. Dr. F. J. Studnička in Prag.

Bekanntlich werden im speciellen Theil der Determinantentheorie dreierlei Fälle unterschieden, wo die Elemente der betreffenden combinatorischen Gebilde Derivationen von gegebenen Functionen bilden, so dass sie mit dem gemeinschaftlichen Namen Derivationsdeterminanten bezeichnet werden. Es sind dies die nach ihren ersten Bearbeitern benannten Determinanten Jacobi's, Hesse's und Wronski's, kurz genannt auch Jacobian, Hessian und Wronskian.

An diese letzteren schließen wir nun Determinanten an, deren Elemente, wie sie der Reihe nach fortschreiten, ebenso fortschreitende Derivationen einer gegebenen Function der Veränderlichen x vorstellen, so dass man hat, wenn

$$u = f(x) \tag{1}$$

ist und der üblichen Bezeichnung gemäß

$$u^{(k)} = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f^{(k)}(x) \tag{2}$$

gesetzt wird, allgemein

$$D_n(u) = \begin{vmatrix} u, & u', & u'', & \ldots, & u^{(n-1)} \\ u', & u'', & u''', & \ldots, & u^{(n)} \\ u'', & u''', & u'''', & \ldots, & u^{(n+1)} \\ \vdots & & & & \\ u^{(n-1)}, & u^{(n)} & u^{(n+1)}, & \ldots, & u^{(2n-2)} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

welcher Ausdruck also eine persymmetrische Determinante n^{ten} Grades vorstellt.

Was ihre Eigenschaften betrifft, so ist vor Allem die einfache Relation anzuführen

$$D_n(u) \cdot D_{n-2}(u'') = D_{n-1}(u) \cdot D_{n-1}(u'') - D_{n-1}(u')^2, \tag{4}$$

welche man auch in Anbetracht des auf der rechten Seite stehenden Determinantenausdruckes der Formel (3) gemäß

Digitized by Google

$$D_n(u) \cdot D_{n-2}(u'') = D_2\big(D_{n-1}(u)\big) \tag{5}$$

schreiben könnte.

Dass sich hieraus für $D_n(u)$ ein neuer bruchförmiger Ausdruck ableiten ließe, wenn man die Gradindices n zweckdienlich herabsetzen und dann die so entstandenen Relationen entsprechend verknüpfen würde, braucht nicht speciell ausgeführt zu werden.

Interessanter gestalten sich die Eigenschaften dieser neuen Derivationsdeterminante, wenn statt u besondere Functionen eingeführt werden.

So ist z. B., wie leicht einzusehen ist,

$$D_n(e^{ax}) \equiv 0, \tag{6}$$

sowie sich aus demselben Grunde ergibt

$$D_n(\sin x) \equiv 0, \; D_n(\cos x) \equiv 0, \; n > 2, \tag{7}$$

während ausnahmsweise

$$D_2(\sin x) = D_2(\cos x) = -1 \tag{8}$$

ist. Zu bemerkenswerten Resultaten führt die Annahme

$$u = \frac{1}{x^m} = x^{-m},$$

da man hiedurch aus Formel (3) erhält

$$D_n\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{M_n}{x^{m(m+n-1)}}, \tag{9}$$

wenn die Bezeichnung gewählt wird

$$M_n \equiv \begin{vmatrix} 1, & m^{1|1}, & m^{2|1}, & \ldots, & m^{n-1|1} \\ m^{1|1}, & m^{2|1}, & m^{3|1}, & \ldots, & m^{n|1} \\ m^{2|1}, & m^{3|1}, & m^{4|1}, & \ldots, & m^{n+1|1} \\ \vdots & & & & \\ m^{n-1|1}, & m^{n|1}, & m^{n+1|1}, & \ldots, & m^{2n-2|1} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Da die hier auftretenden Elemente

$$m^{k|1} \equiv m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)$$

Facultäten vorstellen, so nennen wir die Determinante, welche nach Heraushebung der gemeinschaftlichen Factoren zurückbleibt, Facultätsdeterminante, indem wir schreiben

$$F_n(m) \equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ m^{1|1}, & (m+1)^{1|1}, & (m+2)^{1|1}, & \ldots(m+n-1)^{1|1} \\ m^{2|1}, & (m+1)^{2|1}, & (m+2)^{2|1}, & \ldots(m+n-1)^{2|1} \\ \vdots & & & \\ m^{n-1|1}, & (m+1)^{n-1|1}, & (m+2)^{n-1|1}, & \ldots(m+n-1)^{n-1|1} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Digitized by Google

Dieselbe ist ein ganz specieller Fall der allgemeineren Facultätsdeterminante

$$(12) \qquad F_n(a_k, d) \equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, a_n \\ a_1^{2|d}, & a_2^{2|d}, & a_3^{2|d}, & \ldots, a_n^{2|d} \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1|d}, & a_2^{n-1|d}, & a_3^{n-1|d}, & \ldots, a_n^{n-1|d} \end{vmatrix},$$

deren Auswertung das bekannte alternierende Product liefert

$$(13) \qquad F_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}),$$

welches auch den Wert der fundamentalen Potenzdeterminante [1])

$$(14) \qquad P_n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, a_n \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & \ldots, a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & a_3^{n-1}, & \ldots, a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

liefert, welche aus (12) hervorgeht, wenn darin

$$d = 0$$

gesetzt wird.

Führen wir nun an die Stelle der beliebigen Elemente a_k die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung

$$(15) \qquad a_k = a + (k-1)d$$

ein, so verwandelt sich unser Product (13) in

$$(16) \qquad F_n(a, d) = d^{n_2} \prod_{k=1}^{n-1} (k!),$$

so dass darnach z. B. sofort sich ergibt

$$F_4(5, -2) \equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 5, & 3, & 1, & -1 \\ 15, & 3, & -1, & 3 \\ 15, & -3, & 3, & -15 \end{vmatrix} = (-2)^6 . 1!\,2!\,3!,$$

was die directe Auswertung bestätigt.

---

[1]) Vergl. Studnička, „Über Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften", Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1896.

Digitized by Google

Dass sich aus Formel (16), wenn darin

$$d = \pm 1$$

gesetzt wird, der einfachere Ausdruck

$$(17)\quad F_n(a, \pm 1) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a, & a \pm 1, & a \pm 2, & \ldots, a \pm \overline{n-1} \\ a^{2|1}, & (a \pm 1)^{2|1} & (a \pm 2)^{2|1} & \ldots, (a \pm \overline{n-1})^{2|1} \\ \vdots & & & \\ a^{n-1|1}, & (a \pm 1)^{n-1|1}, & (a \pm 2)^{n-1|1}, & \ldots, (a \pm \overline{n-1})^{n-1|1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\pm 1)^{n_2} \prod_{k=1}^{n-1} (k!),$$

welcher einen ebenfalls von a unabhängigen Wert aufweist, direct ableiten lässt, mag nur nebenbei bemerkt werden. Darnach ist z. B.

$$F_4(4, -1) = \begin{vmatrix} 1, 1, 1, 1 \\ 4, 3, 2, 1 \\ 12, 6, 2, 0 \\ 24, 6, 0, 0 \end{vmatrix} = 1!\, 2!\, 3!$$

Um nun auf unseren Ausdruck (10) zurückzukommen, multiplicieren wir die Colonnen der Determinante (12), die Bedingung (15) einhaltend und mit der zweiten Colonne beginnend, der Reihe nach mit den Facultäten

$$a^{1|d}, a^{2|d}, a^{3|d}, \ldots, a^{n-1|d},$$

worauf wir erhalten

$$(18)\quad f_n(a, d) = \begin{vmatrix} 1, & a^{1|d}, & a^{2|d}, & \ldots, a^{n-1|d} \\ a^{1|d}, & a^{2|d}, & a^{3|d}, & \ldots, a^{n|d} \\ a^{2|d}, & a^{3|d}, & a^{4|d}, & \ldots, a^{n+1|d} \\ \vdots & & & \\ a^{n-1|d}, & a^{n|d}, & a^{n+1|d}, & \ldots, a^{2n-2|d} \end{vmatrix} = d^{n_2} \prod_{k=1}^{n-1} k!\, a^{k|d},$$

sodass für den Fall, wo

$$d = 1$$

ist, erhalten wird

$$(19)\qquad f_n(a, 1) = \prod_{k=1}^{n-1} k!\, a^{k|1},$$

Digitized by Google

wodurch unsere specielle Derivationsdeterminante ausgewertet erscheint, indem man hat

$$D_n\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k!\, m^{k|1}}{x^{m(m+n-1)}}. \tag{20}$$

In dem einfachsten Falle, wo

$$m = 1,$$

ist, also unsere Derivationsdeterminante durch die Formel

$$D_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k!)^2}{x^{n^2}} \tag{21}$$

ausgewertet erscheint, verwandelt sich die diesbezügliche Facultätsdeterminante (18) in die einfachste factorielle Determinante

$$f_n(1,1) \equiv \begin{vmatrix} 1, & 1!, 2!, & \ldots, (n-1)! \\ 1!, & 2!, 3!, & \ldots, n! \\ 2!, & 3!, 4!, & \ldots, (n+1)! \\ \vdots & & \\ (n-1)!, & n!, (n+1)!, & \ldots, (2n-2)! \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (k!)^2, \tag{22}$$

aus welcher schließlich durch Heraushebung und Beseitigung der gemeinschaftlichen Factoren der einzelnen Reihen erhalten wird

$$\begin{vmatrix} 1, 1, 1, & \ldots, 1 \\ 1, 2, 3, & \ldots, n \\ 1, 3, 6, & \ldots, (n+1)_2 \\ \vdots & \\ 1, n_1, (n+1)_2, & \ldots, (2n-2)_{n-1} \end{vmatrix} = 1, \tag{23}$$

was auch direct sich gar leicht ableiten lässt, da die Elemente der einzelnen Reihen fortschreitende figurierte Zahlen vorstellen, daher durch fortschreitendes Subtrahieren schließlich eine Determinante erhalten wird, deren Elemente der Hauptdiagonale sämmtlich auf 1 sich reducieren, während die links davon stehenden zu Null werden.

Digitized by Google

Über die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes.

Von Dr. **Emil Kohl** in Wien.

Die Arbeiten über die Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen lassen sich je nach ihrem theoretischen Ausgangspunkt in mehrere Gruppen eintheilen. So gehen die Theorien von Fresnel[1]), Neumann[2]) und Cauchy[3]) von der Vorstellung von Ätherntheilchen aus, durch deren Verschiebung Kräfte geweckt werden, welche nicht mehr wie bei isotropen Medien auch in doppelbrechenden Krystallen nach jeder Richtung hin mit jener der Verschiebung zusammenfallen. Stefan[4]) gewinnt die Gleichungen der Doppelbrechung durch die Betrachtung, dass die zur Verschiebung eines Ätherntheilchens nöthige Arbeit eine Function der Verschiebungsrichtung ist. Diese Darstellungen besitzen das charakteristische Merkmal, dass keine besondere Annahme über die Beschaffenheit des lichtleitenden Mediums, sondern nur über den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den durch sie geweckten Kräften gemacht wird.

Arbeiten anderer Art sind jene, welche den Begriff einer Arbeitsfunction oder Potentials einführen, also einer Function, deren Ableitungen nach den Unbekannten die wirkenden Kräfte liefern,

---

[1]) A. Fresnel, Mémoire sur la double réfraction. Mémoires de l'Acad. des sciences, t. VII.

[2]) F. E. Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. Pogg. Ann. Bd. 25. — Theoretische Untersuchungen der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien reflectiert und gebrochen wird. Abhandlg. d. Berliner Akademie, Bd. 35.

[3]) A. Cauchy, Mémoire sur la théorie de la lumière. Mémoires de l'Acad. d. sciences t. X. — Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction. Mémoires de l'Acad. d. sciences, t. XVIII.

[4]) J. Stefan, Theorie der doppelten Brechung. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie. Bd. 50 (II).

Digitized by Google

wie dies von Green[1]), M'. Cullagh[2]) und Kirchhoff[3]) geschah. Da sich dieses Potential als das in der Elasticitätstheorie wohl bekannte „Potential der inneren Kräfte" deuten lässt, leiten diese Arbeiten sachgemäß zur Elasticitätstheorie des Lichtes hinüber, welche von Lamé[4]) in seinem grundlegenden Werke eine sehr eingehende Behandlung erfuhr. Es ist nun zu bemerken, dass diese Arbeiten zur Ableitung der experimentell sicher gestellten Thatsachen bereits gewisse Beziehungen zwischen den auftretenden Constanten voraussetzen müssen, welche bereits bestimmten Eigenschaften des Mediums entsprechen. Weitere Ausbildung erfuhren diese Betrachtungen durch Volkmann[5]), Lévy[6]) und vor allem durch v. Lang[7]), der in seinem Lehrbuche[8]) eine umfassende Darstellung der geometrischen Gesetze der Doppelbrechung niedergelegt hat. Gleichsam als Bindeglied könnte eine Arbeit von Stefan[9]) betrachtet werden, worin derselbe unter Anwendung von Methoden, welche denen der Elasticitätstheorie analog sind, die Gleichungen der Lichtbewegung in doppelbrechenden Medien auf dem von Green eingeschlagenen Wege ableitet und ihre formelle Übereinstimmung sowohl mit den Green'schen wie mit den Cauchy'schen Gleichungen darthut.

Eine dritte Kategorie von Arbeiten sieht den Hauptgrund der Refractionserscheinungen in der Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die Mitbewegung der körperlichen Massentheilchen. Begründet durch Sellmeier[10]) und v. Helmholz[11]) wurde diese

---

[1]) G. Green, On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of two non Crystallized Media. Transact. of the Cambridge Philos. Society, Vol. VII, part I. — On the Propagation of Light in Crystallized Media. Vol. VII, part II.

[2]) J. M'. Cullagh, On the Laws of Crystalline Reflection and Refraction. Transact. of the R. Irish Academy, Vol. XVI.

[3]) G. Kirchhoff, Über die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel. Abhandlung der Berliner Akademie, 1876.

[4]) G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1866. 17ème—25ème leçon.

[5]) P. Volkmann, Einfache Ableitung des Green'schen Ausdruckes für das Potential des Lichtäthers. Wiedemanns Ann. Bd. 35.

[6]) M. Lévy, Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatible avec la surface de l'onde de Fresnel. Comptes rendus 105.

[7]) V. v. Lang, Über die Gesetze der Doppelbrechung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 43. — Zur Theorie der Doppelbrechung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 73. (II). — Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 81 (II).

[8]) V. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, 1873.

[9]) J. Stefan, Allgemeine Gleichungen für oscilatorische Bewegungen. Pogg. Ann. Bd. 102.

[10]) W. Sellmeier, Über die durch Ätherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien. Pogg. Ann. Bd. 145, Bd. 147.

[11]) H. v. Helmholtz, Zur Theorie der anomalen Dispersion. Pogg. Ann. Bd. 154.

Digitized by Google

Theorie hauptsächlich von Ketteler,[1]) Lommel[2]) und Voigt[3]) ausgebildet, welch letzterer unter gewissen Annahmen der in seinen Gleichungen auftretenden Constanten zum Green'schen Potentialausdruck gelangt.[4])

Die vierte Kategorie umfasst endlich die auf den Principien der elektromagnetischen Lichttheorie fußenden zahlreichen Arbeiten der neuesten Zeit. Eine einheitliche Darstellung dieser Theorie gibt Tumlirz in seinem Lehrbuche.[5]) Da sich, wie Helm[6]) gezeigt hat, die Maxwell'schen Gleichungen in der ihnen von Hertz gegebenen Form durch entsprechende Umformung der Ausdrücke der Elasticitätstheorie auch als die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers deuten lassen, so ist wenigstens formell eine Beziehung zur elastischen Theorie des Lichtes gegeben, wiewohl diese Arbeit zunächst nur ein isotropes Medium voraussetzt.

Während nun alle diese Theorien die experimentell beglaubigten Thatsachen der Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen vollkommen befriedigend darzustellen vermögen, herrscht bekanntlich in der Frage nach der Schwingungsrichtung der beiden Strahlen gegenüber der Polarisationsebene Meinungsverschiedenheit. Es hat nun Drude[7]) in einer Discussion dieser verschiedenen Theorien auf den höchst bemerkenswerten Umstand hingewiesen, dass es bei jeder Lichtbewegung zwei Vectoren gibt, wovon der eine, von ihm als potentieller Vector genannte und mit

$$u, v, w$$

bezeichnete den Fresnel'schen Formeln, der andere, als kinetischer Vector in der Form

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

dargestellte, den Neumann'schen Formeln genügt. Definiert man also als Licht die periodischen Änderungen des potentiellen Vectors (resp. in der elektromagnetischen Lichttheorie jene der elektrischen Kraft), so befolgt es die Fresnel'schen Gesetze, deutet man dasselbe aber als diejenigen des kinetischen Vectors (resp. der

[1]) E. Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig, 1885.

[2]) E. Lommel, Theorie der Absorption und Fluorescenz. — Theorie der normalen und anormalen Dispersion. Wiedemanns Ann. Bd. 3. — Theorie der doppelten Brechung. Wiedemanns Ann. Bd. 4.

[3]) W. Voigt, Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media. Wiedemanns Ann. Bd. 19.

[4]) W. Voigt, Über die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger krystallinischer Medien. Wiedemanns Ann. Bd. 24.

[5]) O. Tumlirz, Die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Leipzig, 1883.

[6]) G. Helm, Die Fortpflanzung der Energie durch den Äther. Wiedemanns Ann. Bd. 47.

[7]) P. Drude, Inwieweit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik? Göttinger Nachrichten 1892.

Digitized by Google

magnetischen Kraft), so erhält man jene von Neumann. Die Bedeutung der Vectoren ist also in beiden Theorien gegenseitig vertauscht.

In jüngster Zeit hat Boltzmann gelegentlich einer populären Besprechung der Röntgen-Strahlen den Gedanken ausgesprochen, dass sich der Lichtäther gleichsam unter dem Bilde einer gelatinösen, sulzähnlichen Masse vorstellen lasse, soweit die Lichtschwingungen in Betracht kommen. Die Haupteigenschaft eines solchen Mediums ist die ungemein leichte elastische Verschiebbarkeit bei nahezu gänzlichem Mangel an Compressibilität. Diesbezüglich hat bereits Volkmann in der oben citierten Arbeit gezeigt, dass sich aus der Eigenschaft der Incompressibilität des Mediums eine solche Beziehung zwischen den Constanten derselben ergibt, wie sie der Ausdruck für das Green'sche Potential fordert.

Die vorliegende Arbeit bildet die mathematische Formulierung dieses Gedankens. Es wird hier von der Annahme ausgegangen, dass das Licht (resp. die Wirkungen desselben) den elastischen Verschiebungen eines incompressiblen Mediums seine Entstehung verdankt und dass der periodisch sich ändernde Vector, welcher den „Lichtschwingungen" entspricht, identisch mit diesen ist. Mit Rücksicht darauf werden die Grundgleichungen der Elasticitätstheorie unter der Voraussetzung untersucht, dass das Medium vollkommen elastisch und vollkommen incompressibel ist. Nimmt man hiebei an, dass durch die Erfahrung die Richtigkeit der Fresnelschen Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Planwelle in Richtung ihrer Normalen (definiert durch ihre Richtungswinkel λ, μ, ν) in der Gestalt

$$\frac{\cos^2\lambda}{a^2 - v^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2 - v^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2 - v^2} = 0$$

bewahrheitet ist, so lassen sich hieraus Schlüsse auf die Constanten der Elasticitätsgleichungen ziehen, welche gewisse charakteristische Eigenschaften dieses Mediums näher bestimmen lassen.

Unter Zugrundelegung des Vorganges von Fresnel sollen die Untersuchungen auf Planwellen beschränkt und vorausgesetzt werden, dass deren Einhüllende die von einem Erregungspunkte ausgehende Wellenfläche darstellt.

Der Gang der Untersuchungen wird demnach der sein, dass zunächst die Gleichungen für die Wellenbewegungen in einem beliebigen anisotropen elastischen Medium aufgestellt und sodann auf den Grenzfall, dass die cubische Dilatation unendlich klein wird, ausgedehnt werden. Es sei bemerkt, dass hiebei Glieder, welche die cubische Dilatation enthalten, nicht ohne weiters weggelassen werden dürfen, obwohl dieselbe gegen Null convergiert, da gleichzeitig damit Glieder multiplicativ verbunden sind, welche den Factor des cubischen Compressionscoeficienten enthalten, der unendlich groß wird.

Digitized by Google

Die Untersuchungen selbst werden sich auf die beiden bekannten Grundannahmen, dass entweder die Elasticität oder dass die Dichte nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, beziehen und die sich hieraus ergebenden Consequenzen näher erörtert werden.

I. Medium mit ungleicher Elasticität und gleicher Dichte.

Es werde ein Medium vorausgesetzt, welches nach drei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen, die zugleich als Coordinatenachsen gewählt werden sollen, verschiedene Elasticität besitzen möge. Man denke sich aus demselben einen Würfel mit zu den drei Achsen parallelen Seiten herausgeschnitten und auf ein paralleles Flächenpaar eine normale Zugkraft P wirken. Diese Kraft bewirkt einerseits eine Verlängerung in der Richtung der in sie fallenden Kante, anderseits Verkürzungen der beiden senkrecht darauf stehenden Kanten, welche wegen der Verschiedenheit der Elasticität ebenfalls verschieden sein werden. Die resultierenden Verschiebungen werden durch folgendes Schema gegeben sein:

		Zugkraft P wirkt parallel		
		der X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
Es wird verlängert die	X-Kante um	$\frac{P}{E_x}$	$-q_x\frac{P}{E_y}$	$-r_x\frac{P}{E_z}$
	Y- " "	$-p_y\frac{P}{E_x}$	$\frac{P}{E_y}$	$-r_y\frac{P}{E_z}$
	Z- " "	$-p_z\frac{P}{E_x}$	$-q_z\frac{P}{E_y}$	$\frac{P}{E_z}$.

Hierin bedeutet E_x, E_y, E_z den entsprechenden Elasticitätscoefficienten nach je einer Achse, die p, q, r sind Größen, die der Poisson-Wertheimschen Constante bei homogenem Medium analog sind. Lässt man auf alle Flächen des Würfels normale Zugkräfte P wirken, so hat die entstehende räumliche Dilatation den Wert

$$\Delta V = P\left[\frac{1}{E_x}(1-p_y-p_z)+\frac{1}{E_y}(1-q_x-q_z)+\frac{1}{E_z}(1-r_x-r_y)\right].$$

Denkt man sich ferner auf die Flächen des Würfels Schubkräfte wirken, welche in die Richtung der entsprechenden Fläche fallen, so werden je zwei Kanten, die früher einen rechten Winkel einschlossen, um einen gewiessen Winkel verdreht erscheinen. Dieser wird für sehr kleine Verdrehungen proportional der wirkenden Schubkraft sein, wegen der ungleichen Elasticität werden aber je nach der Richtung dieser Kräfte drei Proportionalitätsconstante G, H, J auftreten.

Digitized by Google

Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich leicht die Bewegungsgleichungen für elastische Schwingungen aufstellen, wobei die von Clebsch[1]) angewendete Methode zugrunde gelegt werden soll. Es ist, sehr kleine Schwingungen mit den Componenten ξ, η, ζ vorausgesetzt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{X_x}{E_x} - q_x \dfrac{Y_y}{E_y} - r_x \dfrac{Z_z}{E_z}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{Y_y}{E_y} - p_y \dfrac{X_x}{E_x} - r_y \dfrac{Z_z}{E_z}, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = \dfrac{Z_z}{E_z} - p_z \dfrac{X_x}{E_x} - q_z \dfrac{Y_y}{E_y}; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} X_y = Y_x = J\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right), \\ Y_z = Z_y = G\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial z}\right), \\ X_z = Z_x = H\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Hierin sind X_x, Y_y, Z_z die normalen Druckkräfte, die $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $X_z = Z_x$ die seitlichen Verschiebungskräfte.

Setzt man die Determinante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1, & -q_x, & -r_x \\ -p_y, & 1, & -r_y \\ -p_z, & -q_z, & -1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

ferner deren Unterdeterminanten

$$(4)\qquad \begin{cases} 1 - q_z r_y = a_{11}, & q_x + q_z r_x = a_{12}, & r_x + r_y q_x = a_{13}, \\ p_y + p_z r_y = a_{21}, & 1 - p_z r_x = a_{22}, & r_y + r_x p_y = a_{23}, \\ p_z + p_y q_z = a_{31}, & q_z + q_x p_z = a_{32}, & 1 - p_y q_x = a_{33}, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$(5)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{E_x}{\Delta} a_{11} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\dfrac{E_x}{\Delta} a_{12} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{E_x}{\Delta} a_{13}, \\ Y_y = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{E_y}{\Delta} a_{21} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\dfrac{E_y}{\Delta} a_{22} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{E_y}{\Delta} a_{23}, \\ Z_z = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{E_z}{\Delta} a_{31} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\dfrac{E_z}{\Delta} a_{32} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{E_z}{\Delta} a_{33}. \end{cases}$$

[1]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig. §§. 1 und 17.

Digitized by Google

Zwischen diesen Constanten bestehen[1]) gewisse nothwendige Beziehungen; es ist nämlich

$$(6)\qquad \begin{cases} E_x a_{12} = E_y a_{21}, \\ E_x a_{13} = E_z a_{31}, \\ E_y a_{23} = E_z a_{32}. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z},$$
$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z},$$
$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z};$$

führt man obige Werte ein, so folgt, wenn der Kürze wegen

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{E_x}{\Delta} a_{11} = a, & \frac{E_x}{\Delta} a_{12} = \frac{E_y}{\Delta} a_{21} = b, \\ \frac{E_y}{\Delta} a_{22} = d, & \frac{E_x}{\Delta} a_{13} = \frac{E_z}{\Delta} a_{31} = c, \\ \frac{E_z}{\Delta} a_{33} = f, & \frac{E_y}{\Delta} a_{23} = \frac{E_z}{\Delta} a_{32} = e \end{cases}$$

gesetzt wird und ρ die Dichte des Mediums bedeutet:

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \\ = \left(a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + J \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + (b+J) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + (c+H) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \\ = (b+J) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \left(J \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) + (e+G) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \\ = (c+H) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + (e+G) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + \left(H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + f \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

Aus der Form der Determinante (3) und der Unterdeterminante (4) ergeben sich weiters die Beziehungen

[1]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig. §. 16.

Digitized by Google

$$(9)\qquad \begin{cases} af - c^2 = \dfrac{E_x E_z}{\Delta}, \\ df - e^2 = \dfrac{E_y E_z}{\Delta}, \\ ad - b^2 = \dfrac{E_x E_y}{\Delta}, \\ ae - bc = \dfrac{E_x E_y}{\Delta} r_y = \dfrac{E_x E_z}{\Delta} q_z, \\ bf - ce = \dfrac{E_x E_z}{\Delta} q_x = \dfrac{E_y E_z}{\Delta} p_y, \\ dc - be = \dfrac{E_y E_z}{\Delta} p_z = \dfrac{E_x E_y}{\Delta} r_x. \end{cases}$$

Hieraus folgen die Beziehungsgleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} E_x r_x = E_z p_z, \\ E_y p_y = E_x q_x, \\ E_y r_y = E_z q_z, \end{cases}$$

welche, wie durch einfache Rechnungen nachgewiesen werden kann, mit den Gleichungen (6) übereinstimmen.

Für incompressible Medien ist speciell

$$(11)\qquad \begin{cases} \lim \Delta = 0, \\ \lim (1 - p_y - p_z) = 0, \\ \lim (1 - q_x - q_z) = 0, \\ \lim (1 - r_x - r_y) = 0, \end{cases}$$

da die räumliche Dilatation für jede der Kräfte X_x, Y_y, Z_z verschwinden muss. Ferner sei darauf hingewiesen, dass beim Grenzübergange

$$(12)\qquad \lim a = \lim b = \lim c = \lim d = \lim e = \lim f = \frac{\varkappa}{\Delta}$$

wird, wobei diese Größen unendlich groß werden, wie sich leicht aus Gleichungen (6), (7) und (11) ergibt.

Es sollen nun die in einem solchen Medium möglichen ebenen Wellen näher untersucht werden.

Denkt man sich auf einer unbegrenzten Wellenebene, deren Normale die Richtungswinkel λ, μ, ν, besitzen möge, zu einander parallele Schwingungen mit den Richtungswinkeln φ, ψ, χ hervorgerufen und geht diese Ebene zur Zeit $t = 0$ durch den Coordinatenanfangspunkt, so wird die Gleichung dieser Wellenebene zur Zeit t lauten:

Digitized by Google

$$v\,t = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu,$$

wenn man voraussetzt, dass sie sich mit der constanten Geschwindigkeit v parallel zu sich selbst verschiebt. Die Componenten der Schwingungen können daher in der Form geschrieben werden:

$$(13)\qquad \left.\begin{aligned}\xi &= \cos\varphi\\ \eta &= \cos\psi\\ \zeta &= \cos\chi\end{aligned}\right\}\cdot \sin 2\pi n\left(t - \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + \cos\nu}{v}\right).$$

Setzt man die Werte der Derivierten von ξ, η, ζ aus (13) in die Gleichungen (8) ein, so erhält man folgendes System:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos\varphi\,[a\cos^2\lambda + J\cos^2\mu + H\cos^2\nu - \rho v^2] +\\ &+\cos\psi\cos\lambda\cos\mu\,[b+J] + \cos\chi\cos\lambda\cos\nu\,[c+H] = 0,\\ &\cos\varphi\cos\mu\cos\lambda\,[b+J] + \cos\psi\,[J\cos^2\lambda + d\cos^2\mu +\\ &+G\cos^2\nu - \rho v^2] + \cos\chi\cos\mu\cos\nu\,[e+G] = 0,\\ &\cos\varphi\cos\nu\cos\lambda\,[c+H] + \cos\psi\cos\nu\cos\mu\,[e+G] +\\ &+\cos\chi\,[H\cos^2\lambda + G\cos^2\mu + f\cos^2\nu - \rho v^2] = 0.\end{aligned}\right.$$

Damit dieses System nach $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ eine Lösung besitze, ist hinreichend und nothwendig, dass die Determinante

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} [a\cos^2\lambda + J\cos^2\mu + H\cos^2\nu - \rho v^2], & [b+J]\cos\lambda\cos\mu, & [c+H]\cos\lambda\cos\nu,\\ [b+J]\cos\mu\cos\lambda, & [J\cos^2\lambda + d\cos\mu + G\cos^2\nu - \rho v^2], & [e+G]\cos\mu\cos\nu,\\ [c+H]\cos\nu\cos\lambda, & [e+G]\cos\nu\cos\mu, & [H\cos^2\lambda + G\cos^2\mu + f\cos^2\nu - \rho v^2]\end{vmatrix} = 0$$

wird. Hieraus folgt für v^2 eine Gleichung dritten Grades, es sind also im allgemeinen drei verschiedene Schwingungen möglich, welche sich in ebenen Wellen im Körper fortpflanzen.

Setzt man zur Abkürzung

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}[a\cos^2\lambda + J\cos^2\mu + H\cos^2\nu] &= A,\\ [b+J]\cos\lambda\cos\mu &= B,\\ [c+H]\cos\lambda\cos\nu &= C,\\ [J\cos^2\lambda + d\cos^2\mu + G\cos^2\nu] &= D,\\ [e+G]\cos\mu\cos\nu &= E,\\ [H\cos^2\lambda + G\cos^2\mu + f\cos^2\nu] &= F,\end{aligned}\right.$$

so kann (15) in der Gestalt

$$(\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2[A+D+F] + (\rho v^2)[AF + DF + AD - E^2 - B^2 - C^2] - [2BCE + ADF - AE^2 - FB^2 - DC^2] = 0,$$

Digitized by Google

oder, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ B, & D, & E \\ C, & E, & F \end{vmatrix} = (\Delta),$$

die Unterdeterminante von A, D, F aber $= (A), (D), (F)$ gesetzt werden, auch in der Form

$$(17)\quad (\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2 [A + D + F] + (\rho v^2)[(A) + (D) + (F)] - (\Delta) = 0$$

dargestellt werden.

Im folgenden soll nun der Fall eines elastischen incompressiblen Mediums näher untersucht werden, für welches die definierenden Gleichungen (11) und (12) gelten. Dann werden a, b, c, d, e, f und alle durch Δ dividierten Glieder unendlich; von den Größen G, H, J als den Coefficienten der Schubelasticität möge aber vorausgesetzt werden, dass sie auch beim Übergange zu einem incompressiblen Medium endlich bleiben.

Bevor die Untersuchungen weiter geführt werden, ist es nöthig, einige Bemerkungen über solche Gleichungen vorauszuschicken, welche die Form

$$x^3 - [L\omega + P]x^2 + [M\omega + Q]x - [N\omega + R] = 0$$

besitzen, wenn darin

$$\lim \omega = \infty,$$

L, M, N und P, Q, R endlich bleiben. Sie besitzen offenbar eine Wurzel vom Grade $\lim \omega$ und zwei im allgemeinen endliche Wurzeln, wie die Betrachtung der Coefficienten zeigt. Diese letzteren können dadurch bestimmt werden, dass man sich für x eine solche substitutiert denkt und nun durch $\lim \omega$ dividiert. Man erhält so zur Bestimmung der beiden endlichen Wurzeln die Gleichung

$$Lx^2 - Mx + N = 0,$$

deren Wurzeln mit x_1, x_2 bezeichnet werden mögen. Man kann dann stets drei Größen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Omega \quad (\lim \varepsilon_1 = 0,\ \lim \varepsilon_2 = 0,\ \Omega \text{ endlich})$$

so bestimmen, dass die Werte

$$x_1 + \varepsilon_1,\ x_2 + \varepsilon_2,\ L \lim \omega + \Omega$$

obige Gleichung bis auf unendlich kleines erfüllen. Es kann nämlich unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder gesetzt werden

Digitized by Google

$$L \lim \omega + \Omega + x_1 + x_2 = L \lim \omega + P,$$
$$L \lim \omega (x_1 + x_2) + L \lim \omega (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + x_1 x_2 + (x_1 + x_2)\Omega = M \lim \omega + Q$$
$$L \lim \omega\, x_1 x_2 + L \lim \omega (x_2 \varepsilon_1 + x_1 \varepsilon_2) + x_1 x_2 \Omega = N \lim \omega + R.$$

Hieraus folgt leicht die Bestimmung von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Omega$. Da nun die wahren Wurzelwerte sich nur um unendlich kleine Größen ε_1 und ε_2 von den aus obiger quadratischer Gleichung gefundenen unterscheiden, können letztere an Stelle der ersteren als Wurzeln betrachtet werden.

Gleichung (17) gehört in die Gruppe der eben bezeichneten; obwohl für $\lim \Delta = 0$ scheinbar Glieder von der Ordnung $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$ und $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^3$ auftreten, reducieren sich dieselben durch Beachtung der Gleichungen (9) und (10) auf Glieder von der Ordnung $\left(\frac{1}{\Delta}\right)$. Betrachtet man $\lim \omega$ in den eben angestellten Erörterungen durch $\lim \frac{1}{\Delta}$ gegeben und berücksichtigt die Beziehungen (12), so erhält man schließlich durch Division mit $\lim \frac{\varkappa}{\Delta} = \lim (a \cos^2\lambda + d \cos^2\mu + f \cos^2\nu)$ für (ρv^2) folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(\rho v^2)^2 - (\rho v^2)\,[(H+J)\cos^4\lambda + (J+G)\cos^4\mu + (H+G)\cos^4\nu \\
&+\left(H+G-2J+\frac{E_x E_y}{\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^2\mu + \left(J+G-2H+\frac{E_x E_z}{\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^2\nu \\
&+\left(H+J-2G+\frac{E_y E_z}{\varkappa}\right)\cos^2\mu\cos^2\nu] + [HJ\cos^6\lambda + GJ\cos^6\mu \\
&+GH\cos^6\nu + \left(GJ-2HJ+\frac{E_x E_y}{\varkappa}H\right)\cos^4\lambda\cos^2\mu + (GH-2HJ \\
&+\frac{E_x E_z}{\varkappa}J\Big)\cos^4\lambda\cos^2\nu + \left(GH-2GJ+\frac{E_y E_z}{\varkappa}J\right)\cos^4\mu\cos^2\nu \\
&+\left(HJ-2GH+\frac{E_y E_z}{\varkappa}H\right)\cos^2\mu\cos^4\nu + \left(HJ-2GJ+\frac{E_x E_y}{\varkappa}G\right)\cos^4\mu\cos^2\lambda \\
&+\left(HJ-2GH+\frac{E_x E_z}{\varkappa}G\right)\cos^2\lambda\cos^4\nu + 2\Big(JG+JH+HJ- \\
&-r_y\frac{E_x E_y}{\varkappa}G - q_x\frac{E_x E_z}{\varkappa}J - p_z\frac{E_y E_z}{\varkappa}H + \frac{E_x E_y E_z}{2\varkappa}\Big)\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu] = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichung kann auch nach einigen einfachen Rechnungen so geschrieben werden:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&(\rho v^2)^2 - (\rho v^2)[G(\cos^2\mu + \cos^2\nu) + H(\cos^2\lambda\cos^2\nu) + J(\cos^2\lambda + \cos^2\mu) - \\
&- 4\left(G - \frac{E_y E_z}{4\varkappa}\right)\cos^2\mu\cos^2\nu - 4\left(H - \frac{E_x E_z}{4\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^2\nu \\
&- 4\left(J - \frac{E_x E_y}{4\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^2\mu] + [HJ\cos^2\lambda + GJ\cos^2\mu + GH\cos^2\nu \\
&- 4G\left(J - \frac{E_x E_y}{4\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^4\mu - 4J\left(G - \frac{E_y E_z}{4\varkappa}\right)\cos^4\mu\cos^2\nu \\
&- 4H\left(J - \frac{E_x E_y}{4\varkappa}\right)\cos^4\lambda\cos^2\mu - 4J\left(H - \frac{E_x E_z}{4\varkappa}\right)\cos^4\lambda\cos^2\nu \\
&- 4H\left(G - \frac{E_y E_z}{4\varkappa}\right)\cos^2\mu\cos^4\nu - 4G\left(H - \frac{E_x E_z}{4\varkappa}\right)\cos^2\lambda\cos^4\nu \\
&- (2E_x E_y r_y G + 2E_x E_z q_x J + 2E_y E_z p_z H - E_x E_y E_z). \\
&\qquad\qquad \cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu] = 0.
\end{aligned} \tag{18'}
$$

Die Berechnung von (18) ist hiebei so vorzunehmen, dass zunächst die Glieder der Gleichung (17) ganz allgemein entwickelt, hierauf mittelst (9) und (10) die Reduction auf Größen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ durchgeführt und schließlich nach erfolgter Multiplication mit Δ (resp. Division durch $\frac{1}{\Delta}$) die Beziehungen (11) und (12) angewendet werden.

Mittelst der Gleichung (11) und (12) lassen sich zunächst die Werte von p, q, r in E_x, E_y, E_z ausdrücken; setzt man

$$
\begin{aligned}
E_y E_z &= m \\
E_x E_z &= n \\
E_x E_y &= o \\
S &= 2mo + 2mn + 2no - m^2 - n^2 - o^2,
\end{aligned}
$$

so ergibt sich $\varkappa = \frac{S}{4E_x E_y E_z}$,

$$
\begin{aligned}
p_y &= \frac{E_y E_z + E_x E_z - E_x E_z}{2E_y E_z} = \frac{m + n - o}{2m}, \\
p_z &= \frac{E_y E_z + E_x E_y - E_x E_z}{2E_y E_z} = \frac{m + o - n}{2m}, \\
q_x &= \frac{E_y E_z + E_x E_z - E_x E_y}{2E_x E_z} = \frac{m + n - o}{2n}, \\
q_z &= \frac{E_x E_z + E_x E_y - E_y E_z}{2E_x E_z} = \frac{n + o - m}{2n}, \\
r_x &= \frac{E_y E_z + E_x E_y - E_x E_z}{2E_x E_y} = \frac{m + o - n}{2o}, \\
r_y &= \frac{E_x E_z + E_x E_y - E_y E_z}{2E_x E_y} = \frac{n + o - m}{2o}.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Nach Fresnel ist nun die Gleichung, welche die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit v als Function der Richtungscosinus der Wellenebene definiert, von der Form

$$\frac{\cos^2\lambda}{v^2-v_x^2}+\frac{\cos^2\mu}{v^2-v_y^2}+\frac{\cos^2\nu}{v^2-v_z^2}=0,$$

oder

$$\begin{aligned}(19)\quad & v^4-v^2\left[\left(v_y^2+v_z^2\right)\cos^2\lambda+\left(v_x^2+v_z^2\right)\cos^2\mu+\left(v_x^2+v_y^2\right)\cos^2\nu\right]\\ & +\left[v_y^2\,v_z^2\cos^2\lambda+v_x^2\,v_z^2\cos^2\mu+v_y^2\,v_x^2\cos^2\nu\right]=0\text{[1]}\end{aligned}$$

und wird als Elasticitätsfläche bezeichnet; v_x, v_y, v_z bedeuten hiebei gewisse Geschwindigkeiten nach den Hauptachsen für die Systeme

$$\begin{aligned}\cos\lambda &= 1,\ 0,\ 0,\\ \cos\mu &= 0,\ 1,\ 0,\\ \cos\nu &= 0,\ 0,\ 1.\end{aligned}$$

Es entsteht nun die Frage, ob durch gewisse Annahmen bezüglich G, H, J in dem vorliegenden Medium Schwingungen möglich sind, welche genau zu denselben Formeln führen wie jene bei der Doppelbrechung des Lichtes.

Aus Gleichung (18′) erkennt man nun, dass dies dann der Fall ist, wenn die Constanten G, H, J die Werte haben

$$(20)\quad \begin{cases} G=\dfrac{E_y E_z}{4\varkappa}=\dfrac{m}{4\varkappa},\\ H=\dfrac{E_x E_z}{4\varkappa}=\dfrac{n}{4\varkappa},\\ J=\dfrac{E_x E_x}{4\varkappa}=\dfrac{o}{4\varkappa}, \end{cases}$$

da dann auch der mit dem Factor $\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu$ behaftete Ausdruck $2E_xE_yr_yG+2E_xE_zq_xH+2E_yE_zp_zH-E_xE_yE_z$ in (18′) identisch verschwindet.

Durch Division von (18′) durch ρ^2 nimmt dieselbe die Gestalt

$$\begin{aligned}(21)\quad & (v^2)^2-(v^2)\left[\frac{G}{\rho}(\cos^2\mu+\cos^2\nu)+\frac{H}{\rho}(\cos^2\lambda+\cos^2\nu)+\frac{J}{\rho}(\cos^2\lambda+\cos^2\mu)\right]\\ & +\left[\frac{G}{\rho}\frac{H}{\rho}\cos^2\nu+\frac{G}{\rho}\frac{J}{\rho}\cos^2\mu+\frac{H}{\rho}\frac{J}{\rho}\cos^2\lambda\right]=0,\end{aligned}$$

oder

$$(21')\quad \frac{\cos^2\lambda}{v^2-\dfrac{G}{\rho}}+\frac{\cos^2\mu}{v^2-\dfrac{H}{\rho}}+\frac{\cos^2\nu}{v^2-\dfrac{J}{\rho}}=0$$

[1]) Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. I. B., 154 Cap.

Digitized by Google

an, woraus sich für die axialen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Werte ergeben:

$$v_x = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

$$v_y = \sqrt{\frac{H}{\rho}},$$

$$v_z = \sqrt{\frac{J}{\rho}},$$

und zwar gilt das Schema:

Wert von $\cos\lambda$	$\cos\mu$	$\cos\nu$	axiale Geschwindigkeiten
1	0	0	v_y, v_z nach der X-Achse
0	1	0	v_x, v_z „ „ Y- „
0	0	1	v_x, v_y „ „ Z- „ .

Aus (20) folgt eine einfache Beziehung für G, H, J:

$$G : H : J = \frac{1}{E_x} : \frac{1}{E_y} : \frac{1}{E_z}.$$

Durch (9), (10) und (20) reduciert sich also die Anzahl der Constanten in einem vollkommen elastischen und vollkommen incompressiblen Medium, welches dieselben Wellengleichungen wie der Lichtäther besitzt, auf drei, nämlich die von einander unabhängigen Größen E_x, E_y, E_z.

Aus (21) folgt nach bekannter Methode[1]) die Gleichung der Wellenfläche in der Fresnel'schen Form:

$$\frac{\frac{G}{\rho}\cos^2 l}{(v)^2 - \frac{G}{\rho}} + \frac{\frac{H}{\rho}\cos^2 m}{(v)^2 - \frac{H}{\rho}} + \frac{\frac{J}{\rho}\cos^2 n}{(v)^2 - \frac{J}{\rho}} = 0$$

wobei unter (v) die Geschwindigkeit nach dem Strahle, l, m, n die Richtungswinkel desselben zu verstehen ist.

Aus den hier vorgeführten Entwickelungen ergibt sich demnach der Satz:

I. Betrachtet man den Lichtäther als ein vollkommen elastisches und vollkommen incompressibles Medium, so erfolgen die Schwingungen nach den Gesetzen der Fresnel'schen Wellenfläche, wenn die Schubelasticitäts-Coefficienten die Form besitzen:

[1]) Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Capitel 15.

Digitized by Google

$$G = \frac{E_y E_z}{4\varkappa} = \frac{S}{4\varkappa} \cdot \frac{1}{E_x},$$
$$H = \frac{E_x E_z}{4\varkappa} = \frac{S}{4\varkappa} \cdot \frac{1}{E_y},$$
$$J = \frac{E_x E_y}{4\varkappa} = \frac{S}{4\varkappa} \cdot \frac{1}{E_z},$$

worin E_x, E_y, E_z die Zugelasticitätscoefficienten nach den drei Achsen bedeuten und S und $\varkappa$ die früher angeführten Werte besitzen.

Es ist also hiermit bewiesen, dass der Lichtäther unter gewissen Beziehungen seiner Constanten als elastisches Medium aufgefasst werden kann.

Aus der Gleichung (14) lassen sich des weiteren auch gewisse Sätze über die Richtungscosinus der Schwingungen selbst ableiten. Zu diesem Zwecke möge folgende Bemerkung vorausgeschickt werden:

Es seien drei Richtungscosinus durch die Werte

$$K\cos\varphi = L + P\lim\omega,$$
$$K\cos\psi = M + Q\lim\omega,$$
$$K\cos\chi = N + R\lim\omega \qquad (\lim\omega = \infty)$$

definiert, worin K ein Proportionalitätsfactor, $L, M, N; P, Q, R$ aber endliche Größen sind; wie eine einfache Rechnung zeigt, kann dann bis auf verschwindend kleine Größen

$$\cos\varphi = \frac{P}{K},$$
$$\cos\psi = \frac{Q}{K},$$
$$\cos\chi = \frac{R}{K}, \qquad (K = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2})$$

gesetzt werden.

Davon lässt sich beim vorliegenden Falle Gebrauch machen. Gleichung (14) kann nämlich geschrieben werden:

$$(A - v^2)\cos\varphi + B\cos\psi + C\cos\chi = 0,$$
$$(B\cos\varphi + (D - v^2)\cos\psi + C\cos\chi = 0,$$
$$C\cos\varphi + E\cos\psi + (F - v^2)\cos\chi = 0,$$

worin A, B, C, D, E, F die durch (16) definierten Werte besitzen. Man erhält hieraus:

$$(22a) \qquad \begin{cases} K\cos\varphi = (D - v^2)(E - v^2) - E^2, \\ K\cos\psi = EC - (F - v^2)B, \\ K\cos\chi = BE - (D - v^2)C, \end{cases}$$

Digitized by Google

ist. Entwickelt man diese Ausdrücke, wendet die Beziehung (9) an und setzt für v^2 eine der beiden endlichen Wurzeln von (21), so lassen sich die gefundenen Werte in gewisse endliche Größen L, M, N und in mit dem Factor $\frac{1}{\Delta}$ behaftete ebenfalls endliche Größen P, Q, R zerlegen, so dass der eben erwähnte Fall zur Anwendung kommt, $\cos\varphi, \cos\psi, \cos\chi$ daher bloß von P, Q, R abhängt; es ist somit, wenn für G, H, J; p, q, r; $E_y E_z, E_x E_z, E_x E_y$ ihre Werte in m, n, o und $\varkappa$ eingesetzt werden, nach einfachen Rechnungen:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\varphi_{\substack{1\\2}} &= \frac{1}{K_{\substack{1\\2}}}\left\{\left[\frac{n}{4}\cos^2\lambda\cos^2\mu + \frac{o}{4}\cos^2\lambda\cos^2\nu + \frac{m}{4}(\cos^2\mu+\cos^2\nu)^2\right] - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \varkappa(\cos^2\mu+\cos^2\nu)\, v^2_{\substack{1\\2}}\right\},\\
\cos\psi_{\substack{1\\2}} &= \frac{1}{K_{\substack{1\\2}}}\left\{\left[\frac{o}{4}\cos^2\nu - \frac{m}{4}(\cos^2\mu+\cos^2\nu) - \frac{n}{4}(\cos^2\lambda+\cos^2\nu)\right]\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cos\lambda\cos\mu + \varkappa\cos\lambda\cos\mu\, v^2_{\substack{1\\2}}\right\},\\
\cos\chi_{\substack{1\\2}} &= \frac{1}{K_{\substack{1\\2}}}\left\{\left[\frac{n}{4}\cos^2 - \frac{o}{4}(\cos^2\lambda+\cos^2\mu) - \frac{m}{4}(\cos^2\mu+\cos^2\nu)\right]\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cos\lambda\cos\nu + \varkappa\cos\lambda\cos\nu\, v^2_{\substack{1\\2}}\right\};
\end{aligned}\right.$$

dabei beziehen sich die beiden Indices 1 und 2 auf die aus Gleichung (21) resultierenden zwei endlichen Wurzeln v_1^2 und v_2^2; $K_{\substack{1\\2}}$ sind Proportionalitätsfactoren, dargestellt durch $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, wie oben erwähnt.

Bildet man

$$\cos\varphi_{\substack{1\\2}}\cos\lambda + \cos\psi_{\substack{1\\2}}\cos\mu + \cos\chi_{\substack{1\\2}}\cos\nu,$$

so wird dieser Ausdruck identisch Null; hieraus folgt:

II. Die beiden Schwingungen mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Medium mit den im I. Satze definierten Eigenschaften geschehen in der Wellenebene, sie sind demnach transversal.

Dieser Satz ist eine nothwendige Folge der Incompressibilität des Mittels.

Bildet man ferner aus (22)

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2$$

und berücksichtigt, dass nach (21)

$$\rho(v_1^2+v_2^2) = (G+H)\cos^2\nu + (G+J)\cos^2\mu + (H+J)\cos^2\lambda$$
$$\rho^2 v_1^2 v_2^2 = GH\cos^2\nu + GJ\cos^2\mu + HJ\cos^2\lambda$$

ist, so wird obige Productensumme ebenfalls Null, woraus folgt:

Digitized by Google

III. Die beiden transversalen Schwingungen stehen aufeinander senkrecht.

Es erübrigt noch die Richtungscosinus derjenigen Schwingung zu untersuchen, für welche

$$v_3^2 = \infty$$

wird. Die vollständige Form der cubischen Gleichung (17) lässt sich unter Beachtung der Beziehungen (9) und (12) so darstellen:

$$(\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2 \left[\frac{\varkappa}{\Delta} + v_1^2 + v_2^2\right] + (\rho v^2)\left[\frac{\varkappa}{\Delta}(v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2\right]$$
$$- \left[\frac{\varkappa}{\Delta} v_1^2 v_2^2 - 4GHJ\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu\right] = 0.$$

Nach früheren Bemerkungen sind die wahren Wurzeln dieser Gleichung

$$(v_1)^2 = v_1^2 \pm \varepsilon_1,$$
$$(v_2)^2 = v_2^2 \mp \varepsilon_2,$$
$$(v_3)^2 = \frac{\varkappa}{\Delta},$$

worin ε_1 ε_2 zwei gegen Null convergierende Größen darstellen, wenn $\lim \frac{1}{\Delta} = \infty$ wird. Berechnet man mit diesem Werte von v_3^2 die Richtungscosinus nach der Formel (22*a*), so erhält man dieselben in der Gestalt

$$(K)\cos\varphi_3 = (L) + \frac{\varkappa}{\Delta}(P) + \left(\frac{\varkappa}{\Delta}\right)^2 \cos\lambda\cos\lambda,$$
$$(K)\cos\psi_3 = (M) + \frac{\varkappa}{\Delta}(Q) + \left(\frac{\varkappa}{\Delta}\right)^2 \cos\lambda\cos\mu,$$
$$(K)\cos\chi_3 = (N) + \frac{\varkappa}{\Delta}(R) + \left(\frac{\varkappa}{\Delta}\right)^2 \cos\lambda\cos\nu,$$

wobei (K) einen Proportionalitätsfactor, L, M, N; P, Q, R endliche Größen darstellen. Man ersieht wieder, dass, da alle Glieder 0. und 1. Potenz von $\frac{\varkappa}{\Delta}$ gegen jene 2. Potenz verschwinden, die Richtungscosinus folgende einfache Werte besitzen:

$$\cos\varphi_3 = \cos\lambda,$$
$$\cos\psi_3 = \cos\mu,$$
$$\cos\chi_3 = \cos\nu.$$

Digitized by Google

Die Schwingungen der dritten Art geschehen also senkrecht zur Wellenebene; auf Grund dessen kann man folgenden Satz aussprechen:

IV. Die drei Schwingungsrichtungen in einem Medium mit den im ersten Satze definierten Eigenschaften stehen wechselweise auf einander senkrecht.

Wie leicht ersichtlich, ist die Wellenfläche dieser dritten Schwingung eine Kugel mit dem unendlich großen Radius $\frac{x}{\Delta}$; die Volumsdilatation ist

$$\vartheta = \frac{2\pi n}{v_3}$$

also $\lim \vartheta = 0$; sie ist von der Lage der Wellenebene unabhängig; man kann diese Welle als longitudinal bezeichenen. In der Optik wird gewöhnlich vorausgesetzt, dass sie überhaupt nicht auftritt, was in dem vorliegenden Falle offenbar dann eintreten würde, wenn das Medium absolut incompressibel ist.

Dieses letztere Resultat lässt eine einfache physikalische Deutung zu. Setzt man das Princip der Superposition der kleinsten Bewegungen als richtig voraus, so wird man die in der Wellenebene (x, λ, ν) zur Zeit t herrschende Totalbewegung in drei zu einander senkrechte Partialbewegungen nach den drei eben entwickelten Schwingungsrichtungen $(\varphi_{1,2,3}, \psi_{1,2,3}, \chi_{1,2,3})$ zerlegen können, deren Componenten nach den Coordinatenachsen $\xi_{1,2,3}, \eta_{1,2,3}, \zeta_{1,2,3}$ sind. Bildet man nun die Ausdrücke für die lebendige Kraft, so ist gemäß der Beziehung zwischen den drei Richtungscosinus für ein beliebiges Vielfache n der Schwingungsdauer T

$$\frac{\rho}{2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial t}(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)\right]^2\right\}_t =$$

$$\frac{\rho}{2}\left\{\left(\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\xi_3}{\partial t}\right]^2\right)+\left(\left[\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\eta_2}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\eta_3}{\partial t}\right]^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\left[\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial\zeta_3}{\partial t}\right]^2\right)\right\}_{t+nT}.$$

Denkt man sich also von der Erregungsebene eine vollständige Welle ausgehen, so wird sich die gesammte lebendige Kraft nach Verlauf einer beliebig großen Zeit in den drei Einzelwellen wieder vorfinden, trotzdem sich dieselben wegen ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von einander beliebig weit getrennt haben. Die Orthogonalität der Schwingungsrichtungen gibt also die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür an, dass eine von einem gemeinsamen Erregungsorte ausgehende Wellenbewegung, die sich in mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten be-

Digitized by Google

gabte Einzelwellen zerlegt, trotz der sofort eintretenden Trennung doch stets dieselbe lebendige Kraft repräsentiert.

Für einachsige Medien ist speciell, wenn die Z-Achse als Symmetrieachse betrachtet wird,

$$E_x = E_y$$
$$G = H$$
$$q_x = p_y,\ p_z = q_z,\ r_x = r_y = \frac{1}{2}.$$

Die Wurzelwerte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden endlichen Wellen werden

$$v_1^2 = \frac{G}{\rho},$$
$$v_2^2 = \frac{J}{\rho}(\cos^2\lambda + \cos^2\mu) + \frac{G}{\rho}\cos^2\nu;$$

die Wellenfläche nimmt die Form an

$$\left(r^2 - \frac{G}{\rho}\right)\left(\frac{r^2[\cos^2 l + \cos^2 m]}{\frac{J}{\rho}} + \frac{r^2\cos^2 n}{\frac{G}{\rho}} - 1\right) = 0.$$

Sie besteht demnach aus einer Kugel (ordinäre Schwingung), und einem Rotationsellipsoid (extraordinäre Schwingung); letzteres berührt die erstere in deren Schnittpunkt mit der Z-Achse (optische Achse). Die Richtungscosinus der ordinären Schwingung sind nach Gleichung (22)

$$\cos\varphi_1 = \pm\frac{\cos\lambda\cos\nu}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu}},$$
$$\cos\psi_1 = \pm\frac{\cos\mu\cos\nu}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu}},$$
$$\cos\chi_1 = \mp\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu},$$

die der extraordinären Schwingung aber

$$\cos\varphi_2 = \pm\frac{\cos\mu}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu}},$$
$$\cos\psi_2 = \mp\frac{\cos\lambda}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu}},$$
$$\cos\chi_2 = 0.$$

Aus der Form der Cosinuswerte ergibt sich:

V. Die Schwingungen der ordinären Welle erfolgen in den Meridianen der Kugel, jene der extra-

Digitized by Google

ordinären Welle in den Parallelkreisen des Rotationsellipsoides, wenn man die gemeinsamen Berührungspunkte als Pole annimmt.

Es handelt sich schließlich noch um die Frage nach der Schwingungsrichtung beider Wellen in Bezug auf die Polarisationsebene, d. h. die durch die optische Achse und das Einfallsloth gelegte Ebene. Man denke sich aus dem Medium eine planparallele Platte geschnitten und eine ebene unter beliebigem Azimute polarisierte Welle mit schiefer Incidenz so einfallen, dass Einfalls- und Polarisationsebene zusammenfallen. Wendet man behufs Construction der gebrochenen Wellen das Huyghen'sche Princip in der bekannten Weise an, so erkennt man leicht, dass zwei Wellen entstehen, deren Brechungsebenen im Krystalle wieder in der Polarisationsebene liegen. Nach dem eben entwickelten Satz V folgt, dass die Schwingungen der ordinären Welle in der Polarisationsebene, jene der extraordinären Welle aber senkrecht zu derselben vor sich gehen; zur ersteren gibt die in der Einfallsebene liegende, zur letzteren die darauf senkrechte Componente der Gesammtschwingung Veranlassung. Man kann daher den Satz aussprechen:

VI. Die Schwingungen der ordinären Welle geschehen in der Polarisationsebene, die der extraordinären senkrecht zu derselben.

Zusammenfassend lassen sich die gefunden Resultate folgendermaßen aussprechen:

Betrachtet man den Lichtäther als ein vollkommen elastisches und vollkommen incompressibles Medium, welches in Krystallen des nicht tesseralen Systemes zugleich anisotrop ist, so führen, wenn die Schubelasticitätscoefficienten die oben entwickelte Form besitzen, die Gleichungen der Elasticitätstheorie auf die Fresnel'sche Wellenfläche. Die Schwingungen in einaxigen Krystallen erfolgen aber hinsichtlich ihrer Lage bezüglich der Polarisationsebene gemäß der Neumann'schen Hypothese.

II. Medium mit gleicher Elasticität und ungleicher Dichte.

Eine zweite der Beschaffenheit des Lichtäthers vielfach zugrunde gelegte Annahme ist die, dass seine Elasticität in Krystallen nach allen Richtungen gleich, seine Dichte nach drei zu einander senkrechten Achsen aber verschieden ist. Bezüglich des letzteren Ausdruckes ist jedoch eine nähere Erörterung nöthig. Würde man den Ausdruck Dichte in dem gewöhnlichen Sinne als die in der Volumseinheit enthaltene Materie fassen, so ist klar, dass, wie auch die Aneinanderlagerung der Massentheilchen sei, wenn selbe nur symmetrisch zu den Achsen angeordnet sind, stets in jedem gleich großen Elementar-Parallelepiped die gleiche Masse vorhanden ist, welches auch dessen Lage sein mag. Denn denkt man sich z. B.

Digitized by Google

aus dem Körper ein Parallelepiped mit den Kanten a, b, c parallel zu den Achsen herausgeschnitten, welches die Masse d enthält, und dasselbe durch ein System von drei zu einander senkrechten Ebenen in lauter Elementarprismen mit den Seiten $\Delta l, \Delta m, \Delta n$ zerlegt, so ist die in demselben enthaltene Masse

$$\Delta d = d \frac{\Delta l \Delta m \Delta n}{a.b.c}.$$

Diese Größe ist aber unabhängig von der Lage der Kanten $\Delta l, \Delta m, \Delta n$, somit des Systems der Theilungsebenen, da man die an den Endflächen des Prismas abc etwa auftretenden nicht prismatischen Körperchen wegen der Kleinheit ihrer Summe gegenüber dem Prismeninhalt vernachlässigen kann. Dieselben Überlegungen gelten offenbar auch, wenn statt des Prismas abc ein beliebig begrenzter Theil des Mediums betrachtet wird.

Es ist nun zu bedenken, dass in den linken Seiten $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ der Gleichungen der Elasticitätstheorie, wie überhaupt im D'Alembert'schen Principe, ρ eigentlich die Bedeutung eines Widerstandes der Masse besitzt. Die „Masse" hat ja schließlich in der gesammten Mechanik überhaupt nur diese Bedeutung, da es ja nicht möglich ist, einen directen Schluss auf die Materie durch die von einer gegebenen Kraft ihr ertheilte Beschleunigung zu ziehen. Man kann sich nun vorstellen, dass die im betrachteten Medium durch die Verschiebungen geweckten Elasticitätskräfte zwar nach allen Richtungen gleich groß sind, dass aber die bewegenden Kräfte nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene äußere Widerstände zu überwinden haben, etwa dadurch hervorgerufen, dass in das Mittel discrete Massentheilchen eingebettet sind, welche infolge eines eigenthümlichen Zusammenhanges derselben nach verschiedener Richtung mit verschiedener Leichtigkeit beweglich sind. Nothwendig ist aber hiebei die Voraussetzung, dass diese Theilchen nur an der Bewegung des Mittels theilnehmen, jedoch nicht selbst Ausgangspunkte von Wellen innerhalb des Complexes des von ihnen erfüllten Raumes sind, die eine von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Medium verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Indem der Begriff der Dichte so gefasst werden soll, können die Elasticitätsgleichungen der Bewegung in der Form geschrieben werden:

$$(23) \qquad \begin{cases} \rho_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} = K\Delta\xi + K' \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \rho_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = K\Delta\eta + K' \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \rho_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} + K\Delta\zeta + K' \frac{\partial \Theta}{d z}, \end{cases}$$

Digitized by Google

worin $K = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $K' = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$,

$$\Delta = \frac{\partial^2 .}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 .}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 .}{\partial z^2}, \quad \vartheta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

ferner E den Elasticitätscoefficienten, μ die Poisson-Wertheim'sche Constante bedeutet.

Setzt man wieder voraus, dass die Schwingungen unter einander parallel bleiben und auf einer Wellenebene

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = 0$$

begonnen haben, so wird die Gleichung derselben zur Zeit t sein

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = v\,t$$

wenn sie sich mit der normalen Geschwindigkeit v parallel zu sich im Medium verschiebt. Sind ferner φ, ψ, χ die Richtungswinkel der Schwingungscomponenten ξ, η, ζ, so lassen sich dieselben in der Form schreiben:

$$(24) \qquad \left.\begin{matrix} \xi = \cos\varphi \\ \eta = \cos\psi \\ \zeta = \cos\chi \end{matrix}\right\} \sin 2\pi n\left(t - \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{v}\right).$$

Setzt man die Derivierten von (24) in (23) ein, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{K'}{\rho_1}\cos^2\lambda - v^2\right)\cos\varphi + \frac{K'}{\rho_1}\cos\lambda\cos\mu\cos\chi + \frac{K'}{\rho_1}\cos\lambda\cos\nu\cos\chi = 0, \\ \frac{K'}{\rho_2}\cos\mu\cos\lambda\cos\varphi + \left(\frac{K}{\rho_2} + \frac{K'}{\rho_2}\cos^2\mu - v^2\right)\cos\psi + \frac{K'}{\rho_2}\cos\mu\cos\nu\cos\chi = 0, \\ \frac{K'}{\rho_3}\cos\nu\cos\lambda\cos\varphi + \frac{K'}{\rho_3}\cos\nu\cos\mu\cos\psi + \left(\frac{K}{\rho_3} + \frac{K'}{\rho_3}\cos^2\nu - v^2\right)\cos\chi = 0. \end{cases}$$

Die Determinante, deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser drei Gleichungen, also für die Möglichkeit der Auflösung derselben nach $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, angibt, lautet:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{K'}{\rho_1}\cos^2\lambda - v^2\right), & \frac{K'}{\rho_1}\cos\lambda\cos\mu, & \frac{K'}{\rho_1}\cos\lambda\cos\nu \\ \frac{K'}{\rho_2}\cos\mu\cos\lambda, & \left(\frac{K}{\rho_2} + \frac{K'}{\rho_2}\cos^2\mu - v^2\right), & \frac{K'}{\rho_2}\cos\mu\cos\nu \\ \frac{K'}{\rho_3}\cos\nu\cos\lambda, & \frac{K'}{\rho_3}\cos\nu\cos\mu, & \left(\frac{K}{\rho_3} + \frac{K'}{\rho_3}\cos^2\nu - v^2\right) \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Hieraus folgt wieder eine cubische Gleichung für v^2:

$$v^6 - v^4\left[K\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}\right)+K'\left(\frac{\cos^2\lambda}{\rho_1}+\frac{\cos^2\mu}{\rho_2}+\frac{\cos^2\nu}{\rho_3}\right)\right]$$

$$+v^2\left[K^2\left(\frac{1}{\rho_1\rho_2}+\frac{1}{\rho_1\rho_3}+\frac{1}{\rho_1\rho_3}\right)+KK'\left(\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\nu}{\rho_1\rho_3}+\right.\right. \tag{26}$$

$$\left.\left.+\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\mu}{\rho_1\rho_2}+\frac{\cos^2\mu+\cos^2\nu}{\rho_2\rho_3}\right)-\frac{K^3+K^2K'}{\rho_1\rho_2\rho_3}\right]=0,$$

da die Glieder mit K'^2 ausfallen. Setzt man für ein incompressibles Medium als Definitionsgleichung $\mu=\frac{1}{2}$, also

$$\lim K'=\infty,$$

so besitzt diese Gleichung die im ersten Abschnitte angegebenen Eigenschaften, und es können die dort angestellten Betrachtungen hier Verwendung finden. Dividiert man also (26) unter Voraussetzung eines endlichen v^2 durch $\lim K'=\infty$, so erhält man für die beiden endlichen Wurzelwerte die Gleichung:

$$v^4K\left(\frac{\cos^2\lambda}{\rho_1}+\frac{\cos^2\mu}{\rho_2}+\frac{\cos^2\nu}{\rho_3}\right)-v^2K^2\left(\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\nu}{\rho_1\rho_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\mu}{\rho_1\rho_2}+\frac{\cos^2\mu+\cos^2\nu}{\rho_2\rho_3}\right)+\frac{K^3}{\rho_1\rho_2\rho_3}=0. \tag{27}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{K}{\rho_1}=a^2,$$

$$\frac{K}{\rho_2}=b^2,$$

$$\frac{K}{\rho_3}=c^2,$$

so kann (27) auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{a^2\cos^2\lambda}{a^2-v^2}+\frac{b^2\cos^2\mu}{b^2-v^2}+\frac{c^2\cos^2\nu}{c^2-v^2}=0. \tag{28}$$

Diese Gleichung liefert die Beziehung zwischen der normalen Fortpflanzungsgeschwindigkeit v und den Richtungswinkeln λ, μ, ν der Wellennormalen; die hiedurch definierte Fläche heißt, wie schon im 1. Abschnitte erwähnt, die Elasticitätsfläche.[1]) Während in der Fresnel'schen Theorie dieselbe die Form

$$\frac{\cos^2\lambda}{a^2-v^2}+\frac{\cos^2\mu}{b^2-v^2}+\frac{\cos^2\nu}{c^2-v^2}=0$$

[1]) Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes, I. Theil, 154.

Digitized by Google

besitzt, nimmt sie hier nach (28) die Gestalt der Fresnel'schen Wellenfläche an; offenbar wird die aus (28) gefundene Wellenfläche nicht mehr mit der Fresnel'schen übereinstimmen; man kann daher den Satz aussprechen:

VII. Unter Annahme gleicher Elasticität, aber nach den Achsen verschiedener Dichte des elastischen Mediums hat die Wellenfläche nicht die von Fresnel gegebene Form.

Berechnet man mittelst der Determinantentheorie aus (25) die Richtungscosinus der Schwingungscomponenten, so erhält man

$$(29)\quad \begin{cases} R_{\underset{2}{1}} \cos \varphi_{\underset{2}{1}} = \dfrac{K}{\rho_1 \rho_2}(\cos^2\mu + \cos^2\nu) - v_{\underset{2}{1}}^2\left(\dfrac{\cos^2\nu}{\rho_3} + \dfrac{\cos^2\mu}{\rho_2}\right), \\ R_{\underset{2}{1}} \cos \psi_{\underset{2}{1}} = -\dfrac{K}{\rho_2 \rho_3}\cos\lambda\cos\mu + v_{\underset{2}{1}}^2 \dfrac{\cos\lambda\cos\mu}{\rho_2}, \\ R_{\underset{2}{1}} \cos \chi_{\underset{2}{1}} = -\dfrac{K}{\rho_2 \rho_3}\cos\lambda\cos\nu + v_{\underset{2}{1}}^2 \dfrac{\cos\lambda\cos\nu}{\rho_3}, \end{cases}$$

wo $R_{\underset{2}{1}}$ gewisse Proportionalitätsfactoren darstellen.

Daraus folgt zunächst

$$\cos\varphi_{\underset{2}{1}}\cos\lambda + \cos\psi_{\underset{2}{1}}\cos\mu + \cos\chi_{\underset{2}{1}}\cos\nu = 0,$$

woraus sich der Satz ergibt:

VIII. Die Schwingungen erfolgen unter der im VII. Satze gemachten Annahme in der Wellenebene, sind also transversal.

Dividiert man Gleichung (27) durch

$$\frac{v^4}{\left(\dfrac{K^3}{\rho_1\,\rho_2\,\rho_3}\right)},$$

so erscheint sie in der Form:

$$\left(\frac{1}{v^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{v^2}\right)\frac{1}{K}[\rho_1(\cos^2\mu+\cos^2\nu)+\rho_2(\cos^2\lambda+\cos^2\nu)+\rho_3(\cos^2\lambda+\cos^2\mu)] + [\rho_1\rho_2\cos^2\nu + \rho_1\rho_3\cos^2\mu + \rho_2\rho_3\cos^2\lambda] = 0;$$

daraus folgt:

$$\left(\frac{1}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_2}\right)^2 = \frac{1}{K}[\rho_1(\cos^2\mu+\cos^2\nu)+\rho_2(\cos^2\lambda+\cos^2\nu)+\rho_3(\cos^2\lambda+\cos^2\mu)],$$

$$\left(\frac{1}{v_1}\right)^2\left(\frac{1}{v_2}\right)^2 = \frac{1}{K^2}[\rho_1\rho_2\cos^2\nu + \rho_1\rho_3\cos^2\mu + \rho_2\rho_3\cos^2\lambda].$$

Digitized by Google

Dividiert man nun (29) durch $\left(\frac{r_1}{2}\right)^2$ bildet weiters

$$R_1 R_2 \frac{1}{r_1^2 r_2^2} [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2]$$

und wendet die eben erwähnten Beziehungen an, so findet man nach einfachen Rechnungen, dass diese Productensumme $= 0$ ist.

Man gewinnt so den Satz:

IX. Die beiden Schwingungsrichtungen in einem mit den im VII. Satze definierten Eigenschaften begabten Medium stehen auf einander senkrecht.

Was endlich die Richtungscosinus der mit unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit begabten Schwingung betrifft, so wurde im 1. Abschnitte darauf hingewiesen, dass für diese

$$v_3^2 = K' \left(\frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho_3}\right) + \Omega,$$

also

$$= (\bar{a}^2 \cos^2 \lambda + \bar{b}^2 \cos^2 \mu + \bar{c}^2 \cos^2 \nu) + \Omega$$

gesetzt werden kann, worin $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \sqrt{\frac{K'}{\rho_1}}, \sqrt{\frac{K'}{\rho_2}}, \sqrt{\frac{K'}{\rho_3}}$ ist, also für unendlich große Werte von K' wegen

$$\lim \sqrt{K + K'} = \lim \sqrt{K'^2} \quad (\lim K' = \infty, \ K \text{ endlich})$$

die longitudinalen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nach den Achsen darstellen, und Ω eine endliche Zahl bedeutet.

Berechnet man aus (25) nach der Determinantentheorie $\cos \varphi_3$, $\cos \psi_3$, $\cos \chi_3$, so ergibt sich

$$\cos \varphi_3 = \frac{\cos \lambda}{\rho_1} \frac{1}{D} = \frac{\bar{a}^2 x}{D'},$$

$$\cos \psi_3 = \frac{\cos \mu}{\rho_2} \frac{1}{D} = \frac{\bar{b}^2 y}{D'},$$

$$\cos \chi_3 = \frac{\cos \nu}{\rho_3} \frac{1}{D} = \frac{\bar{c}^2 z}{D'}. \quad (D' = \sqrt{\bar{a}^2 x^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{c}^2 z^2}).$$

Die Schwingungen erfolgen also nicht normal zur Wellenebene, sondern normal zu einem Ellipsoid von der Form

$$\bar{a}^2 x^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{c}^2 z^2 = \text{Const.}$$

Daraus ist zu entnehmen, dass diese dritte Schwingung nicht mehr wie die des vorhergehenden Abschnittes mit den beiden transversalen ein orthogonales System bildet.

Digitized by Google

Aus den abgeleiteten Gleichungen ersieht man, dass die Voraussetzung, der Lichtäther sei ein absolut elastisches und incompressibles Medium mit gleicher Elasticität aber verschiedener Dichte, nicht auf die experimentell beglaubigten Gesetze der Doppelbrechung führt.[1]) Nun muss allerdings folgender Umstand in Betracht gezogen werden. Es wurde vorausgesetzt, dass die Verschiedenheit der Dichte in dem Mitschwingen von vollkommen trägen Massentheilchen ohne specielle Eigenschwingungen begründet sei, welche jedoch nach verschiedenen Richtungen infolge einer eigenthümlichen Art der Structurlagerung der Bewegung einen verschiedenen Widerstand entgegensetzen. Es dürfte nun kaum angehen, einen derartigen Zusammenhang zwischen den materiellen Theilchen ohne eine Äußerung einer selbständigen Eigenschwingung derselben anzunehmen, da sie dann nicht mehr absolut träge, sondern gewissen inneren Kräften unterworfen sind. Daraus folgt, dass die Gleichungen (23) nur unvollständig die gesammte Bewegung schildern, dass vielmehr auch der Einfluss der materiellen Theilchen in Betracht zu ziehen sei, etwa in der Weise, dass man zu den Gleichungen (23) noch diejenigen für die materiellen Theilchen hinzufügt, jedoch so, dass die inneren elastischen Kräfte des einen Mittels zugleich die äußeren für das andere bilden. Eine solche Darstellung ist aber der reinen Elasticitätstheorie des Lichtes, welche von dem Mitspielen der Eigenschwingungen der körperlichen Massen absieht, fremd und soll daher hier nicht weiter verfolgt werden.

Zusammenfassend ergibt sich also der Schluss, dass die Annahme von der Gleichheit der Elasticität und der Verschiedenheit der Dichte vom Standpunkte der Elasticitätsgleichungen unvereinbar mit den experimentell bewahrheiteten Gesetzen der Doppelbrechung ist, während die Annahme von der Gleichheit der Dichte und Verschiedenheit der Elasticität wohl zu den Fresnel'schen Gesetzen führt, jedoch hinsichtlich der Schwingungen der ordinären und der extraordinären Welle in einachsigen Krystallen in Bezug auf die Polarisationsebene den Neumann'schen Satz ergibt.

In diesen Betrachtungen wurde vorausgesetzt, dass der mit den Lichtschwingungen identische Vector durch die Verschiebungen des elastischen Mediums definiert ist. Die Verhältnisse gestalten sich aber offenbar anders, wenn damit ein anderer Vector identificiert wird. Es seien hiezu einige Bemerkungen gestattet, welche aus den bisher vorgeführten Entwicklungen folgen.

Es wurde bereits anfangs erwähnt, dass bei der Berechnung des Problems der Schwingungen eines incompressiblen Mediums zuerst die allgemeinen Formeln für elastische Medien überhaupt zu

[1]) Es sei bemerkt, dass einige Theorien zu anderen Wellenflächen als der Fresnel'schen gelangen. Man vergleiche hiemit:

K. Hollefreund, Die Gesetze der Lichtbewegung in doppelbrechenden Medien nach der Lommel'schen Reibungs Theorie und ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung. — Nova Acta Acad. C. Leopold.-Carol. Tomus 46.

H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Wiedemanns Ann. Bd. 40. (Schlusscapitel).

Digitized by Google

entwickeln und sodann erst die Eigenschaft der Incompressibilität durch Übergang zu dem Grenzfalle eines Mediums, in welchem keine cubische Dilatation auftreten kann, einzuführen ist.

Dagegen wäre es unthunlich, von vornehin Wellen zu untersuchen, für welche

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist, da die Existenz solcher immer erst zu beweisen ist. In der That zeigt sich bei Verfolgung der mathematischen Betrachtungen der ersten Grundannahme Folgendes: In einem Medium sind im allgemeinen drei Wellen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten möglich, welch letztere gewisse, durch eine cubische Gleichung dargestellte Functionen der elastischen Constanten des Mittels und der Fortpflanzungsrichtung sind. In einem homogenen Medium zerfallen diese Wellen in eine longitudinale und zwei identisch gleiche transversale Wellen; in einem einachsigen Medium gibt es stets eine transversale und zwei nicht transversale, in einem zweiachsigen überhaupt keine transversale Welle mehr, falls man nicht gewisse Beziehungen zwischen den elastischen Constanten einführt, welche dann schon ein specielles Mittel definieren. Ein solches ist nun auch durch die Incompressibilitäts-Eigenschaft definiert. Infolge dieser degenerieren — wenn der Ausdruck gestattet ist — in einachsigen Medien eine, in zweiachsigen aber zwei der ursprünglich nicht transversalen Wellen, in eine, resp. zwei transversale Wellen, so dass es im incompressiblen Mittel stets zwei rein transversale Schwingungen gibt.

Auch bei der zweiten hier betrachteten Grundannahme wäre es nicht sachgemäß, in den Gleichungen (23) von vornhinein die Glieder $K'\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, K'\frac{\partial \vartheta}{\partial y}, K'\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ wegzulassen, weil damit der Factor $\lim K' = \infty$ multiplicativ verbunden erscheint. In der That würde man hiedurch eine wesentlich andere Form der Gleichungen für v erhalten.

Hieraus ist zu schließen, dass man bei Untersuchungen, welche die Lichtschwingungen mit anderen als dem Verschiebungsvector der Theilchen identificieren und den Lichtäther als incompressibles, elastisches Medium betrachten, nicht ohne weiters wegen der Incompressibiliät des Mittels bloß einen einzigen Vector einführen, d. h. sofort die Glieder, welche in der Elasticitätstheorie die Dilatation enthalten, weglassen kann, sondern dass stets von den allgemeinen Gleichungen auszugehen und erst sodann zum Grenzfalle eines Mittels ohne Compressibilität überzugehen ist. Es ist naheliegend, dass bei diesem Untersuchungsgange noch ein zweiter Vector oder eventuell eine skalare Größe, (ähnlich der Dilatation) auftreten wird, welche den Gang der Untersuchungen modificiert. Jedoch soll ein specielleres Eingehen auf diese Betrachtungen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Digitized by Google

Bemerkung über einen die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Satz des Herrn J. J. Sylvester.

Von **Leopold Gegenbauer** in Wien.

In E. Lucas „Théorie des nombres" wird der folgende Satz des Herrn J. J. Sylvester ohne Beweis mitgetheilt:

Bezeichnet $H(\alpha)$ die Zahl α, wenn der in dieser Zahl enthaltene echte Bruch $\frac{1}{2}$ ist, sonst die an α zunächst liegende ganze Zahl, so ist die Anzahl der Primzahlen, welche größer als m und kleiner als $2m$ sind, durch die in der Summe

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} H\left(\frac{m}{x}\right)\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} \quad (m \geqq 1)$$

enthaltene größte ganze Zahl gegeben, wo durch die an die Summe angehängte Zahl $\sqrt{2m}$ angezeigt wird, dass der Summationsbuchstabe x nur jene ganzzahligen Werte des ihm zugewiesenen Bereiches zu durchlaufen hat, welche aus der Einheit und dem die angehängte Zahl nicht übersteigenden Primzahlen multiplicativ erzeugt werden können.

In meiner im 60. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien enthaltenen Abhandlung „Arithmetische Untersuchungen" habe ich hervorgehoben, dass dieser Satz im Wesentlichen identisch ist mit dem folgenden speciellen Falle einer dort aufgestelten allgemeinen Relation:

$$\Theta(2m) - \Theta(m) = \left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} \left[\frac{m}{x} + \frac{1}{2}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} \quad (m \geqq 1),$$

in welcher $\Theta(\alpha)$ die Anzahl der Primzahlen unterhalb x ist.

Einen Beweis dieser Behauptung habe ich seiner Zeit in einer Versammlung des medicinisch-naturwissenschaftlichen Vereines in Innsbruck mitgetheilt, bisher aber nicht veröffentlicht.

Digitized by Google

Dies soll nun zunächst geschehen und sodann gezeigt werden, dass das Sylvester'sche Theorem ein einfaches Corollar jener bemerkenswerten Formel ist, welche Legendre zur Berechnung der Anzahl aller innerhalb der ersten Million befindlichen Primzahlen benutzt hat.

1. Die Sylvester'sche Function $H\left(\frac{m}{x}\right)$ ist von $\left[\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\right]$ nur für solche $x = x_1$ und zwar um $\frac{1}{2}$ verschieden, für welche der in $\frac{m}{x_1}$ enthaltene echte Bruch $\frac{1}{2}$, also

$$\frac{m}{x_1} = g + \frac{1}{2}$$

ist, wo g eine beliebige ganze Zahl vorstellt. Dies ist wegen der Ganzzahligkeit von x_1 nur möglich, wenn eine der beiden Gleichungen

$$m = g_1 + \frac{1}{2}$$

$$m = g_2$$

besteht, wo g_1 und g_2 ganze Zahlen sind. Ist nun

$$2m = 2^{\mu_0} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_r^{\mu_r} P^{\nu}$$

wo die ungerade Primzahl P oberhalb $\sqrt{2m}$ liegt, die ungeraden Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_r$ diese Grenze nicht überschreiten und ν gleich 0 oder 1, μ_0 aber im ersten Falle 0, im zweiten mindestens gleich 1 ist, so erhält man folgende die Relation 1 und die Summationsbedingung erfüllenden Werte von x_1:

$$x_1 = 2^{\mu_0} p_1^{\mu_1 - \alpha_1} p_2^{\mu_2 - \alpha_1} \dots p_r^{\mu_r - \alpha_r} \quad (0 \leqq \alpha_\lambda \leqq \mu_\lambda).$$

Da $\mu(x)$ für jede durch ein Quadrat (außer 1) theilbare ganze Zahl x den Wert 0 hat, so beträgt demnach der Unterschied aus der Sylvester'schen und der von mir aufgestellten Summe

$$\mp \frac{1}{2} \sum_d \mu(d),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler der ganzen Zahl $n = p_1 p_2 \dots p_r$ beziehungsweise bei geradem m der ganzen Zahl $n = 2 p_1 p_2 \dots p_r$ auszudehnen ist und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\mu_0 \gtrless 0$ ist.

Beachtet man nun, dass für jede die Einheit übersteigende Zahl n

$$\sum_d \mu(d)$$

Digitized by Google

gleich 0 ist, für $n=1$ aber den Wert 1 hat, bedenkt man ferner dass n nur dann den Wert 1 hat, wenn m oder $2m$ eine Primzahl ist, so erkennt man, dass die Differenz

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} H\left(\frac{m}{x}\right)\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} - \left(\sum_{x=1}^{x=[2m]}\left[\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ (für } 2m = \text{Primzahl)} \\ +\frac{1}{2} \text{ (für } m = \text{Primzahl)} \\ 0 \text{ (in allen anderen Fällen)} \end{cases}$$

ist. Es ist also

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} H\left(\frac{m}{x}\right)\right)_{\sqrt{2m}} = \Theta(2m) - \Theta(m) - \eta$$

wo η den Wert 1 oder 0 hat, je nachdem $2m$ eine Primzahl ist oder nicht.

2. Der von mir angegebene Ausdruck lässt sich wegen der Beziehung

$$\left[\frac{2m}{x}\right] = \left[\frac{m}{x}\right] + \left[\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\right]$$

in den folgenden transformieren:

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]}\left[\frac{2m}{x}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} - \left(\sum_{x=1}^{x=[2m]}\left[\frac{m}{x}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}}.$$

Beachtet man nun, dass nach der Legendre'schen Relation [1])

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]}\left[\frac{2m}{x}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} = \Theta(2m) - \Theta(\sqrt{2m}) + 1$$

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]}\left[\frac{m}{x}\right]\mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} = \Theta(m) - \Theta(\sqrt{2m}) + 1$$

ist, so erkennt man sofort, dass das Sylvester'sche Theorem unmittelbar aus der Legendre'schen Formel folgt.

---

[1]) Man vergleiche meine im 89. bezw. 95. Bande der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien enthaltenen Mittheilungen „Zahlentheoretische Relationen" bezw. „Arithmetische Notiz."

Ich benütze diese Gelegenheit, um einen Druckfehler zu verbessern, welchen ich bei der Correctur meiner in diesem Bande der „Monatshefte für Mathematik und Physik" enthaltenen Arbeit „Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art" übersehen habe. Seite 191, Zeile 2 von unten soll statt $C_\varrho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$ stehen $C_\varrho^{\frac{2\nu-1}{2}}(z)(1-z^2)^{\nu-1}dz$.

Digitized by Google

Schließlich möchte ich bemerken, dass sich auf dem eben auseinandergesetzten Wege aus der von mir in der zweiten der angeführten Arbeiten bewiesenen Relation

$$\Theta(2m) - \Theta(m) = [2m] - \left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} \left[\sqrt[r]{\frac{2m}{x}} \right] \mu_r(x) \right)_m ,$$

in welcher $\mu_r(x)$ den Wert 0 oder 1 hat, je nachdem x durch ein r^{te} Potenz (außer 1) theilbar ist, oder nicht, ein Analogon des Sylvester'schen Satzes ableiten lässt.[1])

[1]) In dem oben genannten Werke wird auch der von den Chinesen dem Confucius zugeschriebene Satz, dass $\frac{2^{n-1}-1}{n}$ nur für primzahlige n ganzzahlig sein kann, ohne Beweis erwähnt. Da derselbe ein höchst einfaches Primzahlkriterium liefert, so hat er das Interesse weiter Kreise erregt. Er ist aber falsch, wie schon folgendes leicht zu erweisende Theorem lehrt:

„Sind $p = 2^\tau - 1 = \varkappa\rho\tau + 1$ und $q = \varkappa\tau + 1$ Primzahlen, so ist $2^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}$."

Die kleinsten Primzahlen p, q dieser Art sind $2^5 - 1 = 31 = 2.3.5 + 1$ und $11 = 2.5 + 1$.

Bemerkungen über die einer algebraischen Curve adjungierten Curven.

Von **Otto Biermann** in Brünn.

In den folgenden Zeilen werden einige Bemerkungen zur Frage nach der Anzahl der einer algebraischen Gleichung n^{ter} Ordnung

$$F(x, y) = 0$$

adjungierten, linear unabhängigen Functionen $(n-3)^{ter}$ Ordnung gemacht, zu welchen eine später vorzubringende Notiz den Anlass bot.

Man denke zunächst die vorgelegte Gleichung in solcher Art normiert, dass y nur für $x = \infty$ unendlich wird, dass die der Gleichung zugehörige algebraische Curve C_n n Asymptoten von verschiedenen Richtungen besitzt, von denen keine die Richtung einer der Coordinatenachsen habe, und dass die im Endlichen liegenden kritischen Punkte der Curve bloß einfache Berührungspunkte der parallel der y-Achse verlaufenden Tangenten sind, aber die kritischen und zugleich singulären Punkte nur Doppelpunkte sind, von denen nur zwei auf derselben Parallelen zur x- oder y-Achse liegen sollen.

Es seien somit für die Curve C_n Eigenschaften festgesetzt, welche bekanntlich durch eindeutige Transformationen bei jeder Curve n^{ter} Ordnung zu erreichen sind, gleichviel ob ihre Gleichung $\Phi(\xi, \eta) = 0$ irreducibel ist oder nicht, wenn nur $\Phi(\xi, \eta)$ keinen mehrfachen Factor besitzt.[1])

Setzt man voraus, dass $F(x, y)$ keinen mehrfach zählenden Factor hat, und bezeichnet die Anzahl der Doppelpunkte von C_n mit r, so ist das Geschlecht p der Curve, gleichgiltig ob sie irreducibel oder reducibel ist, durch den Ausdruck definiert:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r$$

und es gilt der Satz: [2])

[1]) Nöther, Math. Annal. B. 23. [2]) Nöther, Acta math. t. 8.

Digitized by Google

Die Anzahl der der Gleichung $F(x,y)=0$ adjungierten, linear unabhängigen Functionen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist gleich p oder $p+(s-1)$, je nachdem C_n eine irreducible Curve ist oder aus s irreduciblen Curven besteht. Und darnach sind die r Gleichungen für die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ homogenen Coefficienten der adjungierten Function $\varphi_{n-3}(x,y)$, welche besagen, dass die adjungierte Curve $\varphi_{n-3}=0$ durch die r Doppelpunkte $(x_\varrho\ y_\varrho)$ $(\varrho=1,2,\ldots,r)$ einer irreduciblen Curve C_n einfach hindurchgeht, von einander linear unabhängig.

Der Theil des Theorems, wo $s=1$ ist, wurde von Riemann mit Hilfe des Dirichlet'schen Principes, von Brill und Noether mit Hilfe von Sätzen über Punktgruppen bewiesen, welche durch Scharen adjungierter Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung auf der Curve C_n ausgeschnitten werden. Doch der Beweis für den in Rede stehenden Theil des Theorems ist auch erbracht, wenn man zeigt, was sich früher als Folgerung ergab, nämlich dass die r Bestimmungsgleichungen

$$(\alpha) \qquad \varphi_{n-3}(x_\varrho, y_\varrho)=0 \quad (\varrho=1,2,\ldots,r)$$

für die Coefficienten der einer irreduciblen Gleichung $F_n(x,y)=0$ adjungierten Function φ_{n-3} linear unabhängig sind.

„Eine directe Untersuchung dieser Gleichungen auf ihre lineare Unabhängigkeit ist," wie in Stahl's Theorie der Abel'schen Functionen auf S. 73 in der Fußnote zu lesen ist, „noch nicht durchgeführt worden und stößt auf große Schwierigkeiten."

Diese Bemerkung Stahl's gab den Anlass zu dem Versuche, dadurch einen indirecten Beweis für die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen (α) und für das genannte, irreducible Curven betreffende Theorem zu liefern, dass aus der Annahme, es sei eine der Gleichungen (α) eine Folge der übrigen, und aus den mit dieser Annahme hervorgehenden Beziehungen ein Widerspruch mit einer der Voraussetzungen über die Natur einer vorgegebenen Curve C_n abgeleitet wird.

Das ist nun für solche Curven C_n, welche nicht zerfallen können, welche also weniger als $(n-1)$ einfache Doppelpunkte besitzen, sehr einfach. In der That ist zunächst $r=0$, so gibt es $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ linear unabhängige adjungierte Curven $\varphi_{n-3}=0$, denn die Coefficienten von φ_{n-3} sind an keine Gleichung geknüpft.

Ist $r=1$, so enthält die einzige Bedingungsgleichung an die Coefficienten auch eine Beschränkung, d. h. sie ist nicht identisch erfüllt, weil $1\neq 0$ ist, und es gibt $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1$ linear unabhängige Curven $\varphi_{n-3}=0$.

In jedem weiteren der nun in Rede stehenden Fälle, wo also

$$r=2,3,\ldots,(n-2)$$

ist, kann nur dann eine der r Gleichungen (α) eine Folge der übrigen sein, wenn alle Determinanten r^{ter} Ordnung aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_1^{n-3}, x_1^{n-4}y_1, \ldots, x_1, y_1, 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots\ \vdots \\ x_r^{n-3}, x_r^{n-4}y_r, \ldots, x_r, y_r, 1 \end{matrix} \right\|$$

verschwinden, also insbesondere auch die Determinanten

$$\left| \begin{matrix} x_1^{r-1}, x_1^{r-2}, \ldots, x_1, 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots\ \vdots \\ x_r^{r-1}, x_r^{r-2}, \ldots, x_r, 1 \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} y_1^{r-1}, y_1^{r-2}, \ldots, y_1, 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots\ \vdots \\ y_r^{r-1}, y_r^{r-2}, \ldots, y_r, 1 \end{matrix} \right|$$

Null sind, was nur eintreten kann, wenn zwei der Abscissen bezw. zwei der Ordinaten der r Doppelpunkte gleich sind. Das war aber ausgeschlossen; daher

Digitized by Google

ist die Annahme unzulässig, dass eine der Gleichungen (α) und umso weniger mehrere eine Folge der übrigen sind, und deshalb hat jede algebraische Curve C_n mit weniger als $(n-1)$ Doppelpunkten soviele linear unabhängige adjungierte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, als ihr Geschlecht anzeigt.

Damit ist nun auch schon der Theil der Untersuchung ausgeführt, in dem die lineare Unabhängigeit der Gleichungen (α) einfach zu ersehen war. In der That soll der letzte Satz auch von irreduciblen Curven C_n erwiesen werden, welche

$$r = (n-2) + \lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-2)(n-3))$$

Doppelpunkte haben, so kann man wohl gleich aussagen, dass gewiss nicht $(\lambda+1)$ der Gleichungen (α) eine Folge der übrigen sein können, indem dann auch zwei Determinanten der früher genannten Form und zwar $(n-2)$-reihige verschwänden, und hiedurch einer Voraussetzung über die Natur der Curve C_n widersprochen würde, aber die Beziehungen, welche aus der Annahme hervorgehen, dass nur eine Gleichung oder weniger als $(\lambda+1)$ Gleichungen Folgen der übrigen seien, sind schwer zu discutieren. Bildet man nämlich dann, wenn eine Gleichung (α) eine Folge der übrigen ist, die Determinanten r^{ten} Ordnung aus der angegebenen Matrix, wo aber r jetzt einen der letztbezeichneten Werte hat, so sieht man zwar, dass sie alle verschwinden, sobald z. B. zwei oder mehrere der Doppelpunkte zusammenfallen, und man könnte auch ersehen, dass sie alle Null sind, sobald die Curve C_n zerfällt, doch der Beweis, dass alle r-reihigen Determinanten nur unter Umständen verschwinden, welche den Voraussetzungen über die Natur der irreduciblen Curven C_n mit r getrennten Doppelpunkten zuwiderlaufen, ist heute im allgemeinen nicht direct zu erbringen, weil er den Vergleich der Determinanten mit denjenigen ganzen rationalen Functionen erheischt, deren Nullstellen die Abscissen bezw. die Ordinaten der Doppelpunkte sind.

Die Herstellung dieser Functionen ist zwar in jedem besonderen Falle durch directe endliche Prozesse zu vollführen, doch kann bei beliebigem n kaum an ihre Beschreibung gedacht werden; und solange diese nicht möglich ist, muss man auf die directe Ermittlung der nothwendigen Bedingungen verzichten, unter denen alle r-reihigen Determinanten der früheren Matrix verschwinden; und gerade so auch auf den Beweis für die Existenz einer algebraischen, irreduciblen Curve n^{ter} Ordnung mit r Doppelpunkten, wenn $r < \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1$ ist. Die Schwierigkeiten zur Untersuchung der Gleichungen (α) erweisen sich also ohne das Theorem von der Anzahl der einer irreduciblen Curve C_n adjungierten linearen unabhängigen Curven $\varphi_{n-3} = 0$ jetzt als unüberwindlich.

Zum Beweise des Satzes, dass auch jede irreducible Curve mit mehr als $(n-2)$ Doppelpunkten so viele linear unabhängige Curven $\varphi_{n-3} = 0$ besitzt, als ihr Geschlecht anzeigt, muss man also einen anderen Weg wählen.

Durch Induction kommt man aber zu keinem brauchbaren Ergebnis, sei es nun, dass man von den irreduciblen Curven C_n vom Geschlechte

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r \quad (r = 0, 1, \ldots, n-2)$$

oder denen vom Geschlechte

$$p = 0, 1$$

ausgeht, für die das Theorem bekanntlich auch leicht nachzuweisen ist, sei es, dass man davon ausgeht, dass das Theorem für jede irreducible Curve vierter und auch fünfter Ordnung besteht. Somit bedarf man zum Beweise wesentlich anderer Hilfsmittel, wie solche von Riemann, Brill und Noether angegeben wurden.

Digitized by Google

Internationaler Verein

zur Beförderung des Studiums der Quaternionen und verwandter Systeme der Mathematik.

Auszug aus den Satzungen.

Zweck des Vereines ist, das Studium der Rechnungen mit Vectoren und verwandten Größen nach Möglichkeit zu fördern. — Geleitet wird derselbe von dem Vorsitzenden (zur Zeit Prof. Robert S. Ball in Cambridge), dem Generalschriftführer und Schatzmeister (z. Z. Prof. Alexander Macfarlane, Lehigh University, South-Bethlehem Pa. U. S.) und den für die einzelnen Länder fungirenden National-Schriftführern (für Deutschland z. Z. Prof. Dr. Schlegel in Hagen i. W.). Die beiden ersten werden durch Stimmenmehrheit aller, die letzteren durch Stimmenmehrheit der Mitglieder ihres Landes für 2 Jahre unter Offenhaltung der Wiederwahl gewählt. — Die Meldung zur Mitgliedschaft, wie auch die event. Anzeige des Austritts, erfolgt bei den National-Schriftführern, an die auch der Jahresbeitrag in der Höhe von 12 fcs (= 10 M.) zu entrichten ist. Ehrenmitgliedschaft ist vorgesehen. Vorsitzender und Generalschriftführer sind die verantwortlichen Herausgeber der Vereinspublikationen. Die National-Schriftführer berichten jährlich über die in ihrem Lande erfolgten Veröffentlichungen aus den die Vereins-Interessen berührenden Gebieten der Mathematik. Die Mitglieder werden um Einsendung von Separatabzügen derartiger von ihnen veröffentlichter Arbeiten ersucht. Ein ausführlicher Prospect wird auf Verlangen vom National-Schriftführer versandt. Meldungen zum Beitritt werden baldigst erbeten.

Hagen i. W. im Juli 1899.

Prof. Dr. Schlegel.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

Literatur-Berichte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von Dr. Leop. Pfaundler, Professor der Physik an der Universität Graz. Unter Mitwirkung des Dr. Lummer, kaiserl. Professor bei der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg. In drei Bänden. Mit 2981 Holzschnitten und 13 Tafeln, zum Theil in Farbendruck. Zweiter Band. Erste Abtheilung XX + 1193 S. gr. 8. 1897. Zweite Abtheilung XIV + 768 S. gr. 8. 1898. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig. Ladenpreis 18 bez. 16 M.

Der vorliegende zweite Band der neunten Auflage des rühmlichst bekannten Lehrbuches, durch welches in leicht fasslicher Weise und unter bloßer Zuhilfenahme derjenigen mathematischen Kenntnisse, welche bei jedem Gebildeten vorausgesetzt werden können, die Hauptlehren der Physik weiteren Kreisen vermittelt werden, ist in zwei Abtheilungen zerlegt, in die Lehre vom Lichte und in die Lehre von der Wärme Die Lehre vom Lichte wird in dieser Auflage in zum größten Theil ganz neuer Darstellung gebracht, damit das Buch dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft genügt. Der katoptrische und dioptrische Theil und die damit zusammenhängenden Partien entstammen der Feder Lummer's der auch sonst noch an der Bearbeitung der Optik sich betheiligte. Die erste Abtheilung zerfällt in folgende 19 Capitel: 1. Über das Wesen, die Fortpflanzung und die Stärke des Lichtes. 2. Reflexion und Brechung des Lichtes an ebenen Flächen. 3. Reflexion und Brechung des Lichtes an Kugelflächen (A. Reflexion und Brechung des Lichtes an einer Kugelfläche. B. Brechung an beliebig vielen Kugelflächen mit gemeinschaftlicher Axe (Centrirtes System). C. Abbildung durch ein aus zwei Kugelflächen zusammengesetztes Gesammtsystem (Linsen als specieller Fall). 4. Prismatische Farbenzerstreuung (Dispersion des Lichtes). 5. Die Spectralanalyse. 6. Die Umwandlungsproducte oder Wirkungen des absorbierten Lichtes. 7. Die Wellenlehre des Lichtes und die daraus hergeleiteten Grundgesetze der geometrischen Optik. 8. Abbildung im Sinne der Wellentheorie. 9. Aberrationsfreie, spiegelnde und brechende Flächen, caustische Curven, Astigmatismus. 10. Erweiterung des Abbildungsgebietes bei centrirten optischen Systemen. (A. Die bei einfarbigem Lichte auftretenden Abbildungsfehler. B. Abbildungsfehler infolge der Farbenzerstreuung (Dispersion) des Lichtes. C. Über zweilinsige Objective). 11. Das Auge und die Gesichtsempfindungen. 12. Über die Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung optischer Systeme. (A. Strahlenbegrenzung, Apertur, Vergrößerungskraft. B. Intensität objectiver und Helligkeit subjectiver Bilder, entworfen durch optische Systeme centrirter Kugelflächen. C. Abbildungsgesetze für nicht selbstleuchtende Objecte). 13. Über die optischen Instrumente (A. die photographischen Systeme. B. Die Projectionsapparate.

Digitized by Google

C. Das einfache Mikroskop oder die Lupe. D. Apparate mit Ocular.) 14. Interferenz des Lichtes. 15. Beugung des Lichtes. 16. Geradlinige Polarisation des Lichtes. 17. Von der doppelten Brechung. 18. Chromatische Polarisation oder die Farben doppeltbrechender Krystallplatten im polarisierten Lichte. 19. Elliptisch und circular polarisiertes Licht.

Die zweite Abtheilung dieses Bandes, die Lehre von der Wärme umfassend, hat allerdings im wesentlichen die frühere Anordnung behalten, sie wurde aber nahezu in allen ihren Theilen neu bearbeitet, wobei Veraltetes ausgeschiedene, Lücken ergänzt, die Darstellung verbessert und die Resultate der Forschungen bis in die neueste Zeit aufgenommen wurden. Als umfangsreichere Einschaltungen mögen besonders angeführt werden: die Gastheorien von Van der Waals, das Gasthermometer nach Chappius, E. Wiedemanns und M. Töplers Arbeiten über die Volumänderung beim Schmelzen, die von Raoult und van t' Hoff entdeckten Gesetze über die Beziehungen zwischen Gefrierpunktserniedrigung und Molekulargewicht, der Gefrierapparat von E. Beckmann, Olszewski's und Linde's Methoden und Resultate über die Verflüssigung der Gase, die Darstellung der Zustandsverhältnisse der Körper durch die Temperaturfläche von Rittner, die Phasenregel von Gibbs, die Dampfcalorimeter von Rosenthal, Neesen, Bunsen und Joly, Pfaundler's Stromcalorimeter, die specifische Wärme des Wassers, die directe Bestimmung der specifischen Wärme der Gase bei constantem Volum von Joly, die thermochemischen Bezeichnungen von Thomsen und Ostwald, eine Zusammenstellung der genauesten Werte des mechanischen Wärmeäquivalentes nach Grätz, die A. Voss'sche elementare Ableitung des Poisson'schen oder potenzierten Mariotte'schen Gesetzes, die bedeutende Erweiterung der Lehre von den umkehrbaren und nicht umkehrbaren Processen, der Theorie der Gefrierpunktsänderung durch Druck, der Wärmeleitung und Wärmestrahlung, ferner die Bolometer von Lummer und Kurlbaum, das Radiophon, die Temperatur der Meere und Seen, die barometrische Höhenmessung, die Windmesser, die Aspirationspsychrometer und endlich die klimatische und sanitäre Bedeutung der Luftfeuchtigkeit.

Die Darstellung ist meisterhaft, die Ausstattung vorzüglich, daher ist auch die neue Auflage, noch mehr als ihre Vorgängerinnen geeignet, der physikalischen Wissenschaft recht viele Anhänger und Freunde aus weiteren Kreisen zuzuführen und zu erhalten.

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Herausgegeben von Dr. Ferdinand Rudio, Professor am eidgenössischen Polytechnikum. Mit einem farbigen Titelbild und sechs in den Text gedruckten Figuren. VIII + 306 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 12—.

Entsprechend dem Art. 7 des Reglements für den vom 9. bis 11. August 1897 in Zürich tagenden internationalen Mathematiker-Congress, durch welchen einem aus dem Präsidenten und den beiden Generalsecretären des Congresses bestehenden Comité die Veröffentlichung der Verhandlungen desselben übertragen wurde, theilt Herr Rudio in dem vorliegenden Werke die Vorgeschichte und den Verlauf der Versammlung auf Grund der geführten Protokolle, ein

Digitized by Google

Verzeichnis der dem Congresse überreichten Schriften, die Liste der 208 Theilnehmer mit ihren genauen Adressen und in 34 Abhandlungen die wissenschaftlichen Vorträge des Congresses einschließlich solcher, die zwar angekündigt aber aus irgend einem Grunde nicht gehalten wurden, theils vollständig, theils im Auszuge u. zw. in derjenigen Sprache mit, in welcher sie gehalten bezw. geschrieben wurden. Von diesen Vorträgen entfallen:

1. auf die zwei Hauptversammlungen 4, welche der Reihe nach von H. Poincaré, A. Hurwitz, G. Peano und F. Klein stammen;

2. auf die Sitzungen der Section für Arithmetik und Algebra 11, welche H. Weber, C. Reuschle, C. Stéphanos, P. Gordan, F. Enriques, E. Schröder, G. Rados, J. Pervouchine, W. F. Meyer, L. Stickelberger, Ch. de la Vallée Poussin zu Verfassern haben;

3. auf die Sitzungen der Section für Analysis und Functionentheorie 8, welche von F. Brioschi, E. Picard, J. Hadamard, S. Pincherle, E. Borel, N. Bougaïef, L. Autonne, Z. de Galdeano verfasst wurden;

4. auf die Sitzungen der Section für Geometrie 6 u. zw. je einer von Th. Reye, F. Gerbaldi, C. Burali-Forti, J. Andrade, G. Fano und H. Brunn;

5. auf die Sitzungen der Section für Mechanik und mathematische Physik 2, welche von H. Stodola und N. Joukowsky gehalten wurden, endlich

6. auf die Sitzungen der Section für Geschichte und Bibliographie 3, welche von H. G. Zeuthen, G. Eneström und G. Loria herrühren.

Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen von Professor Dr. L. Krüger, Abtheilungsvorsteher am königl. preußischen geodätischen Institut. (Veröffentlichung des königl. preußischen geodätischen Institutes und Centralbureaus der internationalen Erdmessung.) IV + 106 S. 4°. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 8·40.

Die Helmert'sche Methode zur Ermittlung der Abweichungen des Geoids von einem Referenzellipsoid, welche bekanntlich im wesentlichen in der Aufstellung von möglichst ausgedehnte Strecken umfassenden Lotabweichungssystemen mit einem gemeinschaftlichen Centralpunkt unter gleichzeitiger Ausnützung der sich dabei ergebenden Bedingungsgleichungen besteht, liefert für die Lotabweichungscomponenten und die Laplace'schen Gleichungen Ausdrücke, die außer den Correctionsgliedern für die astronomischen Daten und die Elemente des angenommenen Referenzellipsoids Terme enthalten, mit Hilfe deren die Verbesserungen der Seiten und der Winkel des geodätischen Linienzuges zwischen dem Anfangspunkte und dem betreffenden astronomischen Punkte berücksichtigt werden können. Der Verfasser der vorliegenden bemerkenswerten Arbeit stellt nun Controlformeln für die Coëfficienten dieser Terme auf und weist die praktische Verwendbarkeit derselben nach. Die Arbeit zerfällt in eine kurze Einleitung und drei Capitel. Das erste Capitel erörtet die Abhängigkeit der geodätischen Linie und der Lotabweichungen vom zugehörigen geodätischen Linienzuge mit einer Anwendung auf die geodätische Linie Rauenberg-Königsberg. Das zweite Capitel bespricht die Gewichtsbestimmungen für geodätische Linien, die mit Hilfe von einfachen Ketten abgeleitet wurden, wobei berücksichtigt wird, ob

Digitized by Google

die Ausgleichung der Kette mit Winkel- oder Richtungsverbesserungen erfolgte und gibt eine Anwendung auf die der märkisch-schlesischen Netzgruppe der Längengradmessung angehörige geodätische Linie Leipzig-Schneekoppe. Das dritte Capitel ist der Untersuchung des Einflusses gewidmet, welchen der nach Ausgleichung der Dreieckswidersprüche vorgenommene Anschluss der Anfangs- und Endseite einer Dreieckskette an zwei vorgeschriebene Werte auf die Winkel und Seiten der Kette und auf eine ihr angehörige geodätische Linie ausübt.

Beiträge zur Theorie des Reversionspendels von F. R. Helmert. (Veröffentlichung des königl. preußischen geodätischen Institutes und Centralbureaus der internationalen Gradmessung.) Mit einer Tafel. 92 S. 4°. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 7·60.

Die vorliegende äußerst verdienstvolle Publication des rühmlichst bekannten Verfassers umfasst folgende drei Abschnitte: I. Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen. II. Vorversuche für die Bestimmung der Länge des mathematischen Secundenpendels. III. Verschiedene Beiträge zur Theorie. Im ersten Capitel wird die angenäherte Ermittlung des Einflusses gelehrt, welchen die elastische Biegsamkeit der Pendelkörper auf die Schwingungsdauer ausübt. (Darauf, dass dieselbe bei der Theorie der Pendelbewegung berücksichtigt werden muss, hat, wie hier bemerkt werden mag, zuerst 1884 Peirce hingewiesen; und 10 Jahre später Dr. Kühnen auf der allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung in Berlin neuerdings aufmerksam gemacht.) Zum Schlusse des Capitels wendet Helmert seine Formeln zur Berechnung des Biegungseffectes für das Viertelmeterpendel, das ältere steife und das neue stark biegsame Meterpendel des Berliner geodätischen Institutes, das italienische Meterpendel des Professors Lorenzoni das leichte und schwerere Meterpendel der österreichischen Gradmessungs-Commission und das französische Meterpendel des Herrn Defforges an.

Das zweite Capitel enthält eine ausführliche Besprechung der vom Berliner geodätischen Instituteu unternommenen vorläufigen Bestimmung der Länge L des mathematischen Secundenpendels, aus denen sich $L = 994{\cdot}263\ mm$ mit dem mittleren Fehler $\pm 0{\cdot}020\ mm$ ergab.

Im dritten Abschnitte wird auseinandergesetzt, welchen Einfluss die umgebende Luft, der nicht hinreichend genaue Parallelismus der Schneiden, die nicht vollkommene Symmetrie der äußeren Form in Bezug auf die Aufhängung an beiden Schneiden, das Abrollen der Schneide auf dem Lager, die Verschiebungen der Schneide und des Lagers, das Mitschwingen des Stativs und Untergrundes (Bestimmungen der hiedurch nöthigen Correction mittelst des Wippverfahrens mit der Federwage), das Gleiten der Schneide auf dem Lager, die Größe des Schwingungsbogens, das Glissement und verschiedenartige kleine Bewegungen der Schneide, die Dehnung des Pendels und ein Höhengradient der Temperatur auf die Schwingungsdauer des Revisionspendels haben. Schließlich wird eine Zusammenstellung der Grundformeln und die Reduction der Schwingungsdauer auf gleiche Luftdichte vorgenommen.

Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung von Dr. Alois Walter, Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule in

Digitized by Google

Graz. Veröffentlicht mit Unterstützung der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mit 4 Textfiguren. VII + 74 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 2·80.

Die bisher für die beim Probleme der terrestrischen Strahlenbrechung in Betracht kommenden Größen entwickelten Formeln basieren auf ganz speciellen Annahmen über die physikalische Beschaffenheit der Atmosphäre, soweit dieselbe von der Erhebung über die Erdoberfläche abhängt. Der Verfasser behandelt dieses Problem unter bloßer Benützung der Voraussetzung, dass diese in gleich hoch gelegenen Punkten dieselbe ist, und gelangt dadurch zu allgemeinen Formeln, aus denen man nach Bedarf für jede Hypothese die derselben entsprechenden speciellen ableiten kann. Um die ohne irgendwelche Vernachlässigung oder Vereinfachung dargestellten Resultate dieses geometrischen Theiles seiner Arbeit auch für die Praxis nutzbar zu machen zeigt er im zweiten physikalisch-meteorologischen Theile derselben wie der Brechungsquotient der Luft als Function von Größen, welche die physikalische Beschaffenheit derselben charakterisieren, dargestellt werden kann und wie diese letzteren Größen durch die Entfernung vom optischen Mittelpunkte der Atmosphäre ausgedrückt werden können. Aus dem für den Brechungscoëfficienten ermittelten Ausdruck wird sodann der erste Refractionscoëfficient zunächst ohne Annahme eines bestimmten Gesetzes für den Temperaturverlauf in der Atmosphäre und sodann für den Fall abgeleitet, dass diese Temperatur eine lineare Function der Höhe ist. Weiters gibt der Verfasser Ausdrücke für die Refractionscoëfficienten unter Benützung der Bauernfeind'schen Relationen, ermittelt das am Beobachtungsorte vorhandene Temperaturgefälle für negative verschwindende und positive Refraction, bespricht verschiedene bei geodätischen Messungen erhaltene Werte des ersten Refractionscoëfficienten und zeigt wie Temperaturgefälle und Refractionscoëfficienten am Beobachtungsorte aus einseitigen und gegenseitigen Zenithdistanzmessungen berechnet werden können. Die gediegene Arbeit verdient vollste Anerkennung.

Vierstellige Tafeln mit Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg (Sammlung Göschen) 128 S. 12°. G. J. Göschen, Leipzig 1898. Ladenpreis geb. M. 0·80.

Die vorliegenden Tafeln verfolgen denselben Zweck und haben die gleiche Anordnung wie die im Teubner'schen Verlag erschienenen „Fünfstelligen Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen" des Verfassers, welche in den Literaturberichten des 8. Jahrganges der „Monatshefte" (S. 29) besprochen wurden. Um Irrthümern beim Gebrauche vorzubeugen, sind alle Logarithmen bezw. Mantissen roth, alle übrigen Zahlen schwarz gedruckt. Die Tafeln bestehen aus folgenden Theilen: 1. Von der Zahl zum Logarithmus (S. 5—32). 2. Von den Winkeln zu den Logarithmen der trigonometrischen Functionen (S. 33—64). 3. Von den Logarithmen der trigonometrischen Functionen zu den Winkeln (S. 65—88). 4. Von den Logarithmen der Zahlen zu den Zahlen selbst (S. 89—119) und 5. Anhang (S. 120—128). Der Anhang zerfällt in Abtheilungen: A) Vom Sinus selbst zum Winkel. B) Vom

Digitized by Google

Cosinus selbst zum Winkel. C) Vom Tangens selbst zum Winkel. D) Vom Cotangens selbst zum Winkel. E) Vom Winkel zum Sinus und Tangens bezw. zum Cosinus und Cotangens selbst. F) Lebensversicherungstafel (Summen der discontierten Zahlen der Lebenden nach der Absterbestatistik des preußischen Staates bei einem Zinsfuße von 4%). G) Astronomie (Declination und Rectascension der Sonne, Zeitgleichung, Länge und Breite verschiedener Orte, Länge des Sterntages, des mittleren Erdradius und des mittleren Grades, die mittlere Entfernung der Sonne). H) Physik (Specifische Gewichte, Ausdehnungscoëfficienten, specifische Wärme, Leitungswiderstände, durch 1 Ampère pro Minute abgeschiedene Volumina, Brechungsindices, Schmelzpunkte, Siedepunkte, Gewichte verschiedener Substanzen, Geschwindigkeit des Fußgängers, Schalles, Lichtes u.s.f., Druck des gesättigten Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen, Tonintervalle). I) Chemie (Atomgewichte der Elemente). K) Mathematische Hilfstafeln (Logarithmen der Aufzinsungsfactoren; die Werte von e, π, arc 1°, arc $1'$, arc $1''$, $\frac{1}{\log e}$, $\frac{180}{\pi}$, $57{\cdot}2958^{\circ}$, $\frac{1}{\pi}$, $\log\frac{\pi}{3}$ nebst den Logarithmen der 5 zuerst angeführten Größen, Quadratzahlen, Quadrat- und Cubikwurzeln.

Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen. Erstes Heft: Die Bessel'sche Function erster Art. Von Dr. phil. J. H. Graf, ordentlicher Professor der Mathematik an der Hochschule Bern, und Dr. phil. Eduard Gubler, Privatdocent für Mathematik an der Hochschule Zürich. V + 142 S. gr. 8°. K. J. Wyss, Bern 1898. Ladenpreis M. 3.20.

Die Verfasser der vorliegenden Schrift haben sich bei ihren Darstellungen der Theorie der theoretisch ungemein interessanten und für die verschiedensten Theile der Physik und Astronomie hochwichtigen Bessel'schen Functionen ziemlich genau dem von ihnen in Hochschulvorlesungen wiederholt benützten Lehrgange angeschlossen, welchen ihr Lehrer Prof. Dr. Ludwig Schläfli in seinen Vorträgen und Manuscripten eingeschlagen hat. Indem Referent sich vorbehält, nach Erscheinen des unter der Presse befindlichen zweiten Heftes, welches die Bessel'schen Functionen zweiter Art, sowie die Beziehungen beider Functionen und bestimmte Integrale, welche Bessel'sche Functionen enthalten, behandeln wird, das Werk eingehend zu besprechen, theilt er hier zur ungefähren Orientierung derjenigen Mathematiker, welche sich für die genannten Transcendenten interesieren, mit, dass das vorliegende Heft aus folgenden Abschnitten besteht: 1. Einleitung (S. 1—24). 2. Definition und Eigenschaften der Bessel'schen Function erster Art (S. 25—48). 3. Darstellung der Bessel'schen Function erster Art durch bestimmte Integrale (S. 49—81). 4. Schätzung der Bessel'schen Function erster Art für ein großes Argument nebst einem Anhange über das Verhalten dieser Function bei gleichzeitigem Verschwinden von Parameter und Argument unter Beibehaltung eines endlichen Verhältnisses (S. 82—107). 5. Ableitung der Bessel'schen Function erster Art nach ihrem Parameter und Untersuchung über die Wurzeln der Gleichung $J^{a}_{(x)} = 0$ (S. 108—122). 6. Entwicklung einer Function nach Bessel'schen Functionen desselben Parameters (S. 123—139). 7. Anmerkungen (S. 140—142).

Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. Per Alfredo

Digitized by Google

Capelli, Prof. ordinario nella reali Università di Napoli, Socio della reale Accademia delle scienze di Napoli, Socio onorario della reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, ecc. Seconda edizione con aggiunte. XVI + 680 p. 8°. Pellerano, Napoli 1898. Prezzo: Lire 8.50.

Wenig mehr als 4 Jahre sind seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses aus Universitätsvorlesungen entsprungenen trefflichen Buches entstanden und schon sah sich der Verfasser genöthigt, eine neue Ausgabe zu veranstalten, welche er durch eine Reihe von Verbesserungen, Umänderungen und bemerkenswerten Vermehrungen, die fast in jedem Abschnitte auftreten, noch wertvoller als ihre Vorgängerin machte. In dem Buche werden der Reihe nach in klarer, präciser, dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft völlig entsprechender Weise unter genauer Berücksichtigung der einschlägigen Literatur bis zum Tage der Druckfertigstellung behandelt die Operationen mit reellen Zahlen, die Theorie der Determinanten und deren Verwendung zur Lösung algebraischer Probleme ersten Grades, die Elemente der Theorie der ganzen rationalen Functionen, Zerlegung rationaler Functionen, die Rechnungsoperationen mit complexen Zahlen, die wichtigsten auf die Wurzeln einer algebraischen Gleichung bezüglichen Sätze, Theilbarkeit und Elimination, Transformation der Gleichungen, allgemeine Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade, die Grundsätze der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten (u. a. Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allemeinen Gleichungen von höherem als den viertem Grade, Beweis der Unmöglichkeit der Trisection des Winkels, der Notwendigkeit des Casus irreducibilis der Gleichungen dritten Grades u. s. f.), die lineare Transformation der algebraischen Formen, die einfachsten Theoreme über Invarianten und Covarianten, die allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen mit reellen Coëfficienten und die numerische Auflösung der Gleichungen. Den einzelnen Paragraphen sind Noten beigefügt, die fast durchwegs bewiesene, sehr interessante Sätze enthalten, ein reicher, zweckmäßig gewählter Übungsstoff erleichtert dem Leser das richtige Erfassen und das Eindringen in die Bedeutung der vorgeführten Theoreme.

Vorlesungen über technische Mechanik von Dr. Aug. Föppl, Prof. a. d. techn. Hochschule in München. Erster Band. Einführung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. XV + 412 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1898. Ladenpreis geb. M. 10.—.

Der erste Band von Föppl's Mechanik, deren Tendenz in der im IX. Jahrgange der „Monatshefte" enthaltenen Besprechung des dritten Bandes charakterisiert wurde, soll den Leser in das Gebiet der technischen Mechanik einführen. Es werden daher in demselben die wichtigsten grundlegenden Begriffe, die sich an diese unmittelbar anschließenden Sätze und eine Reihe der einfacheren Anwendungen derselben vorgeführt. Nach einer Ursprung und Ziel der Mechanik darlegenden Einleitung, werden daher der Reihe nach das Wichtigste aus der Mechanik des materiellen Punktes, des starren Körpers, der Lehre vom Schwerpunkte, ferner über Energieumwandlungen, Reibung, Elasticität und Festigkeit, den Stoß fester Körper und die Mechanik flüssiger Körper in klarer und eleganter Weise erörtert. Den einzelnen Abschnitten sind einfache

Digitized by Google

Aufgaben nebst ihren Lösungen angefügt. Den Schluss des Bandes bildet eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln. Mit Recht beschränkt sich der Verfasser in diesem Bande beim Gebrauche mathematischer Hilfsmittel auf das Nothwendigste. „Je weniger Rechnung für die Lösung einer Aufgabe der Mechanik aufgewendet zu werden braucht, desto besser ist ja diese Lösung.“ Durch die Vermeidung von entbehrlichen Rechenbeiwerk erreicht man nämlich, dass die Aufmerksamkeit vorwiegend den concreten Vorgängen, auf deren Untersuchung es ankommt, zugewendet bleibt und dass sie nicht durch die formalen Rechenoperationen abgelenkt wird.

Die Dynamik der Systeme starrer Körper in zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen von Edward John Routh, Sc. D., LL. D., F. R. S. etc., Ehrenmitglied von Peterhouse-College, Mitglied des Senats der Universität London. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit Anmerkungen von Prof. Dr. Felix Klein zu Göttingen. Zweiter Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. IX + 544 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1898. Ladenpreis geb. M. 14.—.

Rascher, als man erwarten konnte, ist dem im IX. Jahrgange der „Monatshefte“ besprochenen ersten Bande der Übersetzung der Routh'schen Dynamik der zweite gefolgt. Derselbe ist eine Übertragung der fünften Auflage des Werkes „The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, being part II of a treatise on the whole subject with numerous exemples by Edward John Routh“ unter Benützung der Vorarbeiten des Verfassers für die sechste englische Auflage, die gegenüber der fünften zahlreiche Zusätze und Änderungen aufweisen wird. Er bietet zwar, wie der Verfasser betont, nicht so sehr eine systematische Entwicklung des Gegenstandes, als vielmehr eine Reihe möglichst von einander unabhängiger Monographien, doch tritt in ihm die Frage nach den kleinen Schwingungen der Systeme stets wieder in den Vordergrund des Interesses. Die ganze deutsche und französiche Literatur hat, wie F. Klein in seinen „Bemerkungen“ zu diesem Bande bemerkt, „kein Werk, welches diese unter praktischen Gesichtspunkten so bedeutungsvolle Erscheinungsclasse nach der praktischen Seite hin auch nur entfernt mit der Vollständigkeit behandelte, wie es hier bei Routh geschieht.“ Die vielen historischen Notizen, sowie die zahlreichen Beispiele, welche theils zur Übung, theils zur Erläuterung und Vervollständigung der im Text gegebenen Theorien dienen, sind eine sehr willkomme Zugabe zu den meisterhaften theoretischen Entwicklungen. Der vorliegende Band umfasst folgende 14 Abschnitte: 1. Bewegliche Axen und relative Bewegung. 2. Schwingungen um die Gleichgewichtslage. 3. Schwingungen um einen Bewegungszustand. 4. Die Bewegung der Körper, an denen keine Kräfte angreifen. 5. Die Bewegung der Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte. 6. Die Beschaffenheit der durch lineare Gleichungen gegebenen Bewegung und die Stabilitätsbedingungen. 7. Freie und erzwungene Schwingungen von Systemen. 8. Bestimmung der Integrationsconstanten durch die Anfangsbedingungen. 9. Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen. 10. Anwendung der Variationsrechnung. 11. Präcession und Nutation. 12. Die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt. 13. Die Bewegung eines Fadens oder einer

Digitized by Google

Kette. 14. Die Bewegung einer Membran. Den Schluss bilden 5 Noten des Verfassers („Transformation auf Hauptcoordinaten", „Die Bedingungen, unter denen eine quadratische Function zweiten Grades definiert ist", „Spannung in einem gekrümmten, biegsammen und ausdehnbaren Stab", „Belastete Membranen", „Conjugierte Functionen und Wirbelbewegung"), sowie Bemerkungen von Prof. F. Klein und ein ausführliches Namen- und Sachregister.

Das Routh'sche Werk bietet jedem Mathematiker vielfache Anregung.

Keplers Traum vom Mond. Von Ludwig Günther. Mit dem Bildnis Keplers, dem Facsimile-Titel der Originalausgabe, 24 Abbildungen im Text und zwei Tafeln. XXII + 185 S. gr. 8° B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 8.

Nicht lange vor seiner Abreise von Sagan nach Regensburg zum Reichstage begann Kepler die Drucklegung seines bis in die jüngste Zeit wenig beachteten und verkannten Werkes „Somnium", das selbst die meisten Fachgelehrten seiner etwas eigenthümlichen Form wegen für „kein astronomisches Buch, sondern für eine Satire auf seine Zeit, eine beißende Schilderung der Gebrechen seiner Zeitgenossen in Kunstausdrücken verhüllt" hielten, während die Laien in ihm einen Vorgänger von Cyrano de Bergerac's „Histoire comique des états et empires de la lune", Athanasius Kircher's „Iter ecstaticum coeleste", Fontenelle's „Entretiens sur la pluralité des mondes", Huygens „Kosmotheoros", Godwin's „Mann im Monde", Voltaire's „Épitre à Uranie" und Jules Verne's „Von der Erde zum Monde" und „Rings um den Mond" erblickten. Ein gründliches Studium der zahlreichen an Umfang den Text weit übertreffenden Noten Kepler's zeigt aber deutlich, dass er uns in diesem Werke „eine methodische Untersuchung aller die wechselseitigen Beziehungen zwischen Erde und Mond betreffenden Fragen gibt, wobei er fast alle Gebiete des Wissens streift und daher eine naturgemäße Entwicklung derjenigen Betrachtungen bietet, die er in seinen früheren Werken zerstreut und nur gelegentlich ausgeführt hat, dass also das „Somnium" nicht allein eine auf copernicanischen Principien gegründete Mondastronomie, sondern auch ein Compendium von „Keplers Werken" vorstellt. Weder Kepler noch sein Schwiegersohn Jakob Bartsch, der nach Kepler's Tode die Weiterführung der Drucklegung besorgte, erblickten das fertige Werk, dies war erst dem Sohne des grossen Meisters, Ludwig, im Jahre 1634 vergönnt, der nach Bartsch's Ableben die Herausgabe überwachte. Dieser fügte dem Traum auch den Appendix, einen wahrscheinlich aus dem Jahre 1623 stammenden, später von Kepler mit Noten versehenen Brief an den Jesuitenpater Paulus Guldin bei. Diese in lateinischer Sprache geschriebene Originalausgabe hat Herr Günther übersetzt und mit zahlreichen Erläuterungen versehen, durch welche die von Kepler in den Noten niedergelegten Gedanken begründet, aus seinen eigenen Werken auf ihren Ursprung zurückgeführt, weiter verfolgt und vom heutigen Standpunkte der Wissenschaft aus beleuchtet werden. Jeder Leser von allgemeiner Bildung kann das Buch verstehen, von dessen Original der Uebersetzer mit Recht bedauert, dass es „nicht in der Sprache Luther's geschrieben wurde, da es sonst sicherlich schon damals die Naturwissenschaften volksthümlich gemacht hätte." Das dem Buche beigegebene Bildnis Kepler's ist eine Reprodutcion eines im Besitze des Benedictinerstiftes

Digitized by Google

zu Kremsmünster befindlichen, auf einer Platte von Eichenholz in Oel auf dunklem Grunde (nach Wolf im Jahre 1610) angefertigten Gemäldes, welches Abt Reslhuber im Jahre 1864 von dem Notar Gruner, einem Nachkommen der Geschwister Keplers, kaufte.

J. A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite durchgesehene Auflage von G. Bohlmann. Erster Band. Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. XVI + 570 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis M. 10.—

Das Serret'sche Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, welches seltene Klarheit mit einer großen Vollständigkeit in den Anwendungen dieser Theorie verbindet und dadurch für Studierende besonders geeignet ist wurde im Jahre 1884 von Harnack ins Deutsche übertragen, da es, wie der Bearbeiter richtig bemerkt, nicht angezeigt ist, dem Lernenden, „der sich neue Begriffe zu eigen machen soll, ein Lehrbuch zu empfehlen, welches in einer fremden Sprache geschrieben ist, selbst wenn er dieselbe einigermaßen beherrscht". Wenn nun auch Harnack im Ganzen weder den Inhalt des Werkes zu vergrößern, noch den Umfang der von Serret gegebenen Sätze zu erweitern bestrebt war, so konnte er doch nicht umhin, durch eine Reihe von größeren in den Text eingestreuten Bemerkungen und Ausführungen jene Ergänzungen anzubringen, welche ihm unbedingt nothwendig erschienen, um das Werk dem damaligen Standpunkte der Wissenschaft anzupassen. Weil für diese zahlreichen Noten ein kleinerer Druck verwendet wurde, so erhielt das Buch einen etwas inhomogenen Charakter und büßte dadurch einen seiner Hauptvorzüge, die große Lesbarkeit, ein. Da der Herausgeber der zweiten Auflage die in den letzten 14 Jahren gemachten Errungenschaften auf dem Gebiete der Analysis unmöglich unberücksichtigt lassen konnte, so würde bei Befolgung des Harnack'schen Verfahrens der oben beklagte Mangel der ersten Auflage wesentlich vergrößert worden sein, und daher hat er mit Recht die Harnack'schen Bemerkungen und seine eigenen Zusätze und Änderungen in den Text verwoben. Allerdings ist dadurch ein Werk entstanden, das wohl kaum mehr als dasjenige Serret's bezeichnet werden kann. Es mögen nun die wesentlichsten Änderungen, welche diese Auflage gegenüber der zweiten aufweist, angegeben werden.

Das erste Capitel („Einleitende Begriffe") und das elfte („Über Functionen einer complexen Variabelen") wurden vollständig umgearbeitet. Die Theorie der Maxima und Minima (6. Capitel) wurde wesentlich geändert und verbessert, in der Theorie der ebenen Curven (7. Capitel) wurde die Behandlung der singulären Punkte bedeutend vereinfacht; ferner wurden alle Betrachtungen, welche mehr oder weniger versteckt den Integralbegriff benutzten, entfernt, so beispielsweise bei der Ermittelung des Flächeninhaltes und der Bogenlänge einer ebenen Curve (7. Capitel) und der Bogenlänge einer Raumcurve (9. Capitel).

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden die einzelnen Capitel consequent in Paragraphe getheilt und die Nummern der einzelnen Artikel durchgängig mit Überschriften versehen.

Digitized by Google

Am Schlusse des Buches findet sich eine Reihe von Bemerkungen des Herausgebers, durch welche dem Leser die Möglichkeit geboten wird, sich über verschiedene Punkte, in denen er eine genaue Orientierung wünscht, eingehender zu informieren anstrebt.

Der Herausgeber hat seinen Zweck, ein Werk zu schaffen, „das einen Compromisstandpunkt einnimmt, zwischen denjenigen Büchern, die nur die allerersten Unterweisungen für Anfänger geben, und denjenigen, welche nur den Gesichtspunkt einer wissenschaftlichen Entwicklung unbekümmert um pädagogische Absichten im Auge haben", vollkommen erreicht.

Über bilineare Formen mit conjugiert imaginären Variablen. Habilitationsschrift zur Erlangung der Venia legendi, vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiberg i. B. von Dr. Alfred Löwy. (Aus „Nova Acta", Abh. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. Band 71. Nr. 8.) 70 S. gr. 4°. Halle, 1898. (In Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.)

In der vorliegenden Schrift wird das sowohl für die Algebra der bilinearen Formen, als auch für die Gruppen-, Zahlen- und Functionentheorie, sowie für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen wichtige Problem der Transformation einer bilinearen Form von nicht verschwindender Determinante mit conjugiert imaginären Variablen in sich selbst behandelt. Dieselbe zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten wird der Charakter einer linearen Substitution untersucht, welche in Gemeinschaft mit ihrer conjugiert imaginären eine solche Form in sich selbst überführt, im zweiten werden die Eigenschaften derartiger Substitutionen für die definiten und die Hermite'schen Formen erörtert, im dritten endlich wird die reelle cogrediente Transformation einer reellen quadratischen Form behandelt. Die Abhandlung gibt u. a. bemerkenswerte Aufschlüsse über den Sylvester'schen Trägheitsindex der Hermite'schen bezw. reellen quadratischen Formen, indem sie zeigt, dass die Charakteristik derselben, d. i. die kleinere von den zwei Zahlen „Trägheitsindex" und „Differenz aus der Anzahl der Variabeln und Trägheitsindex", eine Invariante ist.

Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln. I. und II. Auf dienstliche Veranlassung bearbeitet von Heydenreich, Hauptmann à la suite des königlich Sächsischen 1. Feldartillerie-Regiments No. 12, commandiert als Mitglied zur Artillerie-Prüfungscommission. Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Berlin, 1898.

Der Herr Verfasser sagt in der Vorrede, dass er das Buch über Auftrag des königlichen allgemeinen Kriegsdepartements als Ersatz für eine außer Gebrauch gesetzte Dienstvorschrift für Artillerie-Officiere verfasst habe. Er hatte also vorwiegend praktische Ziele im Auge; allerdings soll das Buch nebstbei auch als Anhaltspunkt für den Unterricht in der Ballistik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule dienen. Es ist daher naturgemäß keine wissenschaftliche Abhandlung, sondern größtentheils ein rein militärisches

Digitized by Google

Handbuch. Selbstverständlich konnte es aber doch, wegen des erwähnten zweiten Zweckes, nicht zu einer bloßen Formelsammlung ausarten, sondern wenigstens die wichtigsten ballistischen Theorien mussten, wenn auch nicht mit völliger Strenge, mathematisch begründet werden. Hiebei wurde jedoch jede Anwendung von höherer Mathematik absichtlich vermieden, um das Buch auch solchen Artillerie-Officieren leicht zugänglich zu machen, welche sich seit ihrer Schulzeit nicht mehr mit der höheren Mathematik beschäftigt haben. *Freiherr von Blumenkron.*

Corso di calcolo infinitesimale di Giulio Vivanti, professore nella r. Università di Messina. Con figure nel testo. VI + 576 p. gr. 8° Trimarchi, Messina, 1899. Prezzo L. 8.—

„Die Infinitesimalrechnung", sagt der Verfasser, ist vielleicht dasjenige Gebiet, welches den Studierenden einerseits die größten Schwierigkeiten bereitet, andererseits auch zweifellos ihren Verstand am wenigsten befriedigt." Den Grund hiefür sieht er nicht nur in der Natur der Infinitesimalmethode, sondern auch in der großen Menge und Mannigfaltigkeit der Methoden und Probleme der Differential- und Integralrechnung, die ohne leicht in die Augen fallenden Zusammenhang dastehen, ferner in den vielfachen Beschränkungen, welche infolge der neuesten Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis bei den Theoremen, Definitionen und Beweisen platzgreifen müssen und in der Willkürlichkeit der analytischen Definitionen für die geometrischen Grundvorstellungen.

Der Wunsch, seinen Schülern die Schwierigkeiten, welche sich ihrem Eindringen in die Infinitesimalrechnung hemmend entgegenstellen, möglichst aus dem Wege zu räumen, veranlasste den Verfasser zur Herausgabe des vorliegenden Buches. Er sucht in demselben die einzelnen Theorien so anzuordnen, dass der Leser unmittelbar die Überzeugung von der logischen Nothwendigkeit der getroffenen Aufeinanderfolge gewinnen soll. Ob dieser Zweck überall erreicht wurde, mag dahingestellt bleiben.

Lobend ist hervorzuheben, dass stets die beschränkenden Voraussetzungen, unter denen die ermittelten Resultate galten, genau angegeben werden, ferner dass sich der Verfasser bei den Definitionen der Differentialgeometrie mit Erfolg bemüht, darzuthun, dass dieselben die naturgemäßeste Übertragung der Begriffe des gewöhnlichen Lebens in die Sprache der Mathematik sind, was von großem didaktischem Werte ist. Charakteristisch für das Werk ist die systematische und vollständige Ineinanderarbeitung der Differential- und Integralrechnung. Eine absolute Trennung dieser beiden Zweige der Infinitesimalrechnung ist zwar nicht nothwendig und namentlich in didaktischer Hinsicht auch nicht wünschenswert, allein eine derart innige Vereinigung derselben, wie in dem vorliegenden Buche, dürfte doch bei Manchem Bedenken erregen, da sie dem Lernenden den Überblick über die einzelne Disciplin erschweren kann. Mit dieser Bemerkung soll übrigens gsgen das äußerst verdienstliche Buch kein Vorwurf erhoben werden. Wie weit ein Lehrer bei einer solchen Vermengung gehen soll, ist Sache seiner Anschauung, deren Berechtigung lediglich durch die Unterrichtserfolge gekennzeichnet wird.

Digitized by Google

Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens von Moritz Cantor X + 136 S. kl. 8° B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis geb. M. 1.80.

Das vorliegende Schriftchen des Großmeisters der mathematisch-historischen Forschung ist aus den Vorlesungen über die sogenannte politische Arithmetik entstanden, welche derselbe seit einer langen Reihe von Jahren an der Universität Heidelberg für Kameralisten zu halten pflegt. Da es heutzutage für viele nothwendig und fast für jedermann wünschenswert ist, etwas von den Rechnungsweisen des auf Kauf und Verkauf sich beschränkenden Börsengeschäftes zu verstehen, über die Aufnahme und Heimzahlung von Anlehen informiert zu sein, und einige Kenntnisse über das im Vordergrund des modernen Lebens stehende Versicherungswesen zu besitzen, so wird das klar und interessant geschriebene Büchelchen, in welchem all' diese Dinge möglichst elementar und mit zweckmäßiger Ausführlichkeit behandelt sind, sich rasch einen großen Leserkreis erwerben. Es existiert kein Buch, welches in so gedrängter Kürze und unter Benützung so geringer Hilfsmittel (selbst das logarithmische Rechnen ist durch beigegebene Tafeln entbehrlich gemacht) über die erwähnten Fragen befriedigende Auskünfte ertheilt.

Traité d'astronomie stellaire, par Ch. André, Directeur de l'observatorie de Lyon, Professeur d'Astronomie à l'Université de Lyon. Première partie. Étoiles simples. XVI+344 p. gr. 8°. Gauthier-Villars, Paris, 1899. Prix fr. 9.—.

Das vorliegende Werk, welches aus den Vorlesungen des Verfassers über Astronomie an der Universität Lyon entstanden ist, verfolgt den Zweck, alle in den Veröffentlichungen der verschiedenen Sternwarten und gelehrten Gesellschaften sowie in den verschiedenen periodischen Fachzeitschriften zerstreuten Arbeiten der Astronomen über jenen Zweig der beobachtenden Astronomie, den man Herschel'sche Astronomie zu nennen pflegt, zu einem einheitlichen Ganzen zu vereinigen. In demselben wird die historische Anordnung befolgt, um die Einfachheit der Mittel, mit Hilfe deren die früheren Astronomen so großartige und tiefliegende Entdeckungen zu machen vermochten, recht hervortreten zu lassen, und es wird zugleich bei jeder sich darbietenden Gelegenheit auf die gegenwärtigen physikalischen Methoden hingewiesen, um zu zeigen, dass auch heute noch ein gewandter und unermüdlicher Beobachter selbst mit verhältnismäßig geringen instrumentalen Behelfen gute Erfolge erzielen kann. Das anregend, klar und elegant geschriebene, von eingehender Kenntnis der Literatur zeugende Werk zerfällt in drei Theile, welche sich der Reihe nach mit den einfachen Sternen, den Systemen von Doppelsternen und mehrfachen Sternen, und den Methoden und Instrumenten der astronomischen Beobachtung beschäftigen.

Der eben ausgegebene erste Theil, welcher der Erläuterung der Größenclassen, der Zahl, der Vertheilung, der Bewegungen, der Entfernungen und Dimensionen der einfachen Sterne gewidmet ist, umfasst folgende 11 Abschnitte: 1. Refractoren und Reflectoren (Geschichtliches, Theorie, Rolle der Beugungsschirme, Bilder der Sonne und der Planeten). 2. Allgemeine Beschreibung des

Digitized by Google

gestirnten Himmels (Alte Constellationen, Arbeiten nach Ptolemäus, Sternkataloge und Sternkarten). 3. Größe der Sterne (Mit freiem Auge sichtbare Sterne, teleskopische Sterne, Argelanders Methode der Grade und die aus derselben abgeleiteten Methoden). 4. Atmosphärische Absorption. 5. Die Zahl der Sterne und ihre Vertheilung (Aufzählung der Sterne nach ihrer Größe, Aufzählung der Sterne nach ihrer Stellung auf der Himmelskugel, das Condensationsgesetz der Gestirne). 6. Die Milchstraße (Allgemeine Beschreibung, Beziehung der Milchstraße zu den Sternen, Herschels Untersuchungen über die Milchstraße). 7. Eigenbewegung der Sonne (Geschichtliches, W. Herschels einschlägige Arbeiten, Methode der successiven Approximationen, Airys Methode, Geschwindigkeit im Visionsradius, ein Gesetz bezüglich der wirklichen Bewegungen des Sonnensystemes). 8. Eigenbewegungen der Fixsterne (Allgemeine Bemerkungen, theoretische Gesetze und experimentelle Verificationen derselben). 9. Sternparallaxen (Geschichtliches und Definitionen, Beobachtungsmethoden, endgiltiger Beweis der Möglichkeit, Parallaxen zu messen, die Werte derselben, die Arbeiten von F. Peters, Gill, Elkin, Belopolsky, Kaptein, Parallaxenkatalog, die mittlere Parallaxe der Sterne zweiter Größe, die Grenzparallaxe der Sterne erster Größe). 10. Sterndurchmesser (Messungsversuche, äquivalente Durchmesser und äquivalente Parallaxen). 11. Änderungen der Helligkeit der Sterne (Geschichtliches, allgemeine Bemerkungen über veränderliche Sterne, veränderliche Sterne mit unregelmäßiger oder unbekannter Periode, periodische Sterne überhaupt, veränderliche Sterne mit langer Periode).

Am Schlusse dieses Bandes befinden sich zwei Himmelskarten, eine den Werken Aragos entnommene für die nördliche Hemisphäre und eine der Uranometria Argentina entlehnte für die südliche Hemisphäre.

Analytische Geometrie des Raumes von Dr. Max Simon, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. 200 S. 12°. G. J. Göschen, Leipzig, 1898. Preis geb. 80 Pf.

In dem präcis und lichtvoll geschriebenem Buche werden der Reihe nach erörtert die Coordinaten, das Dualitätsprincip, die Coordinatentransformation, die Kugel, die Flächen zweiten Grades und zweiter Classe in allgemeiner Behandlung, Kegel und Cylinder, die eigentlichen centralen Flächen zweiten Grades (Quadriks) in allgemeiner Behandlung, die centralen Kegelflächen in specieller Behandlung, die Paraboloide und endlich die Cubatur der centralen Fläche und der Paraboloide. Das Werkchen, dessen Lectüre durch gute Figuren erleichtert wird, eignet sich für Anfänger zum Selbststudium.

Mathematische Geographie, zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Curt Geissler. 186 S. 12°. G. J. Göschen, Leipzig 1898. Preis geb. 80 Pf.

Das Buch will jeden, auch den nicht mathematisch und physikalisch Vorgebildeten in möglichst einfacher Weise in die mathematische Geographie einführen. Es werden daher dem eigentlichen Thema einige Vorübungen in geometrischer Anschauung vorausgeschickt und sodann äußerst kurz und elementar die wichtigsten Fragen der genannten Disciplin erläutert. Jedem Abschnitte ist eine Reihe von Fragen, die sich auf den Gegenstand desselben beziehen, angefügt. Dieselben bieten den Lehrern der Geographie an den unteren Classen der Mittelschulen willkommenen Stoff für mündliche oder schriftliche Übungen.

Digitized by Google

Höhere Analysis. Erster Theil: Differentialrechnung von Dr. Friedrich Junker. Mit 63 Figuren. 192 S. 12°. G. J. Göschen, Leipzig, 1898. Preis geb. 80 Pf.

Der Verfasser will in dem vorliegenden Werkchen die Grundlehren der Differentialrechnung und die einfachsten Anwendungen derselben möglichst einfach und gemeinverständlich darstellen. Er geht aber hierbei im Verzicht auf wissenschaftliche Correctheit über die Grenzen des Zulässigen hinaus. Wenn man schon Manches nicht in vollkommener Strenge bieten zu können glaubt, so ist es doch nicht zu rechtfertigen, dem Leser absolut Falsches vorzuführen. Was hat es beispielsweise für einen Zweck, wenn auf S. 25 gesagt wird: „Nähert sich x dem Wert a, so nähert sich gleichzeitig auch jede (!) Function $f(x)$ von x einer Grenze A." Nicht recht einzusehen ist, warum der ohnehin knapp bemessene Raum für die Darstellung der im Titel genannten Disciplin noch durch Ausführung einiger Curvenquadraturen und Körpercubaturen als Anwendung der Sätze über das Rechnen mit unendlich kleinen Größen geschmälert wird.

Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgaben-Sammlung für die oberen Classen der Mittelschulen. Bearbeitet von Anton Neumann, Professor am k. k. akademischen Gymnasium in Wien. Fünfundzwanzigste, umgearbeitete Auflage. V+306 S. gr. 8°. F Tempsky, Wien und Prag 1898. Ladenpreis geh. fl. 1·60, geb. fl. 1·80.

Die vorliegende fünfundzwanzigste Auflage des an den österreichischen Mittelschulen sehr verbreiteten Lehrbuches schließt sich, wie ihre Vorgängerin, den Lehrplänen und den zugehörigen Instructionen für den Unterricht der Mathematik an den Mittelschulen in Österreich eng an. Diese Rücksichtnahme auf die genannten Vorschriften kann trotz der unzweifelhaften Reformbedürftigkeit derselben — namentlich in der Richtung, dass vieles Unnöthige aus dem Lehrpensum auszuscheiden wäre — dem Verfasser nicht zum Vorwurfe gemacht werden, da von ihr die Approbation des Buches abhängt. Befremden aber muss es erregen, dass ein Lehrbuch, von welchem mindestens in jedem zweiten Jahre eine neue Auflage erscheint, durch zahlreiche Irrthümer, Ungenauigkeiten und Ausdrücke, die zu Missverständnissen führen können, entstellt wird. Es mögen hier nur einige Belege für diese Behauptung angeführt werden. S. 20 heisst es: „Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Null sind, ist unbestimmt." Sollte dem Bearbeiter unbekannt sein, dass durch Null überhaupt nicht dividiert werden kann? Wollte er aber etwa mit seinem Satze auf die Grenzwerte von Quotienten hindeuten, so hat er hiezu einen recht unpassenden Ort und eine nicht zu rechtfertigende Form gewählt. S. 25 findet man folgende Definition: „Unter einem Zahlensysteme versteht man eine solche Darstellung besonderer Zahlen u. s. f. Ein Zahlensystem ist doch, wie schon das Wort deutlich besagt, keine „Darstellung"! Auf derselben Seite wird gesagt, dass in einem Zahlensysteme mit der Basis b die „Coëfficienten kleiner als die Basis" sind. „Somit," heißt es dann weiter, ... „können die Coëfficienten" nur „die Werte $0, 1, 2, \ldots b-1$, haben." Dass eine Zahl, welche kleiner als b ist, ganzzahlig und nicht negativ sein muss, dürfte

Digitized by Google

selbst dem für Mathematik weniger begabten Schüler nicht unbedingt nothwendig erscheinen. S. 50 werden die veränderlichen oder variablen Zahlen als „Zahlen" definiert, „welche jeden beliebigen, ihrer Natur angemessenen Wert annehmen können." Was sich wohl der Schüler unter dem „der Natur" einer Zahl „angemessenen Wert" vorstellen mag? Warum wird nicht die einfache und auch richtige, jedermann sicher verständliche Definition gegeben: Eine veränderliche Zahl ist eine Zahl welche verschiedene Werte annehmen kann.

Erwünscht wäre es, wenn bei einer neuen Auflage, sowohl absolute Correctheit angestrebt, als auch die Zahl der Aufgaben vergrößert würde, damit die Schüler nicht gezwungen sind, außer dem mit einer Aufgabensammlung, versehenen Lehrbuche noch eine Beispielsammlung zu kaufen.

Oeuvres mathématiques d' Évariste Galois, publiées sous les auspices de la société mathématique de France, avec une introduction par M. Émile Picard, Membre de l'Institut. X+61 p. gr. 8°. Gauthier-Villars et fils, Paris 1897.

Die mathematischen Arbeiten Galois' wurden schon im Jahre 1846 von Liouville im „Journal de Mathématiques" veröffentlicht. Um diese Schriften den Mathematikern leichter zugänglich zu machen, veranstaltete die Société mathématique de France die vorliegende, mit dem Bildnisse Galois' geschmückte Sonderausgabe derselben, wodurch sie sich alle Mathematiker zu größtem Danke verpflichtete. Über die enorme Bedeutung der Arbeiten dieses großen Mathematikers, der an Originalität und Tiefe der Conception alle seine Zeitgenossen übertraf, braucht wohl heute kein Wort mehr gesagt zu werden.

Nassîr Êddin Tûsi und Regiomontan von A. v. Braunmühl. Mit 2 Tafeln (Aus: Nova Acta, Abh. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 71 B.) 38 S. gr. 4°. Halle 1897. In Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig. Ladenpreis M. 2.

Bekanntlich zählt zu Regiomontans größten Verdiensten die Begründung der Trigonometrie als selbständige Wissenschaft im Abendlande durch sein 1533 in Nürnberg veröffentlichtes Werk „De triangulis omnimodis libri quinque." Dasselbe Verdienst erwarb sich mehr als zwei Jahrhunderte früher der Perser Abu Dscha'fer Muḥammed ibn Ḥassan al Tûsi mit dem ehrenden Beinamen Nassîr Êddin (Vertheidiger der Religion) für das Morgenland durch sein Werk Schakl al Kaṭṭâ, in welchem das ebene vollständige Vierseit, sowie das aus größten Kreisbogen einer Kugel gebildete Viereck behandelt wird. In der vorliegenden Abhandlung wird eine eingehende Darstellung der wissenschaftlichen Thätigkeit dieser beiden Männer auf dem Gebiete der Trigonometrie entworfen, welche zeigt, dass Nassîr Êddin „nur eine systematische Entwicklung, eine logische Begründung und Ergänzung der zu seiner Zeit bekannten und bereits in der Astronomie verwendeten Lehren gab, also ein Lehrbuch schrieb," ...während „Regiomontan in seiner Dreieckslehre ein völlig neues Fundament zur Behandlung trigonometrischer Probleme geschaffen hat, das für ihn selbst den Ausgangspunkt zur Umgestaltung der bisher nur auf dem Almagest beruhenden Astronomie bildete." Daher hat auch nach Ansicht des Verfassers Nassîr Êddins Werk, so hoch es auch steht, nicht zur Weiterförderung der

Digitized by Google

Trigonometrie beigetragen, während Regiomontans Buch die ganze spätere Entwicklung dieser Wissenschaft im Abendlande in hohem Grade beeinflusste. Erwähnt mag noch werden, dass Nassîr Êddin für den Sinussatz der ebenen Trigonometrie einen Beweis gibt, der völlig mit dem bisher dem Regiomontanus zugeschriebenen übereinstimmt, sowie, dass dieser persische Mathematiker schon alle 6 Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck kannte, die später Neper durch seine einfache Regel gewinnen lehrte, nachdem sie im Abendlande erst allmählich wieder aufgefunden worden waren, und dass er sich bei dem Probleme, die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes aus den Winkeln zu bestimmen, des Supplementardreieckes bedient, dessen erste praktische Verwendung man bislang Willebrod Snellius zuschrieb.

Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz. Von Dr. Robert Haussner, Privatdocent der Mathematik an der Universität Würzburg. (Aus: Nova Acta, Abh. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 72 Bd.) 214 S. gr. 4°. Halle, 1897. In Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig. Ladenpreis M. 15.

In einem an Goldbach am 30. Juni 1742 geschriebenen Briefe bemerkt Euler, dass der Adressat „mit ihm die Observation communicirt habe, dass ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum sey". Dieser bemerkenswerte Satz, welchen E. Lucas in seiner „Théorie des nombres" fälschlich Waring zuschreibt, ist bisher nicht bewiesen worden. Wohl theilte Sylvester im Jahre 1871 in den „Proceedings" der „Mathematical Society" in London mit, dass es ihm mit Hilfe der erzeugenden Functionen gelungen sei, einen genauen Ausdruck für die Anzahl G_{2n} der Zerlegungen jeder geraden Zahl in eine Summe von zwei Primzahlen zu ermitteln, allein er gab diesen Ausdruck nicht an. G. Cantor ließ später eine Prüfung des Goldbach'schen Theorems für alle geraden Zahlen bis 1000 vornehmen und legte die Resultate derselben im Jahre 1894 dem Congress von Caën vor, in dessen Mittheilungen diese Arbeit, welche für jede der genannten Zahlen die zwei Summanden x und y ($x \leqq y$) und die Anzahl dieser Zerlegungen enthält, veröffentlicht wurde. Erst im Jahre 1896 publicierte P. Stäckel für die Goldbach'sche Zahl G_{2n} den genauen Ausdruck

$$G_{2n} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \{\theta(2\varrho+1) - 2\,\theta(2\varrho-1) + \theta(2\varrho-3)\}\,\theta(2n-2\varrho-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \theta(2n-2\varrho-1)\,\xi(2\varrho+1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

— wo $\theta(\alpha)$ die Anzahl aller α nicht überschreitenden Primzahlen vorstellt $\xi(1) = 1$, $\xi(2\varrho+1) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ ist, je nach der Beschaffenheit von $2\varrho-1$ und $2\varrho+1$ und ε die Werte 1 und 0 hat, je nachdem n eine Primzahl ist oder nicht — in seiner in den Göttinger Nachrichten enthaltenen Arbeit „Über Goldbachs empirisches Theorem", in der auch eine Reihe von anderen interessanten Bemerkungen vorkommen. So wird in derselben z. B. aus der Cantor'schen Tafel die empirische Formel

Digitized by Google

$$G_{2n} = (9{\cdot}64 + 0{\cdot}029 . 2\,n)\, J_{2n}$$

erschlossen, in welcher J_{2n} aus gewissen, den verschiedenen ungeraden Primtheilern von $2n$ entsprechenden Multiplicatoren zusammengesetzt ist; und es wird die Näherungsformel

$$G_{2n} = \frac{[\theta(2 - \sqrt{2n}) - \theta(\sqrt{2n})]^2}{n - \sqrt{2n}} \quad \frac{n}{\varphi(2r)}$$

abgeleitet, in welcher $\varphi(m)$ die Anzahl der zur ganzen Zahl m theilerfremden Zahlen unterhalb m ist.

Auf der 68. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Frankfurt am Main machte in demselben Jahre R. Haussner eine kurze Mittheilung über seine äusserst mühevollen, sehr verdienstlichen Arbeiten bezüglich des Goldbach'schen Satzes, die nun in der vorliegenden Abhandlung in ihrer Gänze veröffentlicht werden.

In derselben werden vier umfangreiche Tabellen mitgetheilt, deren erste die Goldbach'schen Zerlegungen und Zerlegungszahlen aller geraden Zahlen von 1 bis 3000 in der Cantor'schen Anordnung enthält, während die zweite die Anzahlfunction (im Cantor'schen Sinne) für alle geraden Zahlen von 1 bis 5000, die dritte die Werte der zahlentheoretischen Functionen $\Theta(\alpha)$ und $\xi(\alpha)$ und die vierte die ungeraden Primzahlen des zuletzt genannten Intervalles gibt. Die Art und Weise der Einrichtung und Herstellung der Tabellen wird nebst den aus denselben zu ziehenden Schlussfolgerungen in der recht anregend geschriebenen Einleitung auseinandergesetzt.

Die Tabellen zeigen, dass das Goldbach'sche Gesetz bis 5000 gilt und dass die Anzahl der Zerlegungen, wie schon G. Cantor aus seiner Tafel folgerte, abgesehen von Schwankungen mit wachsendem n wächst. Man ersieht ferner, dass diese Anzahl bei jeder durch 3 theilbaren geraden Zahl $2n$ — mit einziger Ausnahme von 1542 — ein relatives Maximum in Bezug auf die benachbarten Zahlen ist. Analoge Sätze gelten auch, wie man bald erkennt, für andere Primtheiler (5, 7, 11) von n. Dieselben lassen sich, wie Haussner hervorhebt, in folgenden Satz zusammenfassen: „Von je zwei geraden Zahlen, deren Differenz im Vergleiche zu ihnen klein ist, besitzt im Allgemeinen diejenige eine grössere Anzahl von Goldbach'schen Zerlegungen, welche die grössere Anzahl von verschiedenen ungeraden Primtheilern hat, oder bei welcher die Primtheiler kleinere Zahlenwerte haben. Wie oft ein Primtheiler in der zu zerlegenden Zahl auftritt, ist für die Zerlegungsanzahl belanglos".

Der Verfasser hat sich durch seine Arbeit alle Mathematiker, die sich für Zahlentheorie interessieren, zu grossem Dank verpflichtet.

Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie von A. v. Braunmühl. Mit 1 Tafel (Aus: Nova Acta, Abh. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 71. B.) 28 S. gr. 4°. Halle 1897. In Commision bei Wilh. Engelmann in Leipzig. Ladenpreis M. 1·50.

Bei den Griechen waren zwei Methoden zur Bestimmung ebener und sphärischer Dreiecke in Gebrauch, die sog. Sehnenrechnung und eine aus der orthogonalen Projection der Kugelfläche entstandene rein graphische Methode,

Digitized by Google

mit Hilfe deren sie alle auf die Gnomonik bezüglichen Probleme behandelten. Diese letztere Methode, welche zweifellos die ältere ist, gieng von den Griechen zu den Indern und von diesen zu den Arabern über, die dieselbe so vervollkommneten, dass sie ihnen selbst schwierige trigonometrische Umformungen ersetzen konnte. In der vorliegenden Abhandlung wird der Entwicklungsgang dieses Verfahrens in klarer und eleganter Weise dargestellt; dieselbe kann daher jedem, der sich für die Geschichte der Trigonometrie interessiert, bestens empfohlen werden.

Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung von W. M. Kutta, Assistent an der technischen Hochschule in München. Mit 3 Tafeln. (Aus: Nova Acta, Abh. der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. 71. Band.) 31 S. gr. 4°. Halle, 1897. In Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig. Ladenpreis M. 2·50.

Die Euklidsche Geometrie stellt folgende drei Grundforderungen auf: 1. Zwischen zwei beliebigen Punkten eine Gerade zu ziehen. 2. Eine beliebig begrenzte Gerade unbeschränkt zu verlängern. 3. Um einen beliebigen Punkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis zu schlagen. Die Frage nach der möglichen Einschränkbarkeit der ersten zwei Forderungen führt zum Problem der sog. „Geometrie des Compasses", welches Mascheroni in seinem 1797 erschienenen Buche „La geometria del compasso" (Deutsch von Grüson, Berlin, 1825) gestellt und endgiltig erledigt hat. Die Frage, ob und wie weit die dritte Forderung eingeschränkt werden kann, führt zur „Geometrie mit constanter Zirkelöffnung", welche zu verschiedensten Zeiten von den Mathematikern (Abûl Wefâ, Lionardo da Vinci, Albrecht Dürer, Scipione del Ferro, Tartaglia, Ferrari, Cardano, Benedetti, Daniel Schwenter, Mydorge, Kochanski, Bernet, Wöpke, Poncelet, Jacob Steiner) behandelt wurde. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit gibt einen klaren Abriss dieses Zweiges der Geometrie ihrem historischen Auftreten nach.

Die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorien von Karl Neumann. Zweiter Theil. Ueber die von Helmholtz in seinen älteren und neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. Leipzig, B. G. Teubner, 1898.

Der erste Theil dieses Werkes ist vor 25 Jahren im gleichen Verlage erschienen und behandelte die Lehren von Ampère, F. Neumann, W. Weber und Kirchhoff. Seit dieser Zeit haben die Anschauungen Faradays und Maxwells breiten Boden in der theoretischen Physik gewonnen. Diese allgemeinen Erscheinungen zusammen mit dem eigenen Entwicklungsgang von Helmholtz bringen es mit sich, dass seine Bearbeitung der elektrischen Vorgänge nicht eine einheitliche ist und die Hypothesen, auf denen die einzelnen Resultate beruhen, nicht mit jener Schärfe einander gegenüber gestellt sind, welche bei der Nachprüfung ins Einzelne erforderlich ist. Der rühmlichst bekannte Verfasser hat sich nun die Aufgabe gesetzt, die Helmholtz'schen Untersuchungen in dieser Hinsicht kritisch zu zergliedern, die einzelnen Wege gesondert zu verfolgen und die Voraussetzungen Schritt für Schritt zu formulieren.

Digitized by Google

Zunächst beruhen die älteren Helmholtz'schen Arbeiten (1870—1875) auf der übernommenen Hypothese einer Fernwirkung der elektrischen Ströme, wobei aber als neu hinzukommt die Betrachtung ungeschlossener Ströme und einzelner Stromelemente, sowohl linearer als körperlicher und die Ausdehnung der Untersuchung auf die Gesetze der Elektricitäts- und Massenbewegung in solchen Massen, welche Contractionen und Dilatationen unterworfen sind. Dazu sind bestimmte Hypothesen über die Zerlegung des Stromelementes in Componenten, über die Trennung der convectiven — durch Mitführung des elektrischen Zustandes seitens der Materie hervorgerufenen — und der endogenen Änderungen, über die Gesammtänderung der ponderomotorischen und elektrischen Kräfte nöthig, welche alle einzeln formuliert und auf ihre Consequenzen geprüft werden. Wir heben besonders hervor die eingehende Discussion über die Frage, ob im Elementargesetze zweier Stromelemente $K = -1$ oder aber $K \geqq 0$ zu setzen ist, die trotz des labilen Gleichgewichtes der ruhenden Elektricität, welche für $K = -1$ sich aus den Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870 ergibt, als unentschieden bezeichnet wird.

Im zweiten Theil geht Neumann auf die Arbeiten von Helmholtz aus den Jahren 1892—1894 ein, welche auf den Faraday-Maxwell'schen Vorstellungen einer continuierlichen Übertragung der elektrischen Wirkung durch Polarisation der Isolatoren und des Äthers beruhen. Zunächst werden die nöthigen Hypothesen über den Zusammenhang des elektrischen Zustandes mit der elektromotorischen Kraft und der Strömung an einer Stelle entwickelt, dann das Helmholtz'sche Minimalprincip und seine Verwertung für die Herstellung der charakteristischen Differentialgleichungen kritisch untersucht, endlich die Consequenzen dieser Theorie für Elektrostatik und magnetische Vertheilung entwickelt. Dabei stellt sich heraus, dass für die magnetische Vertheilung Übereinstimmung mit der Poisson-Mosotti'schen Theorie nicht stattfindet. Ein Vergleich der Ergebnisse in Bezug auf elektrische Ströme mit den Gesetzen von Ampère und F. Neumann ergibt unter gewissen Voraussetzungen Übereinstimmung. Eine Anwendung auf die Bewegung einer idealen Flüssigkeit unter Berücksichtigung ihrer magnetischen und elektrischen Zustände, wobei die Frage nach der relativen Bewegung des Äthers gegenüber der ponderablen Materie und dem Beharrungsvermögen des Äthers zur Geltung kommen, schließt das Buch, welches nach dem Gesagten als ein wesentlicher Beitrag zur Klärung unseres Urtheils über die Grundlagen der neueren Elektricitätslehre zu bezeichnen ist. *Wirtinger.*

Annuaire pour l'an 1899 publié par le bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Gauthier-Villars, Paris, 1899. Prix Fr. 1·50.

Gegenüber dem Vorjahre weist das treffliche Jahrbuch folgende besonders hervorzuhebende Veränderungen auf. Das Verzeichnis der Elemente der kleinen Planeten wurde reduciert, indem für alle bis zum 13. September 1898 entdeckten Planetoiden nur mehr der Name, der Entdecker, das Datum der Entdeckung, die Umlaufszeit, die mittlere Entfernung von der Sonne, die Excentricität und die Inclination angegeben werden. Die Elemente der periodischen Kometen wurden revidiert und für die im Jahre 1897 erschienenen Kometen

Digitized by Google

historische Notizen gegeben. Der Berechnung der Entfernung der Erde von der Sonne und von dem Monde wurde die Sonnenparallaxe 8″,80 zugrunde gelegt. Der Darstellung des metrischen Systems wurde eine Note über die Einheiten der Maße und Gewichte angefügt. Für den Flächeninhalt und die Bevölkerungsdichtigkeit von Frankreich wurden die neuesten Daten vorgeführt. Es wurden ferner verschiedene Mittheilungen über Photometrie und Lichtwellenlänge, sowie über die bei den Anwendungen der Elektricität gebräuchlichen elektrischen Einheiten gemacht. Die vier beigegebenen Abhandlungen, welche der Reihe nach von Bouquet de la Grie, Bassot, Gautier und Janssen herstammen, beschäftigen sich mit den „Sondierballonen", den in den letzten 30 Jahren in Frankreich ausgeführten geodätischen Arbeiten, dem für die Weltausstellung des Jahres 1900 bestimmten, von Gautier zu construierenden Siderostaten mit 60 *m* Focaldistanz und einer Öffnung von 1·25 *m* und den Arbeiten des Observatoriums am Mont Blanc im Jahre 1898.

Analytische Geometrie des Raumes von George Salmon deutsch bearbeitet von Wilhelm Fiedler. I. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte, verbesserte Auflage. Leipzig 1898, B. G. Teubner. Ladenpreis M. 8.

Wenn ein ausführliches, wissenschaftliches Lehrbuch, welches wohl die meisten jüngeren Mathematiker in die neuere analytische Geometrie eingeführt hat, nach zwanzig Jahren eine neue Auflage erlebt, ohne eine durchgreifende Umgestaltung zu erfahren, so ist das gewiss ein Beweis für die Güte und Zweckmäßigkeit der ursprünglichen Anlage, umsomehr wenn eine nach Inhalt und Zweck verwandte Darstellung, wie der zweite Band der Vorlesungen von Clebsch, bearbeitet von Lindemann, von anderer Seite bereits 7 Jahre vorliegt. Doch ist die Anlage im einzelnen so verschieden, dass beide Werke einander nicht beeinträchtigen. Die Veränderungen gegenüber der dritten Auflage bestehen vor allem in einer durchgreifenden Gliederung des Stoffes, in einer ausführlichen Darstellung der projectiven Coordinaten, einer eingehenden Theorie der Collineationen in Reciprocitäten. Ferner ist die Theorie der Raumcurven dritter Ordnung nun im ersten (früher im zweiten Band) behandelt. Dabei könnte man eine stärkere Betonung des zugehörigen Nullsystems wünschen. Die projective Erzeugung der Strahlencomplexe zweiten Grades, die linearen Transformationen der Flächen zweiten Grades in sich sind mehr in den Vordergrund getreten. Neu aufgenommen sind ferner die Hauptsätze aus der Geometrie der Kugelsysteme und der linearen Complexe, die zu den Fadenconstructionen der Flächen zweiten Grades von Staude gehörigen algebraischen Sätze und anderes. Auch die Clifford'sche Definition der Parallelen bei nichteuklidischer Maßbestimmung, nach welcher zwei Gerade dann parallel heißen, wenn sie dieselbe Gerade der Maßfläche treffen, und welche für die nichteuklidische Geometrie neue Gesichtspunkte eröffnet hat, ist aufgenommen. Eine bescheidene Bemerkung wird man dem Referenten bei diesem altbewährten Buch zugute halten. Er vermisst nämlich in den einleitenden Capiteln die präcisen Festsetzungen über Drehsinn und Winkelmessung, über Coordinatensysteme erster und zweiter Art, über das Vorzeichen bei der Volumsbestimmung und ähnliches, Dinge, welche z. B. für die Unterscheidung

Digitized by Google

zwischen rechts gewunden und links gewunden nicht entbehrt werden können. Auch die Euler'schen Formeln für die Coordinatentransformation würden manchem, der das Buch als Nachschlagebuch benutzt, willkommen sein.

Die Literaturnachweise sind in allen wesentlichen Punkten bis zur jüngsten Zeit fortgeführt. Druck und Ausstattung sind dieselben wie bisher.

Wirtinger.

Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Eine geordnete Zusammenstellung ihrer Um- und Abbildungen I. und II. Ordnung von Georg Kober, Dr. phil. Erster Theil: Die Grundgebilde der Ebene.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, eine systematische Anordnung der Sätze des behandelten Gebietes zu geben von einem solchen Charakter, dass die Beweise überflüssig werden und trotz Verzichtleistung auf erläuternde Figuren die Darstellung auch für Nichtmathematiker verständlich, „das mittelbare Erkennen in ein unmittelbares Schauen verwandelt" wird.

Wiewohl die Anordnung der Sätze mehrfach ganz gut ist, bleibt der Verfasser seinem Ziele, das ein unerreichbares ist, vollständig fern. Wer neuere Geometrie nicht schon versteht, wird es aus dem Heftchen nicht lernen. Bei der Entwicklung des sogenannten Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage, wo der Verfasser seinen eigenen Weg wandelt, ist die Art, wie er sich den Beweis vorstellt, für den Referenten im Dunkeln geblieben.

Den Lehrsätzen muss der Verfasser natürlich Definitionen vorausschicken. Was soll man aber zu Definitionen sagen, wie die folgenden? „Das stofflose Ganze heisst der Raum." „Zwei Linien, welche einander nur in einem Punkte schneiden, heissen gerade Linien oder Strahlen." Der erste und letzte Punkt einer Punktreihe, welcher den Strahl schließt, heißt ein unendlich ferner Punkt." *G. Kohn.*

Les recettes du distillateur par Ed. Tierz, Liquoriste (Actualités scientifiques.) 149 p. 18°. Jésus. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1899. Prix Fr. 2·75.

Nach einer Reihe von allgemeinen Bemerkungen über die Fabrication von Liqueuren gibt der Verfasser 140 Recepte von Liqueuren, Crêmen, Bitteren und anderen Spirituosen und Syrupen. Zum Schlusse bespricht er die Zusammensetzung verschiedener für diese Fabrication wichtiger Färbemittel.

Annuaire de l'observatoire municipal de Paris, dit observatoire de Montsouris, pour l'année 1899 (Analyse et travaux de 1897) Météorologie. — Chimie. — Micrographie. Applications á l'hygiène XII + 582 p. 18° Gauthier-Villars et fils, Paris 1899. Pris Fr. 2.

Der gegenwärtige Jahrgang dieses Jahrbuches reiht sich seinen Vorgängern würdig an. Die zahlreichen, äußerst instructiven Daten, welche derselbe über die verschiedenen, den Wirkungskreis des Observatoriums von Montsouris bildenden Wissensgebiete enthält, sind von höchstem Interesse.

Digitized by Google

Lehrbuch der Mechanik. (Cours de Mécanique) von Ch. Sturm. Übersetzt von Dr. Theodor Groß, Privatdocent und Lehrer der königl. Festungs-Bau-Schule. Erster Band. IX + 258 S. gr. 8°. Calvary, Berlin 1899. Ladenpreis M. 6 —.

Von Sturm's Cours de Mécanique, der durch seine anziehende Darstellung und eine Fülle lehrreicher Rechnungsmethoden, soweit er nicht veraltet ist, für die Studierenden der Mechanik sehr wertvoll ist, existierte bisher keine deutsche Ausgabe. Dr. Th. Groß, dem wir eine vor kurzem erschienene deutsche Bearbeitung von Sturm's „Cours d'analyse" verdanken, unternahm es daher, dieses Werk ins Deutsche zu übersetzen, ein Unternehmen, das vielleicht nicht jeder für ein „zeitgemäßes" halten wird. Die Übersetzung hält sich, abgesehen von unbedeutenden rein formalen Kürzungen, mehrfachen Verbesserungen von Versehen und nothwendigen Veränderungen von Veraltetem genau an das Original. In einigen, vom Übersetzer beigefügten Fußnoten, werden principielle Fragen erörtert. Der vorliegende erste Band enthält die ersten 26 Vorlesungen des Originals, der zweite wird den Rest derselben vorführen. In einem dritten Band endlich wird als sehr willkomenc Beigabe eine systematisch geordnete Sammlung von Aufgaben, die sich auf die beiden Bände des Sturm'schen Lehrbuches beziehen, nebst ihren Auflösungen gebracht werden.

Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen für Seminare, Gymnasien, Realschulen, technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Von Richard Herrmann, Seminaroberlehrer in Nossen. (10. Heft der Beiträge zur Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Herausgegeben von K. Muthesius, Seminarlehrer in Weimar.) 63 S. gr. 8°. Thienemann Gotha, 1899. Ladenpreis M. 1·20.

Vorliegendes Schriftchen, welches ein etwas erweiterter Neudruck einer vor vier Jahren im 7. Berichte des königlichen Seminars zu Nossen erschienenen Abhandlung ist, ist eine rein methodische Arbeit, deren Zweck es ist die Lehre von den Logarithmen und deren einfachsten Anwendungen bei trigonometrischen, Zinseszinsen-, Renten- und verschiedenen Versicherungsrechnungen so zubereiten, dass sie dem Standpunkte von Anfängern entspricht.

In den Alpen, von **John Tyndall.** Autorisierte deutsche Ausgabe. Mit einem Vorworte von Gustav Wiedemann. Mit in den Text eingedruckten Abbildungen. Zweite Auflage. XVI+419 S. gr. 8°. Friedrich Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1899. Ladenpreis M. 7.

Im Jahre 1872, ein Jahr nach dem Erscheinen des Originals, ließ G. Wiedemann in Viewegs Verlag eine deutsche Bearbeitung der „Stunden der Arbeit in den Alpen" des berühmten englichen Forschers Tyndall erscheinen, der den deutschen Naturforschern dadurch besonders sympathisch ist, dass er, wie kein anderer Engländer, in „edler Unpartheilichkeit und mit warmer Theilnahme die deutschen Leistungen gewürdigt und ihnen nach besten Kräften Geltung in seinem Vaterlande zu verschaffen gesucht hat." In demselben

Digitized by Google

schildert Tyndall seine Erlebnisse in den Hochalpen und die großartigen Eindrücke, welche seine Touren auf ihn ausübten, vom Standpunkte des Forschers und des begeisterten Bewunderers der Natur in nicht zu übertreffender Anschaulichkeit und Lebendigkeit. Da der Verfasser in allen ihm entgegentretenden Phänomen stets das wissenschaftliche Princip zu erkennen sucht, so verschafft er durch sein Buch dem Leser auch einen tiefen Einblick in die großartigen Erscheinungen der Hochalpennatur, was dem Werke nicht nur einen hohen Wert, sondern auch einen besonderen Reiz verleiht. Die vorliegende zweite Auflage dieses trefflichen Buches unterscheidet sich von ihrer Vorgängerin nur durch einige sachliche und stilistische Verbesserungen. Im Vereine mit der im vorigen Jahrgange dieser Monatshefte besprochenen deutschen Ausgabe der „Gletscher der Alpen" desselben Verfassers, welche das vorliegende Buch zu einem abgeschlossenen Ganzen ergänzt, bildet dasselbe ein Werk von classischem Werte, das in keiner Bibliothek eines Gebirgsfreundes oder Naturforschers, ja eines Gebildeten überhaupt fehlen darf.

Lehrbuch der höheren Mechanik von August Ritter, Dr. phil., Geh. Reg.-Rath und Professor an der kgl. techn. Hochschule zu Aachen. Dritte Auflage. Erster Theil. Analytische Mechanik. Mit 224 Textfiguren. XIV + 314 S. gr. 8°. Zweiter Theil. Ingenieurmechanik mit 612 Textfiguren. XV + 635 S. gr. 8°. Baumgärtner. Leipzig, 1899. Ladenpreis M. 24.

Das vorliegende Lehrbuch ist aus den Vorlesungen entstanden, welche der Verfasser seit vielen Jahren an der polytechnischen Schule in Aachen zu halten pflegt. Es soll in seinem ersten Bande dem im zweiten Jahre seiner Studien stehenden Techniker, der im ersten Studienjahre diejenigen Theile der Mechanik gehört hat, welche ohne Benützung der Differential- und Integralrechnung gelehrt werden können, die wesentlichsten Anwendungen der höheren Mathematik in der Mechanik vorführen, einen Überblick über das ganze Gebiet der theoretischen Mechanik geben und namentlich das Verständnis der allgemeinen Principien der Mechanik vermitteln. In seinem zweiten Bande bringt es eine Auswahl von Untersuchungen, deren Ergebnisse bei den Fachstudien der Ingenieurwissenschaften Verwendung finden. Die Vorzüge des eben in dritter Auflage erschienenen bekannten Werkes sind zweckmäßige Auswahl, übersichtliche Anordnung und klare Darstellung des Lehrstoffes. Gegenüber ihrer Vorgängerin weist die neue Ausgabe eine Reihe nicht nuwesentlicher Veränderungen auf. In den ersten Band wurden die Theorie des Hodographen, die Bewegung auf schiefer Ebene mit Luftwiderstand, die relative Bewegung des geradlinig schwingenden Punktes inbezug auf eine rotierende Scheibe, die Theorie der Verfolgungscurve, der Stoß einer Masse gegen eine ruhende Kette neu aufgenommen, er wurden ferner die Theorie des Beschleunigungscentrums und die Bresseschen Kreise auf anderer Grundlage aufgebaut, mannigfache Einschaltungen gemacht und 31 neue Figuren hinzugefügt.

Von den Änderungen und Zusätzen, welche der Verfasser im zweiten Bande vornahm, mögen die folgenden hervorgehoben werden. Die Abhängigkeit des Biegungswiderstandes eines belasteten Balkens von der Lage der Querschnittsebene wurde durch neue Figuren erläutert, eine Berechnung der Spannung in einem von verticalen Wänden und horizontaler Bodenfläche

Digitized by Google

unterstützten belasteten Kreisringe wurde aufgenommen, die Theorie der Kettenlinie für Wasserdruck theilweise umgearbeitet, eine eingehende Untersuchung über die Fortpflanzung der Zustandsänderungen in atmosphärischer Luft, aus der sich einfache Lösungen der Probleme der Temperaturerhöhung bei Meteoritenfällen und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ergeben, durchgeführt, die die eben genannten zwei Probleme, speciell behandelnden zwei Paragraphe der zweiten Auflage gestrichen und der Anhang derselben in den Text verarbeitet.

Grundriss der Naturlehre für die oberen Classen der Mittelschulen von Prof. Dr. W. Pscheidl. Mit 283 Abbildungen XII + 371 S. gr. 8°. Wilhelm Braumüller. Wien und Leipzig, 1899.

Das vorliegende Lehrbuch unterscheidet sich, wie der Verfasser richtig bemerkt, von den übrigen an den österreichischen Mittelschulen gebrauchten wesentlich durch die Behandlungsweise des ausgewählten Stoffes. Es wird in demselben den „Messversuchen eine besondere Sorgfalt gewidmet, da die Erfahrung gezeigt hat, dass diese in hervorragender Weise geeignet sind, das Interesse der Schüler für Physik zu wecken und zu beleben". Abgesehen von der Einleitung werden alle erörterten Gesetze vollständig entwickelt. Bei diesen Entwicklungen wird in den meisten Fällen den strengen, (correcter minder ungenauen) „wenn auch längeren Ableitungen der Vorzug vor den kürzeren aber minder strengen gegeben". Für Mittelschulen scheint dem Referenten das Buch zu umfangreich und zu sehr mit überflüssigen mathematischen Entwicklungen belastet zu sein. Viele Mittelschulprofessoren, zu denen auch der Verfasser des vorliegenden Buches zu gehören scheint, übersehen einerseits, dass die Schüler außer dem von ihnen vorgetragenen Fache noch eine Reihe von anderen zu lernen haben, und vergessen, dass in der Entwicklung begriffene junge Leute auch einer Erholung bedürfen und für die Pflege des Körpers freie Zeit nöthig haben.

Vorlesungen über Functionstheorie von Julius Petersen. 329 S. gr. 8°. Host & Son. Kopenhagen, 1898.

Der Verfasser will keine erschöpfende Behandlung der Functionentheorie in ihrer gegenwärtigen Entwicklung geben, sondern den Lesern nur einen Überblick über die wesentlichsten Resultate dieser Disciplin vermitteln und ihnen dadurch die nothwendigste Grundlage für selbständiges Arbeiten verschaffen. Daher legt er das Hauptgewicht auf die, zwei Drittel des Buches umfassende erste Abtheilung, in welcher die allgemeine Theorie behandelt wird. In der zweiten Abtheilung gibt er im wesentlichen nur eine Auswahl von allerdings an sich überaus wichtigen fundamentalen Beispielen für die Anwendungen der Theorie, nämlich eine Untersuchung von $\Gamma(z)$ und der Riemann'schen Function $\xi(z)$ nebst Anwendung auf die Theorie der Primzahlen, eine kurze Besprechung der doppeltperiodischen Functionen im Allgemeinen, der Jacobi'schen Θ-Functionen, der elliptischen Functionen, der Transformation der elliptischen Integrale und endlich der elliptischen Modulfunctionen.

Besonders hervorzuheben sind ein vom Verfasser gegebener Beweis des von Neumann als Axiom aufgestellten Satzes, dass sich auf einer zusammen-

Digitized by Google

hängenden Fläche, welche keine Elementarfläche ist, immer ein Querschnitt anbringen lässt, der dieselbe nicht in zwei Stücke theilt, eine sich an diesen Satz anschließende Bestimmung einer Normalform für Flächen, eine allgemeine Summationsformel für unendliche Reihen, von der Abel einen speciellen Fall aufgestellt hat, mit genauer Angabe der Giltigkeitsgrenzen, ein bemerkenswerter allgemein giltiger Ausdruck für die logarithmische Ableitung von $\Gamma(z)$, ein durch seine Analogie mit der Gaußischen Formel für der Elektricitätsmenge innerhalb einer geschlossenen Fläche interessanter Ausdruck für die Anzahl der Pole und Nullpunkte einer Function innerhalb einer geschlossenen Curve.

Das Buch, welches nach einem völlig einheitlichen Plane gearbeitet und klar geschrieben ist, wird den Studierenden gute Dienste leisten.

Die Forschritte der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Dreiundfünfzigster Jahrgang. 3 Bände. LXXII + 573 S., LII + 911 S., XLIV + 566 S. gr 8°. F. Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1898. Ladenpreis M. 76.

Der erste und zweite Band der rühmlichst bekannten „Fortschritte der Physik", enthaltend die Physik der Materie und die Physik des Äthers wurde auch in diesem Jahrgange von Richard Börnstein, der dritte enthaltend, die kosmische Physik, von Richard Assmann redigiert.

Die Referate stammen her von Abraham, Angström, Apt, Arendt, Arons, Bein, Berberich, Berger, Belowsky, Börnstein, Böttger, Brix, Brodmann, Caspary, Classen, Denizot, Dittenberger, Dorn, Ehlers, Eschenhagen, Fischer, Galle, Grüneisen, Gumlich, Häntzschel, Hecker, Heun, Jäger, Jahnke, Kassner, Kaufmann, Kiewel, König, Kötter, Kühl, Kühnen, Lampe, Less, Levy, Lüpke, Martens, Meinardus, Melander, E. Meyer, Nebel, Neesen, Nippoldt jun., Posner, Prytz, Riens, Rimbach, Roth, Scheel, B. Schwalbe, G. Schwalle, Segel, Sprung, Süring, Uljanin, Volkmann, Wiedemann, Wolff, L. Weber, Wurtzel, Zeeman. Über die Bedeutung dieses großartig angelegten Werkes braucht wohl keine Bemerkung gemacht zu werden.

Astronomischer Kalender für 1899. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte in Wien. Der ganzen Reihe einundsechzigster Jahrgang; der neuen Folge achtzehnter Jahrgang. 158 S. gr. 8°. Carl Gerold's Sohn. Wien, 1899. Preis geb. fl. 1.20.

Der neue Jahrgang des längst in den weitesten Kreisen eingebürgerten „Astronomischen Kalenders" enthält außer dem bürgerlichen und astronomischen Kalendarium und den alljährlich wiederkehrenden, stets dem neuesten Standpunkte angepassten Verzeichnissen, Tabellen und Tafeln vier interessante Abhandlungen. Die erste von diesen mit dem Titel „Die großen Refractoren der Erde", welche den Assistenten der k. k. Sternwarte in Wien, Dr. Friedrich Bidschof, zum Verfasser hat, bietet ein der astronomischen Fachzeitschrift „The observatory" in modificierter Form entnommenes und etwas erweitertes Verzeichnis, von 70 nach ihrer Größe geordneten Teleskopen, in welchem für jedes einzelne die Größe des Durchmessers der Öffnung des Objectives, die Brennweite des Objectives, die Namen der Verfertiger, das Aufstellungsjahr und der Aufstellungsort angegeben ist, nebst einer willkommenen Einleitung

Digitized by Google

und Noten. In der zweiten, von dem Adjuncten der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, Prof. Dr. J. Liznar, verfassten Abhandlung werden die wichtigsten Resultate der in Österreich-Ungarn ausgeführten magnetischen Aufnahmen auseinandergesetzt. In der dritten Arbeit „Neue Planeten und Kometen" macht der Director der k. k. Sternwarte in Wien, Prof. Dr. E. Weiß, Mittheilungen über die 12 im Jahre 1898 (ausschließlich auf photographischem Wege) aufgefundenen Planeten, von denen einige ein hohes Interesse beanspruchen, und die neun Kometen desselben Jahres, unter denen sich drei periodische befanden. Derselbe Verfasser gibt in der Schlussabhandlung des Kalenders eine instructive Anleitung zur Beobachtung von Feuerkugeln.

La théorie des parallèles demontrée rigoureusement. Essai sur le livre Ier des éléments d'Euclide. Par Michel Frolov. 1898.

Die vermeintlichen Beweise des Parallelenaxioms nehmen kein Ende, trotzdem die Widerspruchslosigket der nichteuklidischen Geometrie längst endgiltig feststeht. Der Trugschluss der vorliegenden Schrift lässt sich mit wenigen Worten wiedergeben.

Wenn man in der Lobatschewsky'schen Ebene in $(n+1)$ äquidistanten Punkten einer Geraden Perpendikel von gleicher Länge errichtet, so ergeben deren auf einander folgende Endpunkte verbunden eine gebrochene Linie. Die $(n-1)$ Winkel, welche diese Linie auf jeder ihrer beiden Seiten aufweist, sind auf der einen Seite sämmtlich kleiner, auf der anderen sämmtlich größer als zwei Rechte. Die beiden Endpunkte dieser gebrochenen Linie denke man sich durch eine zweite aus p geradlinigen Stücken bestehende gebrochene Linie auf solche Art verbunden, dass ein Polygon entsteht, welches auf derjenigen Seite der ersten Linie liegt, auf der ihre Winkel größer als zwei Rechte sind. Jetzt schließt der Verfasser, indem er, bei wachsendem n, p als constant ansieht, dass für dieses von $(n+p)$ Seiten begrenzte Polygon bei hinreichend großem n entgegen den Lehren der Lobatschewsky'schen Geometrie die Summe der inneren Winkel mehr als das $(n+p-2)$-fache von zwei Rechten beträgt, anstatt zu schließen, dass bei ins Unendliche wachsendem n, p nicht constant bleiben kann, sondern gleichfalls ins Unendliche wachsen muss. *G. Kohn.*

Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien bearbeitet von Anton Neumann, Professor am k. k. akad. Gymnasium in Wien. I. Abth. 35. veränderte Auflage und II. Abth. 26. veränderte Auflage. Wien und Prag, Verlag von F. Tempsky 1898.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien. Bearbeitet von Johann Spielmann. I. Abth. 25. veränderte Auflage 1898 und II. Abth. 20. veränderte Auflage, 1899.

Von Močniks Lehrbüchern für Untergymnasien, welche in Österreich vielfach dem Untericht in der Mathematik zu Grunde gelegt werden, liegen wieder neue, im Ganzen entsprechende Auflagen vor. *G. Kohn.*

Digitized by Google

Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Anno I. 1898. IV + 164 p. gr. 8°. Carlo Clausen, Torino, 1898. Prezzo L. 7·50.

Der vorliegende erste Jahrgang des „Bolletino" bringt zwei interessante größere Abhandlungen: (Zur Geschichte einiger ebener Curven I. Die Strophoide von Gino Loria — „Pafnutii Lvovitch Tchebychef" von A. Vassiellief), 27 Referate über Publicationen auf dem Gebiete der Mathematik, die ausführlichen Programme der Vorlesungen, welche an den Universitäten Pavia, Bologna, Turin und Pisa, beziehungsweise von den Professoren Somigliana (über mathematische Physik), Pincherle (über höhere Analysis), Vailati (über Geschichte der Mechanik) und Bertini (über höhere Geometrie) beziehungsweise in den Studienjahren 1895/6, 1894/5 und 1895/6, 1897/8 und 1897/8 gehalten wurden, ferner Nekrologe der verstorbenen Mathematiker Ernst Ch. J. Schering, Francesco Brioschi, H. Schapira und P. Serret und eine Reihe von Notizen über Preisausschreibungen, Zeitschriften, bemerkenswerte Publicationen u. dgl. Unangenehm berühren die zahlreichen Druckfehler. Die neue Zeitschrift, deren Herausgeber den Mathematikern bestens bekannt ist, wird von Allen, die sich für die Geschichte der Mathematik interessieren, freudigst begrüßt werden.

Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution par Ivan Alexandroff, professeur de mathématiques au Lycée de Tambov (Russie). Traduit du russe, sur la sixième édition par D. Aitoff. XI + 154 p. gr. 8°. A. Hermann, Paris, 1899.

In der französischen mathematischen Literatur finden sich zahlreiche elementargeometrische Probleme nebst Lösungen theils in den einzelnen Lehrbüchern, theils in den verschiedenen Zeitschriften zerstreut vor. Die letzteren hat bekanntlich Laisant gesammelt und unter Angabe der Zeitschrift, in welcher sie gestellt wurden, und derjenigen, in welcher die beste Lösung erschien, herausgegeben. Sowohl in den Lehrbüchern, als auch in dem Buche Laisant's sind diese Aufgaben nach den verschiedenen geometrischen Gebilden (Gerade, Dreieck, Vieleck, Kreis u. s. f.), auf welche sie sich beziehen, nicht aber nach den zu ihrer Lösung benützen Methoden geordnet. Eine nach diesem Gesichtspunkte angeordnete Sammlung von Aufgaben der Elementargeometrie, welche auch in die französische Sprache übertragen wurde, hat bekanntlich Petersen („Methoden und Theorien zur Lösung von geometrischen Constructionsaufgaben mit Anwendung auf mehr als 400 Probleme") publiciert; und eine auf der gleichen Grundlage aufgebaute gab auch Alexandroff in russischer Sprache heraus. Von dieser liegt uns nun eine etwas freie französische Übersetzung vor. In jedem Capitel wird zunächst eine Erörterung der bei den Aufgaben desselben zu verwendenden Methode gegeben, hierauf wird eine beträchtliche Zahl von typischen Aufgaben mit vollständig durchgeführter Lösung gebracht und dann werden zahlreiche Probleme vorgeführt, deren Behandlung nach den angegebenen Mustern erfolgen kann. Das recht zweckmäßig eingerichtete Buch, welches an Fülle des Stoffes das Petersen'sche Werk weit übertrifft, wird Allen, die sich mit elementarer Geometrie beschäf-

Digitized by Google

tigen, sehr gute Dienste leisten. Referent kann den Wunsch nicht unausgesprochen lassen, dass auch bald eine deutsche Bearbeitung desselben erscheinen möchte.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste par H. Poincaré, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences. Tome III. Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxiéme genre. Solutions doublement asymptotiques. 414 p. gr 8°. Gauthier-Villars, Paris, 1899. Prix fr. 13.

Die älteren Methoden zur Behandlung des Dreikörperproblems, dem das vorliegende ausgezeichnete Werk gewidmet ist, haben das Gemeinsame, dass sie Entwicklungen der Coordinaten der Gestirne nach den Potenzen der Massen liefern, welche sogenannte säculäre, das sind solche Glieder enthalten, in denen die Zeit außerhalb der periodischen Functionen Sinus und Cosinus auftritt. Es ist demnach ihre Convergenz für einigermaßen große Werte der Zeit zweifelhaft und daher können sie zwar infolge ihrer hohen Entwicklung Lagrange, Laplace und Leverrier, durch noch für eine geraume Zeit, nicht aber für immer ausreichen. Die Astronomen sind daher seit fast 5 Decennien bestrebt, diesen Übelstand durch Fortschaffung der säculären Glieder zu beseitigen, was möglich sein muss, da die Anweseuheit derselben nicht durch die Natur des Problems, sondern lediglich durch die angewandte Methode bedingt wird. Diese Bemühungen, an denen namentlich Delaunay, Hill, Gyldèn, Newcomb, Bohlin und Lindstedt sich erfolgreich betheiligten, führten zu dem gewünschten Ziele.

Die meisten der von diesen Gelehrten aufgestellten Reihen sind aber nicht convergent. Sie reichen zwar trotzdem, da ihre Glieder zuerst sehr rasch abnehmen und erst später wieder wachsen, für die momentanen Bedürfnisse der astronomischen Praxis aus, da diese nur die ersten Terme derselben verwendet, doch auch ihnen haftet der oben erwähnte Mangel der älteren Entwicklungen an, dass sie im Laufe der Zeit unbrauchbar werden. Sie gestatten überdies nicht in jedem Falle eine Abschätzung des begangenen Fehlers. „Das Ziel der Himmelsmechanik" ist aber, wie der Verfasser mit Recht bemerkt, „nicht erreicht, wenn man mehr oder weniger angenäherte Ephemeriden gerechnet hat, ohne sich von dem erlangten Grade der Annäherung Rechenschaft ablegen zu können. Wenn man nämlich eine Abweichung zwischen diesen Ephemeriden und den Beobachtungen constatiert, so muss man erkennen können, ob das Newton'sche Gesetz ungenau ist, oder ob sich Alles durch die Unvollkommenheit der Theorie erklären lässt. Es ist daher wesentlich für den begangenen Fehler eine obere Grenze angeben zu können, was man bisher vielleicht zu wenig beachtet hat. Nun geben uns die Methoden, welche die Discussion der Convergenz ermöglichen, gleichzeitig auch diese obere Grenze, was ihre Wichtigkeit und Nützlichkeit bedeutend erhöht." Diesen hat der Verfasser daher in seinem Werke mit vollem Rechte einen breiten Raum zuerkannt. Gerade die Strenge in seinen Entwickelungen und Theoremen gibt seinem Werke ebenso einen weit über die Gegenwart hinausreichenden Wert, wie sein überall mit Erfolg durchgeführtes Bestreben, das Wesen und die innere Verwandtschaft der Resultate der verschiedensten Astronomen zu be-

Digitized by Google

leuchten und dieselben durch seine eigenen Forschungen zu erweitern und zu ergänzen.

Der erste Band dieses trefflichen Werkes, welcher die periodischen Lösungen erster Art, die Nichtexistenz der eindeutigen Integrale und die asymptotischen Lösungen behandelt, erschien im Jahre 1892, der zweite, welcher sich mit den Methoden von Newcomb, Gyldèn, Lindstedt und Bohlin befasst, im Jahre 1893, der dritte und letzte, in welchem die Integralinvarianten, die periodischen Lösungen zweiter Gattung und die doppelt asymptotischen Lösungen erörtert werden, wurde soeben ausgegeben.

2500 Problèmes d'arithmétique et de géométrie pratique. Nombres entiers. — Nombres décimaux. Fractions. — Règles de trois simples et composées. — Intérêts simples et composées. — Rentes sur l'État. — Assurances. Escompte. — Melanges et Alliages. — Racine carrée. — Mesurage des Surfaces et des Volumes. Problèmes d'examen par V. Arnoux, Instituteur. Nouvelle édition, revue et augmentée. Livre de l'élève. 288 p. 12^0. Larousse, Paris.

Die vorliegende Beispielsammlung kann von den Lehrer einer Bürgerschule oder der Unterstufe einer Mittelschule bei der Stellung von Schul- und Hausaufgaben benützt werden.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Theodor Reye. I. Abth. mit 90 Abb. 4. Aufl. Leipzig, 1899, bei Baumgärtner. XIV + 296 S. gr. 8^0. Preis 9 M.

Dieses Werk ist in der ganzen mathematischen Welt so bekannt (auch schon in mehrere fremde Sprachen übersetzt), dass wir uns darauf beschränken können, die Änderungen anzuzeigen, welche die vorliegende Auflage erfahren hat.

Vor allem wurden drei neue Vorträge eingeführt, in denen folgende Gegenstände behandelt werden: Mehrere Sätze über confocale Kegelschnitte werden entwickelt und schliesslich zur Ableitung einiger von Chasles ohne Beweis mitgetheilten Theoreme verwendet, die sich auf rectificirbare Differenzen gewisser Kegelschnittsbögen beziehen, also einen Gegenstand, der in analytischer Behandlung elliptische Integrale erfordert. Es folgen verschiedene Sätze (grossenteils von Steiner), die zur Construction des Krümmungsmittelpunktes in einem Punkte eines Kegelschnittes führen, und einige Entwicklungen über Büschel concentrischer homothetischer Kegelschnitte (die eine gemeinsame Durchmesser-Involution besitzen). Auch die übrigen Vorträge und die Sammlung von Aufgaben und Sätzen am Schluss sind an einzelnen Stellen bereichert worden, namentlich sind hier die linearen Systeme und Gewebe von concentrischen Kegeln 2. Ordnung neu behandelt. Die Seitenzahl ist gegenüber der 3. Aufl. von 248 auf 296, die Zahl der „Constructionsaufgaben und Lehrsätze" von 223 auf 247 erhöht.

Während Lehrbücher meist schnell zu veralten pflegen, hat das vorliegende Werk schon über drei Decennien seine Lebenskraft bewährt, und die Sorgfalt, die der Verfasser stets den neuen Auflagen zutheil werden lässt, bürgt dafür, dass es noch lange allen Jüngern der synthetischen Geometrie ein unentbehrlicher Führer bleiben wird. *Konrad Zindler.*

Digitized by Google

Calcul de Généralisation par G. Oltramare. 191 p. gr. 8°. Hermann, Paris, 1899.

Das Werk befasst sich damit, im Gebiet der Differential- und Integralrechnung einen symbolischen Calcul aufzustellen. Wir wollen vom Wesen dieser symbolischen Schreibweise an einem möglichst einfachen Beispiel eine Vorstellung geben: Die Taylor'sche Entwicklung der Function $\varphi(x+a)$ nach Potenzen von a drückt der Verfasser durch die Gleichung aus

$$\varphi(x+a) = G.e^{au}.$$

Die distributive „symbolische Operation G^u bedeutet also, dass man in der Entwicklung von e^{au} jede Potenz von u durch die betreffende Ableitung der Function $\varphi(x)$ entsprechend der Gleichung

$$G.u^n = \varphi^{(n)}(x)$$

ersetzen soll. Umgekehrt werden in diesem Calcul die Operationen der Differentiation und Integration symbolisch durch algebraische Operationen, nämlich Multiplicationen, beziehungsweise Divisionen hinter dem Zeichen G ersetzt. All dies wird gleich in größerer Allgemeinheit für mehrere Veränderliche eingeführt Die Anwendungen erstrecken sich hauptsächlich auf die Theorie der bestimmten (einfachen und mehrfachen) Integrale, ihre Entwicklungen in Reihen, die Integration von Differentialgleichungen und Differenzengleichungen. Es wird bloß die formale Seite der Sache berücksichtigt, ohne dass die Voraussetzungen, unter denen die eingeführte Symbolik giltig ist, hervorgehoben werden. Immerhin könnte dieser Calcul demjenigen, der es lohnend fände, sich ihn anzueignen, zu heuristischen Zwecken in speciellen Untersuchungen und zur Abkürzung der Schreibweise dienen.

Konrad Zindler.

Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Herausgegeben von Friedrich Engel und Paul Stäckel. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedrich Engel Erster Theil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskij's und mit 194 Figuren im Text. Zweiter Theil: Anmerkungen. Lobatschefskij's Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. XVI + 476 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig, 1899. Ladenpreis 14 M.

Durch das vorliegende Werk werden die Lobatschefskij'schen Abhandlungen „Über die Anfangsgründe der Geometrie" (Kasaner Bote 1829–30) und „Neue Anfangsgründe der Geometrie" (Kasaner gelehrte Schriften 1835 ff.), zwei der wichtigsten Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, mit Ausschluss der zwei letzten Capitel des zweiten, welche sich nicht auf die nichteuklidische Geometrie beziehen, den der russischen Sprache nicht kundigen Mathematikern zugänglich gemacht. Dieselben bilden zusammen ein vollständiges Lehrbuch der nichteuklidischen Geometrie, welches nicht nur eine systematische Darstellung der Elemente bietet, sondern auch eine bedeutende Anzahl von Beispielen für die Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Cubikinhalten enthält. Die Übersetzung ist möglichst wortgetreu, um die

Digitized by Google

Gedanken Lobatschefskij's getreu wiederzugeben. Zum Zwecke der Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden an vielen Stellen Absätze angebracht, den Abhandlungen ausführliche Inhaltsverzeichnisse vorangestellt und die erste von ihnen in Paragraphe getheilt. Behufs leichter Vergleichbarkeit mit den Originaltexten wurden die Seitenzahlen derselben angegeben. Die mehr als hundert Druckseiten umfassenden, bemerkenswerten Anmerkungen des Herausgebers erleichtern dem Leser das Verständnis der Abhandlungen, deren zweite beim Studium vor der ersten durchzuarbeiten ist. Eine eingehende Besprechung des Lebens, und der Arbeiten Lobatschefskij, welche den Schluss des Bandes bildet, ist von hohem Interesse. Die ausführlichen, genauen Namen- und Sachregister werden den Lesern sehr willkommen sein.

Elements d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens. Cours professé à l'École des Arts et Manufactures par M. Appell, membre de l'Institut. 720 p. Lex 8°. Carré et Naud, Paris, 1898. Prix 24 fr.

Das vorliegende Werk gibt die von dem Verfasser seit drei Jahren an der „École des Arts et Manufactures" regelmäßig abgehaltenen Vorlesungen über die Elemente der Analysis unter besonderer Bedachtnahme auf ihre Anwendungen in der Geometrie, Mechanik und Physik, vermehrt um einige Zusätze, wieder. Was dem durch die zahlreichen Beispiele in hohem Grade instructiven Buche außer der Bündigkeit, Klarheit und Eleganz der Darstellung einen besonderen Wert verleiht, ist der Umstand, dass keine Theorie ohne Anwendung auf specielle Fälle entwickelt wird. Anordnung und Umfang des behandelten Stoffes können aus der folgenden Anführung der Capitelüberschriften ersehen werden: I. Unendlich kleine Größe. Differentiale. II. Primitive Functionen. Unbestimmte Integrale. Einfache bestimmte Integrale. Anwendung auf die Messung der ebenen Flächen. III. Volumen eines Körpers mit parallelen Grundflächen. IV. Rectification der Curven. Inhalt der Rotations- und der Kegelflächen. V. Einige Integrationsmethoden. VI. Entwicklung einer Function in eine nach den ganzen positiven Potenzen einer Variablen fortschreitende Reihe. VII. Entwicklung einer Function in eine trigonometrische Reihe. Ausdruck eines Polynoms als Function der mittleren Werte desselben und seiner Ableitungen in einem Intervalle. VIII. Bestimmte Integrale, in denen die zu integrierende Function im Integrationsintervalle oder in denen eine der Grenzen unendlich wird. IX. Tangenten an ebene Curven. Maximum und Minimum einer Function einer Veränderlichen. X. Raumcurven. Tangente. Schmiegungsebene. XI. Functionen von zwei Veränderlichen. Tangentialebene an eine Fläche. Maxima und Minima. XII. Einhüllende der Curven und Flächen. XIII. Krümmung der ebenen Curven. XIV. Krümmung und Windung der Raumcurven. XV. Krümmung der Curven auf Flächen. Krümmung der Flächen. XVI. Besondere Linien auf Flächen. XVII. Differentiation unter dem Integralzeichen. Integration vollständiger Differentiale. Integrale längs einer Curve. XVIII. Doppelintegrale und dreifache Integrale. Anwendungen. XIX. Differentialgleichungen erster Ordnung. XX. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. XXI. Lineare Differentialgleichungen. XXII. Systeme von simultanen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

Digitized by Google

XXIII. Einige Beispiele von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XXIV. Numerischer Wert eines bestimmten Integrals. Approximationsmethoden. Integratoren und Integraphen.

Die optischen Instrumente der Firma Fuess, deren Beschreibung, Justierung und Anwendung von C. Leiss. Mit 233 Holzschnitten im Text und drei Lichtdrucktafeln. XIV + 397 S. Lex. 8°. Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1899. Ladenpreis 11 M.

In der vorliegenden Schrift gibt der Leiter der optischen Abtheilung der Fuess'schen Werkstätten eine zusammenhängende, möglichst kurzgefasste eingehende Beschreibung der in derselben hergestellten wissenschaftlichen Instrumente nebst Anleitungen für deren zweckmäßigen Gebrauch, Prüfung und Justierung, da hievon vornehmlich die Zuverlässigkeit der mit den Instrumenten auszuführenden Bestimmungen abhängt. Das Buch zerfällt in 8 Abschnitte und einen Anhang. In denselben werden der Reihe nach behandelt: Spektrometer und Refraktometer; spektrophotographische Apparate; Apparate zum Studium und zur Demonstration physikalischer Vorgänge in krystallisierten und amorphen Körpern; krystallographische und mineralogische Apparate; Präparate und Utensilien für Interferenzerscheinungen und Krystallplatten; Schneide- und Schleifapparate und deren Hilfsutensilien zur Herstellung von optischen Präparaten; Hilfsinstrumente für physikalische Untersuchungen; Projections- und mikrophotographische Apparate. Das Werk, dessen Wert noch durch reichliche Citate aus Abhandlungen in Zeitschriften und aus Lehrbüchern, die entweder sich auf die Apparate oder auf mit denselben ausgeführte Arbeiten beziehen, wesentlich erhöht wird, wird gewiss dazu beitragen, „dem experimentierenden Gelehrten und insbesondere den jüngeren Forschern das Arbeiten mit den beschriebenen Instrumenten durch Vermittlung der näheren Kenntnis ihrer Construction und ihrer Handhabung zu erleichtern."

Cours de physique mathématique. Théorie du potentiel Newtonien. Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894—1895 par H. Poincaré, Membre de l'Institut. Redigées par Edouard Leroy et Georges Vincent. 366 p. Lex. 8°. Carré et Naud, Paris, 1899. Prix 14 fr.

Die bisher veröffentlichten Vorlesungen Poincaré's über mathematische Physik umfassen nicht weniger als 10 Bände, nämlich je 2 Bände über mathematische Theorie des Lichtes, sowie über Elektricität und Optik und je einen Band über Thermodynamik, Theorie der Elasticität, Theorie der Wirbelbewegungen, über elektrische Schwingungen, Capillarität, analytische Theorie der Fortpflanzung der Wärme und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der vorliegende 11. Band enthält eine klare und elegante Darstellung der Theorie des Newton'schen Potentials. Es werden zunächst der Begriff der Kräftefunction, des Newton'schen und des logarithmischen Potentials entwickelt, die Laplace'sche Differentialgleichung abgeleitet und die Eigenschaften der Potentialfunction im Unendlichen angegeben. Hierauf wird eine Reihe von äußeren Potentialfunctionen entwickelt (u. zw. für die homogene Kugelfläche, die Vollkugel, die Kreis-

Digitized by Google

peripherie (Newton'sches und logarithmisches P.) und die homogene Gerade). Sodann wird die Green'sche Formel aufgestellt und das Newton'sche sowie das logarithmische Potential nach Kugelfunctionen und nach den Potenzen der Coordinaten entwickelt. Weiters wird das innere Potential nebst seinen ersten und zweiten Ableitungen eingehend untersucht und die Poisson'sche Differentialgleichung bewiesen. Hernach wird das Wesentlichste über anziehende Linien und Flächen vorgeführt. Daran reiht sich zunächst eine orientierende Besprechung der Green'schen Function und des Dirichlet'schen Problems, welches für den Kreis und die Kugel vollständig behandelt wird. Nach einer recht interessanten Erörterung über Doppelbelegungen wird das Dirichlet'sche Problem wieder aufgenommen und mit Hilfe der Harnack'schen, sowie der Neumann'schen Methode gelöst. Den Schluss des ungemein instructiven Buches bildet die äußerst bemerkenswerte Ausdehnung der Neumann'schen Methode auf einfach zusammenhängende Gebiete.

Encyclopédie théorique et pratique des connaissances civiles et militaires (Publié sous le patronage de la Réunion des officiers). Traité de Mécanique. Statique, Cinématique, Dynamique. Hydraulique, Résistance des materiaux, Chaudières à vapeur, Moteur à vapeur et à gaz par L. Arnal, Ingénieur des Arts et Manufactures, Chef des travaux graphiques à l'École Centrale. Professeur aux Écoles municipales supérieures et à l'Association polytechnique, Ancien élève dé l'Ecole d'arts et métiers d'Aix, Ancien professeur à l'Ecole d'arts et métiers de Châlons, ex-ingenieur des Arts et Métiers d'Aix, Officier d'Académie, et Gustave Gauthier, Ancien élève de l'École d'Arts et Métiers d'Angers, Préparateur de Mécanique au Conservatoire des Arts et Métiers, Professeur à l'Association Polytechnique. Tome IV. Chaudières à vapeurs. Moteurs à vapeur et à gaz. 751 p. 4°. Georges Fanchon, Paris, 1899. Prix 25 Fr.

In dem vorliegenden, äusserst anregend geschriebenem Buche, werden alle sowohl für den Theoretiker als auch namentlich für den Praktiker wichtigen Errungenschaften auf dem Gebiete der Dampfkesselanlagen und der Dampf- und Gasmotoren vollkommen erschöpfend abgehandelt Zunächst führt der Verfasser kurz die für das Verständnis des Gegenstandes unbedingt nöthigen physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten vor, bespricht die Erzeugung der Wärme und die wichtigsten Sätze aus der mechanischen Wärmetheorie und bringt historische Daten über die Dampfmaschine bei (Maschinen von Heron, Salomon de Caus, Worcester, Savary, Désaguliers, Papin, Newcomen, James Watt). Hierauf werden die verschiedenen Arten der Dampfkessel nebst allen zugehörigen Gegenständen eingehends erörtert. Sodann wird eine ausführliche Auseinandersetzung über alle auf die Dampfmaschinen und deren praktische Verwendung bezüglichen Fragen gegeben. Daran reiht sich eine instructive Besprechung der Gas- und Petroleummotoren (Motoren von Bénier, Forest, Bischopp, Lentz, Ravel, Benz, Baldwin, Day, Otto, Crossley, Lenoir, Simplex, Koerting, Lickfeld, Durand, Daimer, Charon, Kiel, Stockport, Cuinat, Griffin, Rollasson, Brayton, Crowe, Otto Langer; Motoren von Crossley-Holt, Grobb,

Digitized by Google

Griffin, Stuart-Binney, Balbi, Hille, Otto, Daimler). Zum Schluss werden verschiedene thermische Maschinen (Heissluftmotoren von Ericson, Belon und Wilcox, Bénier, Farcot; Ammoniak-, Äthermaschinen, Kälte erzeugende Maschinen) vorgeführt.

Luce e raggi Röntgen, prof. Oreste Murani. Con praefazione del prof. R. Ferrini. Con 15 tavole e 157 incisione intercalati. X + 392 p. gr. 8°. Ulrico Hoepli, Milano 1898. Prezzo 8 lire.

Dieses Werk, 392 Seiten stark, enthält die Beschreibung einer grossen Zahl von Versuchen auf dem Gebiete der elektrischen Strahlungserscheinungen in verdünnten Gasen.

Es ist mit vielen in den Text gedruckten Figuren und zum Schlusse mit 15 Tafeln ausgestattet, welche photographische Aufnahmen mit Röntgenstrahlen darstellen. Da methematische Ableitungen gänzlich fehlen, ist das Buch auch für Laien geeignet und dies um so mehr, als das erste Capitel in populärer Weise die wichtigsten Thatsachen aus dem Gebiete der Optik, das zweite die elektrischen Erscheinungen in luftverdünnten Räumen bringt, wodurch ohne Vorkenntnisse das Verständnis der in den folgenden Capiteln beschriebenen Versuche ermöglicht wird. Das dritte Capitel behandelt die Entstehung von X-Strahlen. Die weiteren beschreiben die photographischen und elektrischen Wirkungen der X-Strahlen. Diese Capitel werden vorzugsweise für den Physiker, der sich auf dem Gebiete der X-Strahlen orientieren will, von Wert sein. Schließlich folgen Beschreibungen experimenteller Anordnungen. Indem jedem Capitel ein Quellenindex beigegeben ist, ist das Buch auch für den Fachmann von großem Werte. *Tuma.*

Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique par G. Nédélec. Vol. I. X + 246 p. gr. 8°. Gauthier-Villars, Paris 1897.

Das Buch, 246 Seiten stark, behandelt in zwei Abtheilungen die Methode der Rechnung mit Quaternionen.

Es wird in der ersten Abtheilung eine kurze Besprechung der geschichtlichen Entwicklung und des Wesens des Vector-Calcüles, sowie eine strenge Ableitung der Rechenoperationen mit Vectoren gebracht. Dabei wird immer auf die zuerst entwickelten Fundamentaleigenschaften der complexen Größen zurückgegangen. Der Umstand sowohl, dass keinerlei Vorkenntnisse auf functionentheoretischem Gebiete vorausgesetzt werden, sowie die wohlthuend klare Schreibweise, die vorzugsweise dadurch ausgezeichnet ist, dass alle Lehrsätze bereits genügend vorbereitet sind, bevor sie ausgesprochen werden, und nicht die Ableitung durch vorauseilende Definitionen ersetzt wird, macht das Werk vorzugsweise zum Studium für Anfänger geeignet.

Die zweite Abtheilung enthält die Theorie der Functionen von Quaternionen. Zeichnet sich auch dieser Theil durch große Klarheit der Ableitungen aus, so kann doch über dieses Gebiet noch kein endgiltiges Urtheil gefällt werden. Es

Digitized by Google

ist eben die Fortsetzung des Werkes abzuwarten, indem der vorliegende Theil ausschließlich rein mathematischen Inhaltes ist. Da die Vectorrechnung heute eine große Rolle in der Physik spielt, wird wohl ein weiterer Band Beispiele für Anwendung der Vectorrechnung bringen. *Tuma.*

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von Emanuel Czuber. Zwei Bände. B. G. Teubner, Leipzig, 1898. Ladenpreis geb. 22 M.

Die Czuber'schen Vorlesungen sollen in erster Linie demjenigen, der das Studium der Mathematik nicht als Selbstzweck, sondern um ihrer Anwendungen willen betreibt, die hiezu nöthigen Kenntnisse vermitteln, gleichzeitig aber auch dem angehenden Mathematiker die erste Einführung bieten.

Der Verfasser musste sich daher entschließen, nur das zum Verständnis der Grundlagen der Analysis und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Physik wirklich dienliche aufzunehmen und auch soweit möglich mit der Strenge der modernen Forschung auszustatten, dagegen auf gar zu abstracte Gedankengänge zu verzichten.

Diesem Princip gemäß ist der die fundamentalen Begriffe erörternde Theil des ersten Bandes (S. 1—38) ziemlich kurz ausgefallen, für die Auffassung mancher Leser vielleicht zu kurz. Die Beweise dieser Einleitung scheinen mir hie und da einer Ergänzung bedürftig, und die Beschränkung bei Besprechung der stetigen Functionen auf monotone wohl nicht nothwendig Dieselbe wird übrigens späterhin nicht einmal festgehalten, z. B. wird I. Bd. S. 43 die Function $x \sin \frac{1}{x}$ eingeführt. Auch bei Auseinandersetzung der Regeln für die Differentiation (I. B. S. 39—146) hätten wohl einige Punkte, z. B. die Beweise S. 92 und S. 103, weiter ausgeführt werden können. Nebenbei möge erwähnt worden, dass die Definition des Differentialquotienten nach einer bestimmten Richtung (S. 95) mit der üblichen nicht übereinstimmt, indem in der Regel zwischen den beiden Richtungen einer Geraden unterschieden wird.

Diese Kleinigkeiten fallen jedoch kaum ins Gewicht gegenüber dem Umstande, dass alle Lehrsätze präcise formuliert und durch zahlreiche Beispiele erläutert werden, eine Unsicherheit des Lesers somit nicht zu befürchten ist.

Der weitere Lehrgang des ersten Bandes ist der folgende. Zunächst gelangt S. 147—257 die Reihentheorie zu eingehender Darstellung, dann die Untersuchung der Extreme der Functionen (S. 258—301). Die zweite Hälfte dieses Bandes enthält die Darlegung der Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der Curven und Flächen (S. 302—524). Man wird dieser Darlegung ohne Rückhalt zustimmen können. Trotzdem der Verfasser auf ziemlich schwierige Partien eingeht — der Umfang des Vorgetragenen stimmt ungefähr mit dem des entsprechenden Theiles in Serret's bekanntem Lehrbuch überein — bleibt die Darstellung immer anschaulich und klar, die Beweise werden möglichst einfach geführt, und die Beispiele sind sorgfältig ausgewählt.

Der zweite Theil der Czuber'schen Vorlesungen gibt ein elementares und dabei die modernen Anforderungen in Bezug auf Strenge möglichst

Digitized by Google

berücksichtigendes Lehrbuch der Theorie der Integralrechnung und der Differentialgleichungen (für reelle Veränderliche).

Der Verfasser legt zunächst klar und übersichtlich die Grundbegriffe der Integralrechnung und die einfachsten Formen der Integration in der üblichen Anordnung dar und geht dann zur Besprechung der Anwendung über. Hier verdient die eingehende Discussion der mechanischen Quadratur und die Einfügung eines Abschnittes über Potentialtheorie hervorgehoben zu werden. (Der für den Poisson'schen Satz gegebene Beweis ist nicht einwandfrei).

In der Theorie der Differentialgleichungen wird all dasjenige, was ohne Kenntnis der Functionentheorie erledigt werden kann, in ausführlicher Weise besprochen und durch zahlreiche instructiv gewählte Beispiele erläutert. Auch auf die geometrische Interpretation wird eingegangen.

Kurze Abschnitte über Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen beschließen das Werk.

Die Vorlesungen sind geeignet, das bisher in dem Kreise der Hörer der technischen Hochschulen verbreitete nun schon einigermaßen veraltete Buch von Herr zu ersetzen. Nur ist in letzterem der behandelte Stoff umfangreicher. Vielleicht entschließt sich Herr Czuber, die noch fehlenden Partien (z. B. Algebra, analytische Geometrie, elliptische Integrale etc.) in einem dritten Band nachzutragen. *Tauber.*

Leçons sur la détermination des orbites professées à la Faculté des Sciences de Paris par F. Tisserand, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes; redigées et développées pour les calculs numériques par J. Perchot, Docteur ès Sciences, Astronomie-Adjoint à l'Observatoire avec un préface de H. Poincaré. Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Professeur à la Faculté des Sciences. XIV + 123 p. gr. 4° Gauthier-Villars, Paris, 1899. Prix 6·50 fr.

Das vorliegende Werk ist in seinem theoretischen Theile eine Wiedergabe der Vorlesungen, welche der der Wissenschaft zu früh entrissene berühmte Astronom Tisserand über die Bestimmung der Planeten- und Kometenbahnen zu halten pflegte. Es bildet daher eine hochwillkommene Ergänzung seiner umfangreichen „Traité de Mécanique Céleste", in welchem dieses für den Astronomen so wichtige Capitel nicht behandelt wird. In dem Buche werden die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Bahn eines Kometen und die Gauß'sche Methode zur Ermittlung der Bahn eines Planeten aus drei Beobachtungen eingehend auseinandergesetzt. Die letztere wird durch eine von dem Herausgeber herrührende, minutiös und detaillirt durchgeführte Bahnbestimmung für den Planeten 1897 D. J. zweckmäßig erläutert. Den Schluss des Werkes bilden die 8. und 9. Tafel des Oppolzer'schen Werkes über Bahnbestimmung. Das klar und instructiv geschriebene Buch kann allen, die sich für diesen Theil der Astronomie interessieren, bestens empfohlen werden; es wird ihnen ein sicherer Führer sein, der sie rasch und, ohne ihnen sonderliche Schwierigkeiten zu bereiten, bis an die äußerste Grenze dieses wichtigen Gebietes geleitet.

Digitized by Google

Cours de problèmes de géométrie analytique à l'usage des Candidats à l'École navale, à l'École centrale et à l'École polytechnique par G. de Longchamps, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Condorcet. Tome troisième. Géométrie à trois dimensions. XII + 582 p. 8°. Delagrave, Paris. 1899.

Vor wenig mehr als einem Jahre erschien der erste Band der vorliegenden, durch Originalität, sowie zweckmäßige Anordnung und stets anregende Darstellung ausgezeichneten Aufgabensammlung, deren dritter und zugleich letzter Band nun vorliegt. Die ersten zwei Bände, 295 bzw. 435 Seiten stark, sind der ebenen Geometrie gewidmet, der dritte der dreidimensionalen. Derselbe zerfällt in folgende zwölf Capitel: I. Allgemeines. II. Die elementaren Probleme. III. Die Tangenten und die Tangentialebenen. IV. Die Mittelpunkte, Pole und Polarebenen. V. Die Probleme der Sehnen und der Secantenebenen. VI. Die Normalen. VII. Die geradlinigen Erzeugenden bei den Flächen zweiter Ordnung und die Probleme, welche sich hierauf beziehen. VIII. Die cyklischen und die hypercyklischen Ebenen. Die Nabelpunkte. IX. Die Probleme der Axen und der Scheitel (bei den ebenen Schnitten und bei den Flächen zweiter Ordnung). X. Die Rotationsflächen. Die berührenden Flächen zweiter Ordnung. XI. Discussion der Flächen zweiter Ordnung. XII. Untersuchung einer Fläche. (Die römische Fläche von Steiner.) Da auch in diesem Bande, ebenso wie in seinen Vorgängern, in jedem Abschnitte zunächst eingehende Auseinandersetzungen über die in denselben zur Behandlung gelangenden Fragen gegeben, hierauf mehrere derselben zur Erläuterung der Anwendung der besprochenen Methoden ausführlich erörtert und schließlich kurze Andeutungen über eine große Zahl von oftmals ganz neuen Übungsaufgaben gemacht werden, so ist derselbe geeignet, das Studium der Raumgeometrie in hohem Grade zu fördern und neue fruchtbare Untersuchungen auf diesem Gebiete zu veranlassen.

Die Lehre von der Elektricität, von G. Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Vierter Band. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn, 1898.

Während uns die Nachricht vom Tode Gustav Wiedemann's, des unermüdlichen Sammlers auf dem Gebiet der Elektricitätslehre, ereilt, liegt vor uns der letzte Band seiner groß angelegten „Lehre von der Elektricität„. Es hat sich damit der Verfasser selbst ein unvergängliches Denkmal gesetzt. Es ist wohl nicht nöthig, von neuem den Wert des Werkes hervorzuheben, wozu uns schon das Erscheinen der früheren Bände genügenden Anlass gegeben hat. Wir Physiker müssen dem Zufall umso dankbarer sein, dass es dem, wenn auch bejahrten, so doch unerwartet rasch Dahingegangenen noch gegönnt war, das Riesenwerk zu vollenden.

Der vorliegende Band enthält die „Induction in linearen Leitern", den „Einfluss der inducierten Ströme auf den zeitlichen Verlauf der elektrischen Ströme in linearen, in sich geschlossenen Leitern, oscillatorische Entladungen", die „Induction in körperlichen Leitern (Rotationsmagnetismus), Inductionsapparate", die „Zurückführung der elektrischen Constanten auf absolutes Maß" und die hypothetischen Ansichten über das Wesen und die Wirkungsweise der Elektricität. *G. J.*

Digitized by Google

Cours d'analyse par F. de Heusch, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur d'analyse à l'école militaire de Bruxelles. Calcul différentiel. 278, p. gr. 8°. Alfred Castaigne, Bruxelles. 1898.

Das vorliegende Buch, welches eine Wiedergabe der Vorlesungen ist, die der Verfasser über Differentialrechnung und deren Anwendungen auf Geometrie an der „École militaire" in Brüssel zu halten pflegt, hat lediglich den Zweck, den Hörern dieser Anstalt das Studium der genannten Disciplin zu erleichtern. Es bietet daher nichts, was nicht in jedem der gangbaren Lehrbücher der Differentialrechnung zu finden ist, und befleißigt sich auch mit Rücksicht auf das Hörermaterial und den Zweck der erwähnten Unterrichtsanstalt nicht allenthalben der heute üblichen Strenge.

Die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik): von Dr. G. Gross, Ingenieur: unter besonderer Berücksichtigung der Molekulartheorie und der sich daraus ergebenden Erweiterung des Anwendungsgebietes der Thermodynamik; nebst Anwendungen auf Wärmemotoren, Kältemaschinen und andere technische Einrichtungen. Leichtfasslich behandelt für Ingenieure, Techniker, Industrielle und zum Selbstunterricht sowie zum Gebrauch an technischen Lehranstalten: Erster Band. Jena. Hermann Costenoble.

Wir haben den langen Titel des Buches vollständig wiedergegeben, weil er in kurzer Form die Absicht des Verfassers klarlegt, die er, was wir gleich hervorheben wollen, in vollem Masse verwirklicht hat. Wir müssen das Buch als ein vielfach, sehr originelles Werk bezeichnen, welches den physikalischen Kern des Gegenstandes gut trifft. Besonders die elementare Darstellung der kinetischen Gastheorie für Anfänger hat uns vielfach sehr angesprochen. Nicht unerwähnt wollen wir schliesslich die hübschen, kurzen, biographischen Notizen lassen. *G. Jäger.*

Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Von Dr. Eugen Dreher und Dr. K. T. Jordan. Berlin. Julius Springer. 1898.

Die Arbeit wäre von Bedeutung, wenn sie vor achtzig Jahren erschienen wäre. *G. Jäger.*

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre à deux variables indépendantes. Par E. Goursat. (Tome II.) A. Hermann. Paris. 1898.

Von diesem Werke, dessen erster Band schon früher in dieser Zeitschrift besprochen wurde, ist nunmehr auch der zweite und letzte Band erschienen. Während der erste mehr der Entwickelung allgemeinerer Methoden und Begriffe, dem Probleme Cauchys, der Theorie der Charakteristiken gewidmet war, befasst sich der vorliegende zweite Band mehr mit speciellen Fragen, insbesondere mit der Methode von Laplace und der allgemeineren

Digitized by Google

von Darboux, die beide bisher außerhalb Frankreichs nur wenig bekannt waren. Die erstere bezieht sich auf eine specielle lineare Differential-Gleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, die schon in Eulers Institutiones calculi integralis vorkommt. Auf sie lässt sich die allgemeine lineare Differential-Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Unabhängigen im elliptischen und hyperbolischen Falle stets zurückführen, während im dritten, parabolischen Falle sich die Differential-Gleichung in eine zweigliedrige überführen lässt, in der das eine Glied der zweite Differentialquotient der abhängigen nach der einen unabhängigen Veränderlichen und das andere ein Product aus dem ersten Differential-Quotienten nach der anderen Unabhängigen in eine Function beider Unabhängigen ist. Als Beispiel zur Erläuterung der Laplace'schen Methode, die im ersten Capitel dieses Bandes, dem fünften des gesammten Werkes, im wesentlichen nach der Darstellung, die ihr Darboux in seinem schönen Werke Leçons sur la théorie générale des surfares gegeben hat, auseinandergesetzt wird, benützt der Verfasser die Minimalflächen und die Flächen mit ebenen Krümmungslinien. Das nächste, sechste Capitel hat seine Stelle in dem Werke schon mit Rücksicht auf das folgende erhalten, für dessen Verständnis es unentbehrlich ist. Es befasst sich mit Systemen simultaner partieller Differential-Gleichungen und zwar fast ausschließlich mit solchen, in denen die Anzahl der Gleichungen kleiner als die der unbekannten Functionen ist und die zugleich Integrale mit unendlich vielen Constanten zulassen. Nach einigen wenigen allgemeinen Bemerkungen über solche Systeme, die nach einem Vorschlage Lies Darboux'sche genannt werden, beschränkt sich die Untersuchung auf jene specielle Classe derselben, in der das allgemeine Integral die größtmögliche Allgemeinheit besitzt und die Involutions-Systeme genannt werden. Im Zusammenhange hiemit werden noch verschiedene Fragen, die sich auf die zweien simultanen Differential-Gleichungen gemeinsamen Integrale beziehen, behandelt. Das folgende, siebente Capitel ist das umfangreichste und wichtigste. Es entwickelt in eingehender Weise die Darboux'sche Methode, die im Grunde auf einer Erweiterung der Charakteristik beruht, beleuchtet sie von verschiedenen Seiten, zeigt ihre Anwendbarkeit auf verschiedene Probleme und Classen von Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung. Während das darauffolgende, achte Capitel sich mit einer speciellen Classe von Differential-Gleichungen der II. Ordnung befasst, behandelt das neunte Capitel die Transformation. Der Satz, dass die Integration einer partiellen Differential-Gleichung I. Ordnung im Grunde auf eine Berührungs-Transformation hinausläuft, bleibt hier nicht mehr bestehen, indem eine Differential-Gleichung II. Ordnung durch die Berührungs-Transformation zwar in eine einfachere derartige übergeführt wird, die aber beide zugleich nach der Darboux'schen Methode entweder auflösbar sind oder nicht. Außer der Berührungs-Transformation gibt es aber noch eine Reihe anderer wichtiger Transformationen, deren hauptsächlichsten in diesem Capitel auseinandergesetzt werden. Unter dem Gesichtspunkte der Transformation wird dann auch das System zweier simultanen partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei unbekannten Functionen betrachtet und Fälle erörtert, bei denen die Elimination der einen Unbekannten für die andere eine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung ergibt. Eine allgemeinere als die aus diesen Betrachtungen entspringende Transformation ist die nach Bäckbund benannte, die ebenfalls

Digitized by Google

entwickelt und auf ihre Verwendbarkeit untersucht wird. Mit einer weiteren Verallgemeinerung der Transformation der Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung schließt dieses Capitel.

Das letzte zehnte Capitel gibt die Ausdehnung eines großen Theiles der für die Differential-Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung entwickelten Theoreme auf Differential-Gleichungen beliebiger Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Eine solche Erweiterung erfahren das Problem von Cauchy, der Begriff der Charakteristiken, die Methode Darboux's und Monge's, die Übertragung der letzteren auf Systeme von n partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Zum Schlusse bringt dieses Capitel noch den Begriff der Charakteristiken höherer Ordnung und einige allgemeine Bemerkungen über partielle Differential-Gleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

Die vorstehende gedrängte Inhalts-Angabe vermag allerdings kein klares Bild vom Inhalte des Werkes zu geben, dürfte aber immerhin genügen, um eine Vorstellung zu erwecken über den Reichthum an Begriffen, Problemen und Methoden, die darin zur Darstellung kommen. Dass dieselbe durchwegs exact, klar und elegant ist und vollständig auf der Höhe der Forschung steht, dafür birgt schon der Name des Verfassers. Es bleibt nur zu wünschen und zu hoffen, dass die großen Vorzüge dieses Werkes ihm zahlreiche Freunde gewinnen, zumal unter den deutschen Mathematikern, die bisher mit wenigen Ausnahmen diesen wichtigen Theil der Mathematik nicht nach Gebühr würdigten und beachteten.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery et Jules Molk. Tome III. Calcul intégral (Ier Partie). Gauthier-Villars et fils. Paris. 1898.

Während in den beiden ersten bereits besprochenen Bänden, welche die Verfasser als Calcul différéntiel bezeichnen, die Theorie specieller Functionen: der σ-, ζ-, Θ-Function, ferner der doppelt periodischen Functionen p, ξn, sn, cn, dn nur mittelst elementarer Methoden, unter Vermeidung der Integrale mit complexen Grenzen, entwickelt wurde, wird im vorliegenden dritten Bande, der als erster Theil des Calcul intégral erscheint, die allgemeine Theorie der doppelt periodischen Functionen auseinandergesetzt. Als Fundament dient hiebei der Darstellung die Theorie der Integrale mit complexen Grenzen und die Sätze Hermites über die Zerlegung der doppelt periodischen Functionen in Elemente, die im ersten Capitel für die drei Arten der doppelt periodischen Functionen abgeleitet werden. Mit der Darstellung dieser Functionen durch Quotienten von σ- und Hermites Φ-Functionen schließt dieses Capitel. Im zweiten werden sofort die eben gewonnenen allgemeinen Sätze auf die σ- G-, p-, ξ-, sn-, en-, dn-Functionen angewendet und die hiemit zusammenhängenden Entwicklungen der Funktionen p, ξ, sn, en, dn in ganze Functionen vorgenommen, ferner wird die Darstellung ihrer Derivirten durch Potenzen der Funktionen und umgekehrt der letzteren durch die Derivirten gegeben. Nach dieser Unterbrechung in der Entwickelung der allgemeinen Theorie, wird im dritten Capitel eine weitere Reihe allgemeiner Sätze über doppelt periodische Functionen der ersten Art abgeleitet: ihre Darstellung durch Differential-Gleichungen, die Relation, die zwischen zweien besteht, wenn sie gleiche Perioden haben

Digitized by Google

oder algebraisch miteinander verbunden sind. Im vierten Capitel werden die Additions- und Multiplications-Theoreme der p-Function, die schon im zweiten Bande besprochen worden waren, einer eingehenden Untersuchung unterworfen und auch die Addition der Functionen sn, cn, dn berührt. Das nächste Capitel gibt die Darstellung der doppelt periodischen Functionen durch trigonometrische Reihen. Aus der Entwicklung der Θ-, G- und Z-Function in trigonometrische Reihen und der Zerlegung einer gewöhnlichen doppelt periodischen Function ergibt sich zunächst die Darstellung jeder doppelt periodischen Function der ersten Art in trigonometrische Reihen. Die analoge Entwicklung für doppelt periodische Functionen der zweiten Art gründen die Verfasser auf eine von Kronecker eingeführte Function, die verhältnismässig leicht zum Ziele führt. Das sechste Kapitel handelt über die Integrale der doppelt periodischen Functionen längs eines beliebigen Weges. Die beiden letzten Kapitel befassen sich mit der Inversion u. zw. das siebente mit den Aufgaben: wenn k^2 oder g_2, g_3 gegeben sind τ oder die Perioden zu bestimmen. Das achte gibt die Umkehrung der gewöhnlichen doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung, also die Darstellung ihres Argumentes durch sie selbst und die Entwicklung der erhaltenen Integrale in Reihen. — Dieser Band reiht sich würdig den beiden vorangehenden Bänden an, indem auch er alle Vorzüge besitzt, die diesen nachgerühmt werden. Er gibt auch eine neue Bürgschaft, dass durch den letzten in Aussicht gestellten Band das Werk einen würdigen Abschluss erhalten wird.

Traité d'Analyse. Par E. Picard. T. II et III. Gauthier-Villars et fils. Paris. 1893, 1896.

Als Einleitung zu den vorgenannten zwei Bänden erschien bereits 1891 der erste Band, der aber wegen seiner Reichhaltigkeit an Stoff und Methoden und in seiner Abrundung ganz wohl auch als ein selbständiges Werk angesehen werden kann. In ihm werden vornehmlich die Begriffe und Eigenschaften der ein- und mehrfachen Integrale, der Curven- und Oberflächen-Integrale entwickelt und von diesen Theorien eine Reihe schöner Anwendungen gegeben, unter denen die auf die La Place'sche Differential-Gleichung und die Fourier'schen Reihen, auch räumlich einen hervorragenden Platz einnehmen. Die letzten Capitel bilden einen Excurs in die Differentialgeometrie und behandeln mit derselben grossen Eleganz, die das ganze Werk auszeichnet, die Theorie der Enveloppen, Kegelflächen, Congruenzen, Berührung, Krümmung, abwickelbare Flächen und die Abbildung. Der anschließende zweite Band ist ganz der Theorie der analytischen Functionen complexer Veränderlichen gewidmet. Er weicht nicht nur in Einzelheiten von den bisher üblichen Darstellungen der Functionentheorie ab, insofern er eine Menge neuer, sehr schöner Beweise für schon bekannte Sätze gibt und Theorien berücksichtigt, die erst durch neuere Forschungen erhöhte Bedeutung erlangten, sondern vielmehr noch in der Grundlegung der Functionentheorie. Es ist zwar auch in ihm die gewöhnliche, auf Cauchy zurückgehende Darstellung aufgenommen, die ausgehend vom Integral mit complexen Grenzen ungemein rasch und bündig in das Innere führt, aber als ihre eigentliche Grundlage gilt dem Verfasser die Theorie der harmonischen Functionen, die zunächst eingehend behandelt wird. Ganz im Geiste Riemanns wird so die Functionentheorie von ihrer wahren Quelle aus, der La Place'schen Differential-Gleichung abgeleitet, wodurch sie sich als Theorie

Digitized by Google

gewisser Integralpaare dieser Gleichung darstellt. In Folge dieser Auffassung schiebt sich nun von selbst das sogenannte Dirichlet'sche Princip in den Vordergrund, dem aus diesem Grunde im Buche besondere Aufmerksamkeit zugewendet wird und gewinnt auch die conforme Abbildung erhöhtes Interesse. In weiterer Consequenz dieser Auffassung erscheint auch die Riemann'sche Fläche in ihrer wahren Bedeutung: nicht mehr als ein blosses Versinnlichungs-Mittel für die Functionen, sondern als ein selbständiges Gebilde, dem eine Classe algebraischer Curven zugeordnet ist. Die Gleichung Beltramis, die für die Flächen das Analogon der La Place'schen bildet, ermöglicht es, diese Auffassung auf geschlossene Flächen im Raume zu erweitern. Unabhängig von dieser Auffassung der Riemann'schen Fläche als des primären Gebildes ist die Darstellung der algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale gehalten. Für sie und die damit zusammenhängenden Theorien ist die bisher übliche Darstellungsform beibehalten, aber, wie auch alle übriger Capiteln des Buches, erweitert und ergänzt durch die neueren Forschungen.

Den Uebergang von diesen zum dritten Bande bilden die Existenz-Beweise für die Integrale eines Systems gewöhnlicher oder partieller Differential-Gleichungen, die zum Theile noch in diesem Bande z. B. auf die Riccati'sche und die Inversion der elliptischen Integrale Anwendung finden.

Der dritte, umfangreichste Band ist der Theorie der Differential-Gleichungen gewidmet; doch liegt es dem Verfasser ferne, ein Handbuch über diesen Gegenstand, der sich noch in beständigem Flusse befindet, zu geben, sondern er versucht nur einige Fragen zu behandeln, die heute ein erhöhtes Interesse beanspruchen und im Vordergrunde der Forschungen stehen. Anknüpfend an die Existenz-Beweise und die berühmte Abhandlung von Briot und Bouquet werden zunächst eingehend die Singularitäten der Integrale und die singulären Integrale von Differential-Gleichungen untersucht. Im engeren Zusammenhange damit, wenn auch im Buche räumlich davon getrennt, steht die umfangreiche Theorie der linearen Differential-Gleichungen auf Grund ihrer Singularitäten und die zahlreichen Anwendungen, die davon im Buche zur Darstellung gelangen. Von den letzteren mögen nur erwähnt werden: Die Theorie der hypergeometrischen Transcendenten und Differential-Gleichungen sammt den Untersuchungen, zu denen sie Anlass gaben, die Differential-Gleichungen, die sich im Unendlichen irregulär verhalten, deren Coefficienten rationale oder doppelt periodische Functionen sind. Um in eingehender Weise die große Analogie darlegen zu können, die zwischen den linearen Differential-Gleichungen und den algebraischen Gleichungen besteht, hat der Verfasser in einem langen Capitel einen kurzen, lichtvollen Abriss der Theorie der Substitutionen und ihrer Anwendungen auf die algebraischen Gleichungen gegeben. Auf Grund dieser Auseinandersetzungen überträgt er dann die Begriffe der algebraischen Gruppentheorie auf die linearen Differential-Gleichungen und tritt dadurch in Fühlung mit den allgemeinen Begriffen der großen Lie'schen Transformations-Theorie.

Eingeschoben zwischen die allgemeine Theorie der Singularitäten von Differential-Gleichungen und die Theorie der linearen Differential-Gleichungen ist ein ganz neuartiger Abschnitt, der den Differential-Gleichungen mit bloß reellen Elementen gewidmet ist. Es werden darin verschiedene Näherungs-Methoden zur Berechnung der Integrale solcher Differential-Gleichungen untersucht und Anwendungen auf mehrere Probleme gegeben; sodann Differential-

Digitized by Google

Gleichungen, die Parameter enthalten und ihre periodischen Lösungen, auf die zuerst Poincaré bei der Behandlung des drei Körper-Problems hinwies; schließlich werden noch eingehend die singulären Punkte der reellen Differential-Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades erörtert. Alle diese Fragen sind erst in neuester Zeit, namentlich durch die Arbeiten Poincaré's, von der Forschung aufgenommen worden, haben aber bisher trotz ihrer eminenten Wichtigkeit bloß bei einem kleinen Kreise französischer Mathematiker volle Würdigung gefunden. Von der interessanten Darstellung des Verfassers ist zu erwarten und zu erhoffen, dass sie diesen Fragen auch die Aufmerksamkeit weiterer Kreise der Mathematiker zuwenden wird.

Es würde zu weit führen, die Fülle des Neuen und Interessanten besprechen zu wollen, die das Werk bietet; jedes einzelne Capitel gibt Zeugnis davon, wie von dem Streben des Verfassers, das Werk überall auf der Höhe der Forschung zu halten und in der Eleganz der Darstellung den rühmlichen Traditionen der französichen Schule gerecht zu werden. So summarisch die obige Übersicht über die Anlage und den Inhalt des Werkes ist, so dürfte sie zur Genüge erkennen lassen, dass es ein ganz eigenartiges Werk ist, mit dem sich kein anderes unserer mathematischen Literatur vergleichen lässt und die Behauptung ist keineswegs übertrieben, dass es auf die mathematische Ausbildung unserer Epoche einen tiefen und nachhaltigen Einfluss ausüben wird.

Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Par Gaston Darboux. T.I. Paris. Gauthier-Villars. 1898.

Die zahlreichen in der Theorie der orthogonalen Systeme seit Lamé erzielten Fortschritte haben es nothwendig gemacht, diese Theorie in einer neuen, von einheitlichen Gesichtspunkten getragenen Darstellung zu fixieren. Der Verfasser vollführt in dem vorliegenden Werke diese Aufgabe mit derselben Kunst der Darstelllung, wie sie der Théorie des surfaces zu eigen ist, und indem er den bereits bekannten Resultaten der Forschung eine Fülle neuer aus Eigenem hinzufügt. Das Werk setzt übrigens einen Leser voraus, der mit den modernen Untersuchungsmethoden der Differentialgeometrie in vollem Umfang vertraut ist.

Der Aufbau des vorliegenden 1. Bandes ist ungefähr der folgende:

Das erste Buch behandelt die Theorie der Lamé'schen Familien, wie der Verfasser jene (von Einem Parameter abhängigen) Flächenfamilien bezeichnet, welche einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehören können.

Im ersten Capitel wird die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, welcher der Parameter einer Lamé'schen Familie zu genügen hat.

Das zweite Capitel enthält die Theorie jener orthogonalen Systeme, welche eine vorgegebene von Einem Parameter abhängige Ebenen- oder Kugelfamilie umfassen. Es wird geometrisch gezeigt, dass die beiden anderen Familien, welche eine vorgegebene Ebenenfamilie zu einem orthogonalen System ergänzen, aus den vom Verfasser surfaces-moulures genannten Flächen bestehen, und die analytische Charakterisierung dieses Systems gegeben. Hervorzuheben ist der Satz, dass die orthogonalen Trajectorien einer beweglichen Ebene sich durch Quadraturen bestimmen lassen. Die Ermittlung der orthogonalen Trajectorien einer vorgegebenen Kugelfamilie wird auf diejenige einer Ebenenfamilie zurückgeführt.

Digitized by Google

Von hohem Interesse sind die Untersuchungen des dritten Capitels, in welchem jene Lamé'schen Familien aufgefunden werden, deren Parameter einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (und dadurch auch sofort der gegebenen dritter Ordnung) genügt. Es wird gezeigt, dass sich unter diesen Fall die Familien von Parallelflächen, die Familien Dupin'scher Cykliden und die von Ribaucour angegebenen Familien subsumieren lassen, und dass sich zu jeder beliebigen einzelnen Fläche unendlich viele solche sie enthaltende Lamé'sche Familien finden lassen. In analytischer Beziehung ist die Bestimmung der Lamé'schen Familien dieses Capitels auf diejenige der orthogonalen Trajectorien einer Kugelfamilie im Raume von fünf Dimensionen rückführbar, in geometrischer Beziehung lassen sie sich charakterisieren durch die Aussage: Die Schmiegungsebenen der Trajectorien in jenen Punkten, wo sie ein und dieselbe Fläche der Familie schneiden, gehen alle durch Einen Punkt.

Das nächste Capitel wendet sich wieder der Besprechung der allgemeinen Differentialgleichung dritter Ordnung zu. Man kann dieselbe in eine Form bringen, die erkennen lässt, dass der Abstand zweier unendlich naher Flächen einer Lamé'schen Familie eine gewisse charakteristische hier nicht näher auseinanderzusetzende Eigenschaft besitzt, woraus interessante Sätze über die Ribaucour'schen cyklischen Systeme folgen. Weiters wird der Differentialgleichung eine neue Gestalt gegeben, welche gestattet die Frage zu erörtern, wann eine Lamé'sche Familie durch eine bewegliche Fläche erzeugt werden kann.

Im fünften Capitel werden die aus Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Hauptebenen bestehenden Familien untersucht. Die analytische Bedingung, unter welcher eine solche Familie eine Lamé'sche ist, wird in besonders bemerkenswerter Form (auf S. 103 Formel (20)) gegeben. Geometrisch kann sie dahin formuliert werden, dass die Kreispunktscurve, d. i. die von einem die Flächen der Familie durchwandernden Kreispunkt erzeugte Curve, normal auf allen Flächen steht. Ferner wird nachgewiesen, dass, wenn Flächen zweiter Ordnung mit ungleichen Axen eine Lamé'sche Familie bilden, ihre Hauptebenen nothwendig zusammenfallen. Dieser Satz wird auch zur Lösung folgender Aufgabe verwendet: Eine Flächenfamilie zu finden, welche gleichzeitig zu zwei gegebenen Familien von Parallelflächen orthogonal ist. Die gesuchte Familie ist eine Lamé'sche, bestehend aus Flächen zweiter Ordnung.

Das sechste Capitel befasst sich mit der Untersuchung n-fach orthogonaler Systeme von n Variabeln, und hier bietet sich analog dem Falle $n=3$ die Aufgabe dar, durch Elimination von $n-1$ der n Functionen eines orthogonalen Systems die Bedingung zu finden, unter der irgend eine Function einem solchen System angehören kann. Als solche wird gefunden, dass die Function gleichzeitig einer gewissen Anzahl partieller Differentialgleichungen dritter Ordnung zu genügen hat. Ein Analogon des Dupin'schen Theorems wird durch geeignete Verallgemeinerung des Begriffs der Krümmungscurven für Flächen im Raum von n Dimensionen gewonnen.

Das zweite Buch ist der Theorie der krummlinigen Coordinaten gewidmet. Der Verfasser stellt für ein $n$fach orthogonales System von n Variabeln ein charakteristisches Differentialgleichungssystem auf, welchem gewisse vom Verfasser mit β_{ik} bezeichnete Functionen genügen, und es werden verschiedene Methoden angeführt, durch welche es gelingt, aus bekannten orthogonalen Systemen andere abzuleiten. Für den Fall $n=3$ wird das erwähnte Differen-

Digitized by Google

tialgleichungssystem noch auf anderem Wege, nämlich mit Hilfe kinematischer Betrachtungen, abgeleitet und werden die Lamé'schen Formeln für die Hauptkrümmungsradien, sowie die Eigenschaften der Differentialparameter erster und zweiter Ordnung dargelegt. Eine kurze Erörterung des Falles nichtorthogonaler Coordination schließt diese grundlegenden Betrachtungen. (Erstes und zweites Capitel).

Im dritten und vierten Capitel wird folgendes Problem gelöst: Ein dreifach orthogonales System zu finden, in welchem jede einzelne Fläche durch ihre Krümmungscurven in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden kann. Dieses Problem ist die Verallgemeinerung zweier von Lamé aufgestellten Probleme: 1. Orthogonale Systeme zu finden, welche aus drei isothermen Flächenfamilien bestehen; 2. Orthogonale Systeme zu finden, für welche die Potentialgleichung unendlich viele Lösungen von der Form $P f(\rho) f_1, (\rho_1) f_2 (\rho_2)$ besitzt, wo P eine für alle Lösungen gleiche Function der 3 Flächenporameter ρ, ρ_1, ρ_2 ist. Diese zwei Probleme werden im 5. Capitel behandelt und es wird nachgewiesen, dass außer den bereits von Lamé erhaltenen Lösungen keine anderen existieren, als ein imaginäres System für das erste Problem und das Wangerin'sche Cylidensysteme für das zweite Problem.

Im letzten Capitel werden die Bianchi'schen Untersuchungen über orthogonale Systeme, unter deren drei Familien sich eine befindet, welche aus lauter Flächen von constantem Krümmungsmaß besteht, besprochen. Dieser Gegenstand wird anscheinend noch eine Fortsetzung im nächsten Bande erfahren.

Tauber.

Robert Mayer und Hermann von Helmholtz. Eine kritische Studie von Dr. Th. Groß. V+174 S. gr. 8° Fischer. Berlin. 1898. Ladenpreis 4.50 M.

Wie schon das Titelblatt besagt, ist es keine Parallele, sondern eine Kritik dieser beiden hervorragenden Männer, und nach wenigen Seiten wird es dem Leser auch klar, zu wessen Gunsten diese Kritik ausfällt. Polemische Schriften schärferen Styls, besonders wenn sie sich in persönliche, kleinliche, ja geradezu unschöne Charaktereigenschaften einlassen, rufen stets ein unbefriedigendes und unsympathisches Gefühl hervor, insbesonders wenn sie Personen behandeln, die sich selbst nicht mehr vertheidigen können.

Es kann nicht geleugnet werden, dass das vorliegende Werk mit großer Präcision und Schärfe die gestellte Aufgabe durchführt. Es werden nacheinander die Auffassungen des Principes der Erhaltung der Energie, von Robert Mayer und von Helmholtz, bezüglich aller Gebiete der Physik erörtert und gezeigt, dass Robert Mayer als Erster diese sowohl logisch, als auch empirisch durchgeführt hat, während von Helmholtz als Erster eine mathematische Darstellung versuchte. Ist schon in der Besprechung der Aufgabe, welche von Helmholtz sich gestellt hat, der parteiliche Standpunkt des Verfassers nicht zu verkennen, so berühren im letzten Abschnitte, wo das persönliche Verhalten von von Helmholtz gegen Robert Mayer besprochen wird, die unterstellten, unschönen und geradezu unlautern Motive aufs unangenehmste. Nach Beendigung des Buches hat man unwillkürlich den Gedanken, was von Helmholtz darauf entgegnen würde, wenn er noch lebte. Man kann nur wünschen, dass sich ein getreuer, aber auch wohlgewappneter Schüler desselben finde, der die Vertheidigung übernimmt, denn leicht wird es ihm nicht werden, alle Einwände zu entkräften.

P. Cz.

Digitized by Google

Digitized by Google

TESCHEN.
K. UND K. HOFBUCHDRUCKEREI KARL PROCHASKA.

Digitized by Google

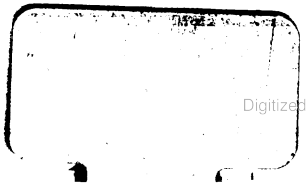
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

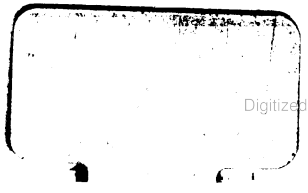
PERIODICAL



Digitized by Google

Digitized by Google

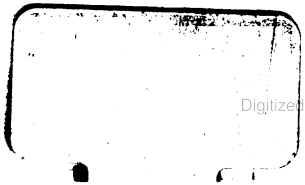
PERIODICAL



Digitized by Google

Digitized by Google

PERIODICAL



Digitized by Google

Digitized by Google